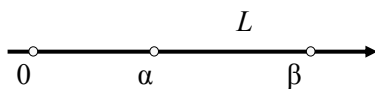


Στοιχεία συναρτήσεων μίας μεταβλητής



Μετρική απόσταση



ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ: $L = |\alpha - \beta|$

ΔΙΑΣΤΗΜΑ:

$[\alpha, \beta]$ $\alpha \leq x$ και $x \leq \beta$

(α, β) $\alpha < x$ και $x < \beta$

$[\alpha, \beta)$ $\alpha \leq x$ και $x < \beta$

$(\alpha, \beta]$ $\alpha < x$ και $x \leq \beta$

Εξαρτημένη μεταβλητή

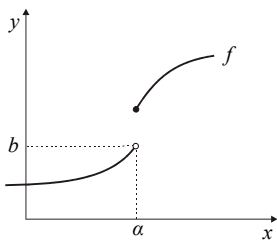
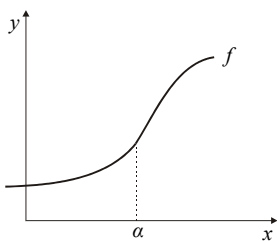


$y = f(x)$



Ανεξάρτητη μεταβλητή

Διαγράμματα και συνέχεια



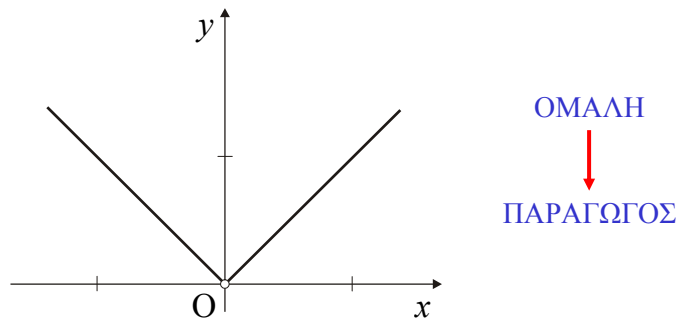
Ορισμός: Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση στο χώρο S , όπου S είναι ένα διάστημα. Τότε η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $a \in S$ εάν δοθεί οποιοσδήποτε αριθμός $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρός, υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$, ο οποίος εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε όποτε το $x \in S$ και ικανοποιείται η σχέση:

$$|x - a| < \delta, \text{ η } f(x) \text{ ικανοποιεί τη σχέση: } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



Απόσταση

Παράγωγος και ομαλότητα



Ρυθμός μεταβολής

Η f $\begin{cases} \text{Αύξουσα: } f' > 0 \\ \text{Αμετάβλητη: } f' = 0 \\ \text{Φθίνουσα: } f' < 0 \end{cases}$

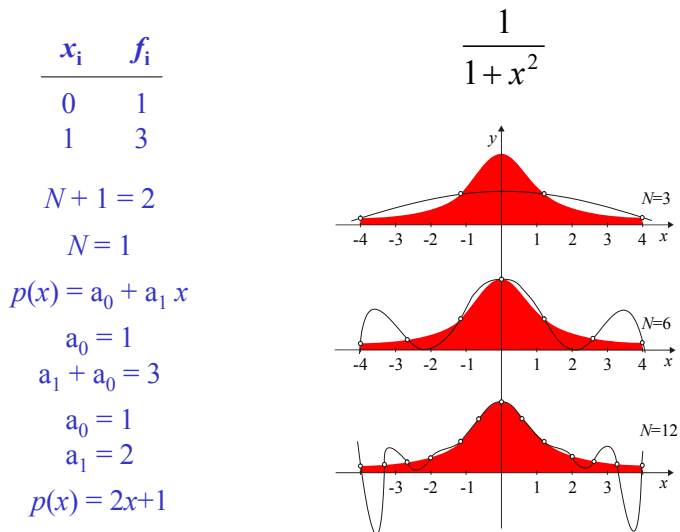
Πολυωνυμική παρεμβολή

Δεδομένα:

Θέση $\rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \{f_0, f_1, \dots, f_N\} \leftarrow$ Τιμή φαινομένου

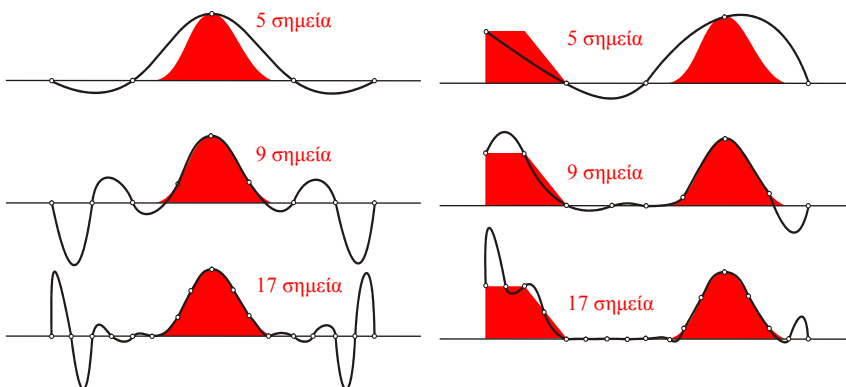
$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$ $\leftarrow$ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

Θεώρημα: Εάν $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ είναι ένα σύνολο $N+1$ διακριτών αριθμών τότε, για οποιοδήποτε σύνολο αριθμών $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$ υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού N , για παράδειγμα το $p(x_i) = f_i, i=0, 1, \dots, N$, του οποίου η γραφική παράσταση περνά από τα $N+1$ διακριτά σημεία $(x_i, f_i), i = 0, 1, \dots, N$



«ΥΨΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΚΟΙΛΑΔΕΣ»

«ΣΥΝΕΧΗ ΥΨΩΜΑΤΑ»



Υπολογισμός συντελεστών πολωνυμικής παρεμβολής

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{pmatrix}$$

$N+1$ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $N+1$ ΑΓΝΩΣΤΟΙ

$$V \mathbf{a} = \mathbf{f} \longrightarrow \mathbf{a} = V^{-1} \mathbf{f}$$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

(1/2)

$$E(p) = \sum_{i=0}^N (p(x_i) - f_i)^2 \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^N 2(p(x_i) - f_i) \frac{\partial p(x_i)}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^N x_i^j (p(x_i) - f_i) \\ &= 2 \left(\sum_{i=0}^N x_i^j (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m) - \sum_{i=0}^N x_i^j f_i \right) \\ &= 2 \left(\left(\sum_{i=0}^N x_i^j \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^N x_i^{j+1} \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^N x_i^{j+2} \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^N x_i^{j+m} \right) a_m - \sum_{i=0}^N x_i^j f_i \right) \end{aligned}$$

$m+1$ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\begin{aligned}
 a_0 \sum_{i=0}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^1 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^m &= \sum_{i=0}^N f_i, \\
 a_0 \sum_{i=0}^N x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^N x_i f_i, \\
 a_0 \sum_{i=0}^N x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+2} &= \sum_{i=0}^N x_i^2 f_i, \\
 \dots & \\
 a_0 \sum_{i=0}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^N x_i^m f_i.
 \end{aligned}$$

Θεώρημα: Εάν $x_0, x_1, \dots, x_N$ είναι ένα σύνολο $N+1$ διακριτών σημείων και $m \leq N$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $p(x) \in P_m$ για το οποίο η συνάρτηση $E(p)$ ελαχιστοποιείται και οι συντελεστές αυτού του πολυωνύμου δίδονται από τη λύση των κανονικών εξισώσεων

Παράδειγμα μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων

i	x_i	f_i
0	2	6.91
1	4	9.62
2	6	9.74
3	8	10.01
4	10	11.48
5	12	11.90

$N=6, \Sigma x_i=42, \Sigma f_i=59.66,$
 $\Sigma x_i^2=364$ και $\Sigma x_i f_i=448.42$

$6a_0 + 42a_1 = 59.66$ και
 $42a_0 + 364a_1 = 448.42,$

$a_0 = 6.683$ και $a_1 = 0.4400.$

$p(x) = 0.4400x + 6.683$

