

Επιφάνειες αναφοράς γεωγραφικής πραγματικότητας

Το ελλειψοειδές ή η σφαίρα δεν είναι **αναπτυκτές επιφάνειες**

δηλαδή: η απεικόνιση στο επίπεδο δεν μπορεί να γίνει χωρίς **παραμορφώσεις**

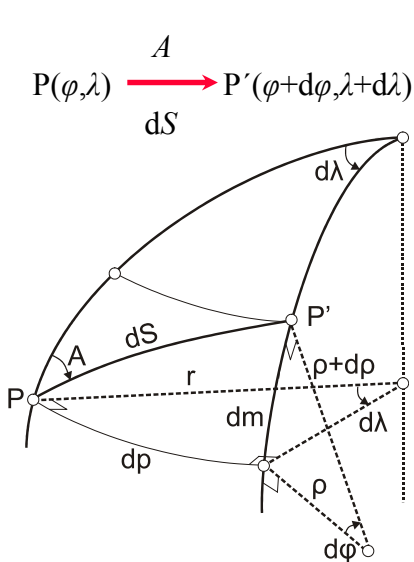
ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ:

Επιφάνεια με **διπλή** καμπυλότητα

ΣΦΑΙΡΑ:

Επιφάνεια με **σταθερή** καμπυλότητα

Στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο ελλειψοειδές



$$dm = \rho d\varphi$$

$$dS = \sqrt{dm^2 + dp^2}$$

$$dp = r d\lambda$$

$$dp = N \cos \varphi d\lambda$$

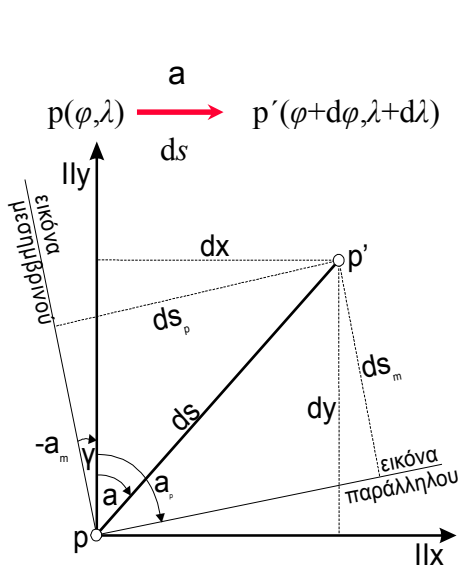
$$r = N \cos \varphi$$

$$dS = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

$$\tan A = \frac{dp}{dm}, A = \arctan \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi}$$

$$d\Psi = dm dp, d\Psi = \rho N \cos \varphi d\varphi d\lambda$$

Στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο επίπεδο (1/3)



$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda) & \rightarrow & \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ y &= y(\varphi, \lambda) & \rightarrow & \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

Στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο επίπεδο (2/3)

Μεσημβρινός:

$$\lambda = c, d\lambda = 0$$

$$\blacklozenge \quad ds_m = \sqrt{E} d\varphi$$

$$ds_p = \sqrt{G} d\lambda$$

Παράλληλος:

$$\varphi = c, d\varphi = 0$$

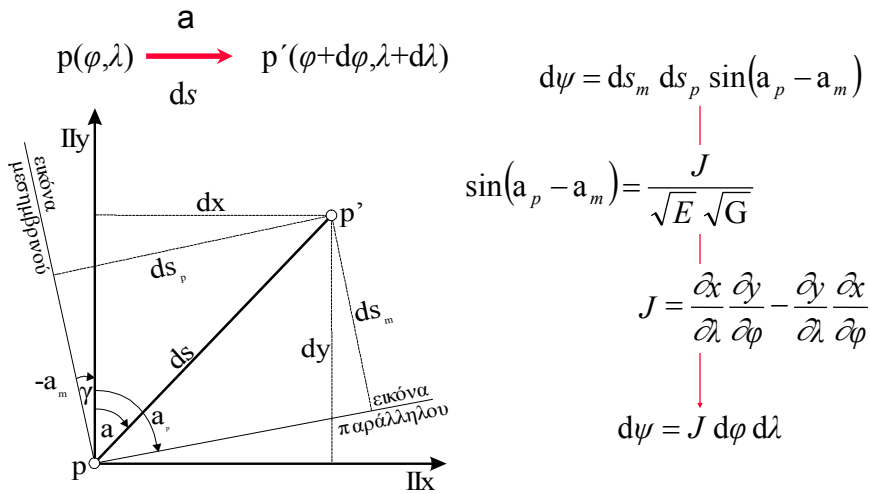
$$a = \arctan \frac{dx}{dy} = \arcsin \frac{dx}{ds} = \arccos \frac{dy}{ds}$$

$$a_m = \arctan \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}} \right) = \arcsin \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\sqrt{E}} = \arccos \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\sqrt{E}}$$

$$\gamma = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}} \right)$$

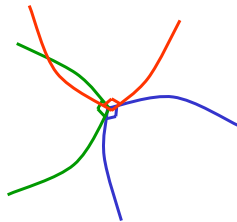
$$a_p = \arctan \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \lambda}} \right) = \arcsin \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\sqrt{G}} = \arccos \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\sqrt{G}}$$

Στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο επίπεδο (3/3)

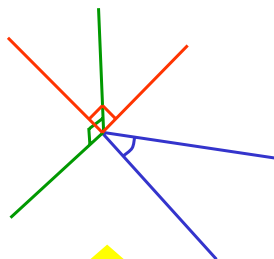


Κύριες διευθύνσεις - Κύριες κλίμακες

Σφαίρα:



Επίπεδο:

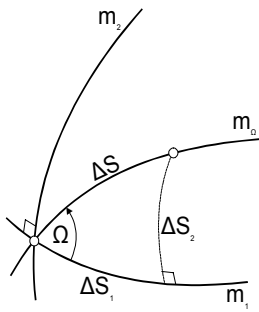


$m_1 (m_{\max})$

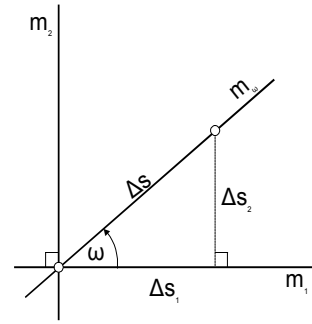
Κύριες κλίμακες

$m_2 (m_{\min})$

Στοιχειώδεις παραμορφώσεις - Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης



$$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta S} = \frac{ds}{dS}$$



$$\Delta s = \sqrt{\Delta s_1^2 + \Delta s_2^2},$$

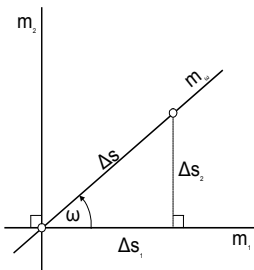
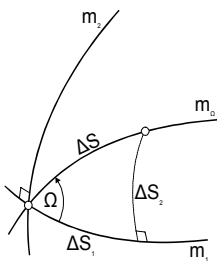
$$\frac{\Delta s}{\Delta S} = \sqrt{\frac{\Delta s_1^2}{\Delta S^2} + \frac{\Delta s_2^2}{\Delta S^2}},$$

$$m_\Omega = \sqrt{\frac{\Delta s_1^2}{\Delta S_1^2} \cos^2 \Omega + \frac{\Delta s_2^2}{\Delta S_2^2} \sin^2 \Omega}$$



$$m_\Omega = \sqrt{m_1^2 \cos^2 \Omega + m_2^2 \sin^2 \Omega}$$

Στοιχειώδεις παραμορφώσεις - Παραμορφώσεις γωνιών



$$\tan \Omega = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

$$\tan \omega = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}$$

$$\tan \omega = \frac{m_2}{m_1} \tan \Omega,$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)}$$

$$\varepsilon \equiv \Omega - \omega$$

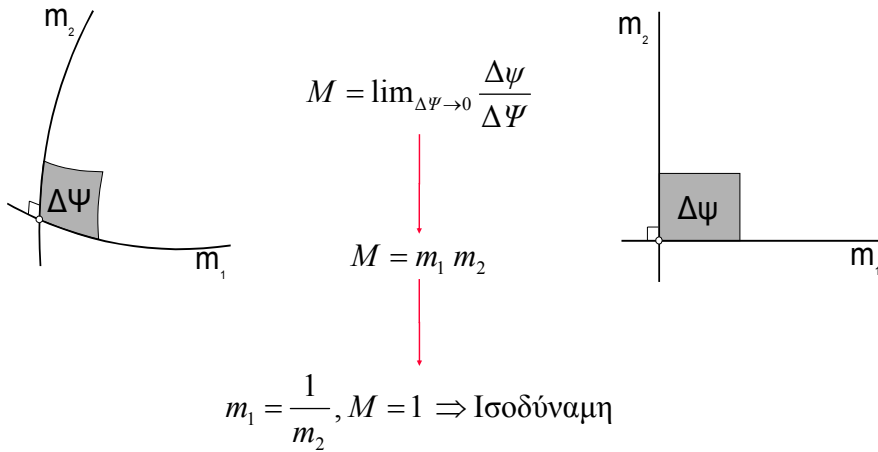
$$\sin \varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin(\Omega + \omega)$$

$$\sin E = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\Omega = 45^\circ + \frac{E}{2}, \omega = 45^\circ - \frac{E}{2}$$

$$m_1 = m_2, \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{Σύμμορφη}$$

Στοιχειώδεις παραμορφώσεις - κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης



Νόμος παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot (1/2)

$$m = \frac{ds}{dS} \Rightarrow m^2 = \frac{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\rho^2 d\varphi^2} \quad \tan A = \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi}$$

$$m^2 = \frac{\frac{E}{r^2} + \frac{2F}{r\rho} \tan A + \frac{G}{r^2} \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$M = \frac{J}{R^2 \cos \varphi}$$

Συμπέρασμα : $m = f(\varphi, \lambda), m = f(A)$

Νόμος παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot (2/2)

$$\frac{dm^2}{dA} = \tan^2 A - \frac{\frac{G}{r^2} - \frac{E}{\rho^2}}{\frac{F}{\rho r}} \tan A - 1 = 0 \longrightarrow \tan A_1 \tan A_2 = -1$$

$\downarrow$
 $A_1 = A_2 + 90^\circ$

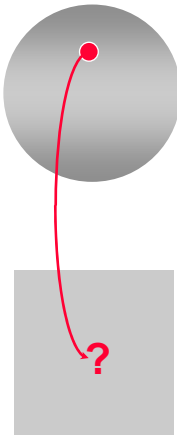
“οι διευθύνσεις στην επιφάνεια της σφαίρας όπου η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης λαμβάνει την μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι κάθετες μεταξύ τους”

“στο επίπεδο της απεικόνισης οι κύριες διευθύνσεις απεικονίζονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις”

Θεώρημα Tissot:

“σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος καθέτων διευθύνσεων οι οποίες κατά την απεικόνισή τους στο επίπεδο παραμένουν κάθετες”

Έλλειψη παραμόρφωσης - Δείκτρια Tissot (1/2)



$$dm^2 + dp^2 = dS^2$$

$$\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = dS^2$$

$$d\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} dy - \frac{\partial y}{\partial \lambda} dx}{J}, \quad d\lambda = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} dx - \frac{\partial x}{\partial \varphi} dy}{J}$$

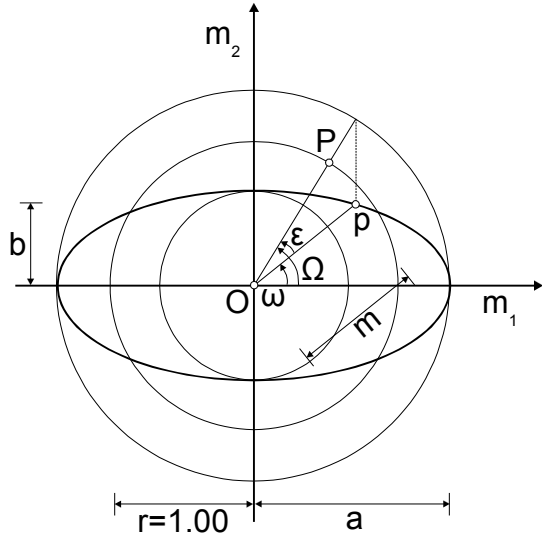
$$\left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) dx^2 + \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) dy^2 - 2 \left(r^2 \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \rho^2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) dx dy = J^2 dS^2$$

Έλλειψη παραμόρφωσης - Δείκτρια Tissot (2/2)

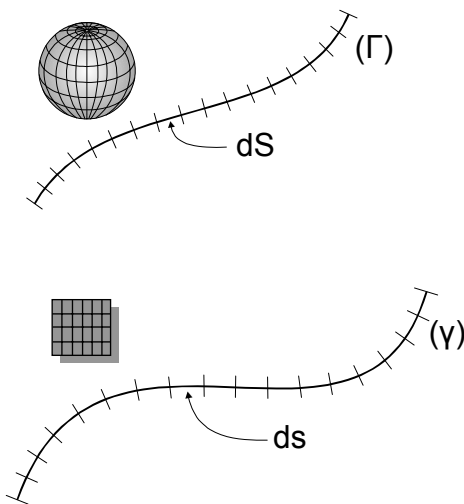
$$a^2 dx^2 + b^2 dy^2 - 2c dx dy = k^2$$



“κάθε στοιχειώδης κύκλος στην επιφάνεια της σφαίρας απεικονίζεται στο επίπεδο ως έλλειψη ανεξάρτητα του συγκεκριμένου νόμου της απεικόνισης”



Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών



$$m = \frac{ds}{dS} \Rightarrow ds = m dS$$

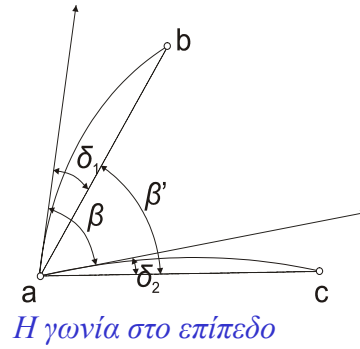
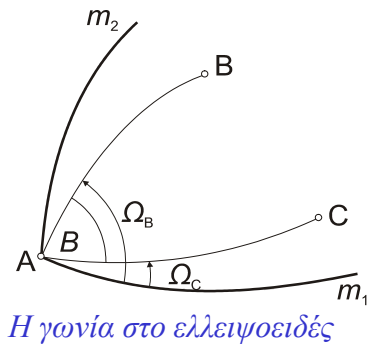
$$s = \int_s m dS$$

$$s = \left[\frac{1}{S} \int_s m dS \right] S$$

$$\bar{m} = \frac{1}{S} \int_s m dS$$

$$s = \bar{m} S$$

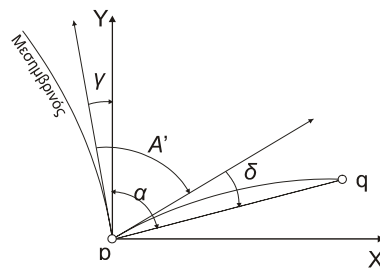
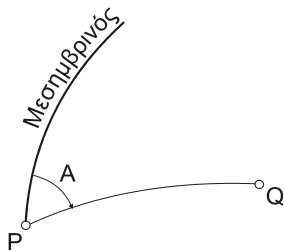
Παραμόρφωση γωνίας



$$\beta' = B + \varepsilon - \delta_1 + \delta_2, \text{ όπου: } \varepsilon = \beta - B$$

$$\varepsilon = \varepsilon_B - \varepsilon_C$$

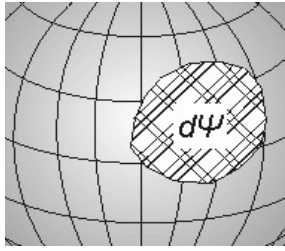
Αζιμούθιο & γωνία διεύθυνσης σύγκλιση μεσημβρινών



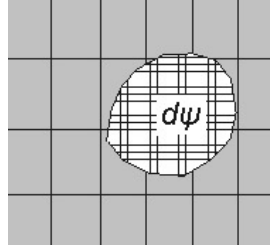
$$A' = A + \varepsilon \quad \longleftrightarrow \quad A' = \alpha + \gamma - \delta$$

$$\alpha = A - \gamma + \varepsilon + \delta$$

Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου



Χωρίο στο ελλειψοειδές



Χωρίο στο επίπεδο

$$d\psi = M d\Psi \longrightarrow \psi = \int_{\Psi} M d\Psi$$

$$\psi = \left(\frac{1}{\Psi} \int_{\Psi} M d\Psi \right) \Psi \longrightarrow \overline{M} = \frac{1}{\Psi} \int_{\Psi} M d\Psi \longrightarrow \psi = \overline{M} \Psi$$