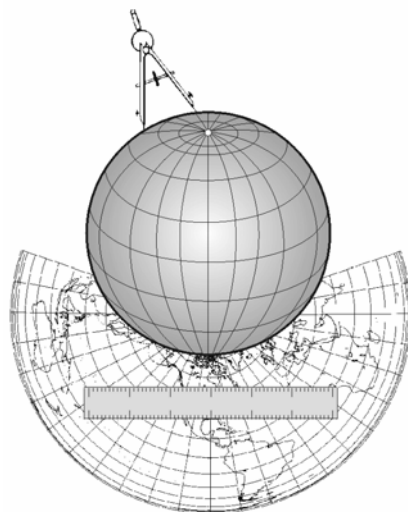




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ



ΒΥΡΩΝΑΣ ΝΑΚΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2006

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	i
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	vii
ΜΕΡΟΣ Α' ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ	1
Κεφάλαιο 1-ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ	3
1.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές προβολές	3
1.2 Χαρτογραφικό σύστημα αναφοράς	5
1.3 Παραμορφώσεις	6
1.4 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής	7
1.5 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο επίπεδο απεικόνισης	10
1.6 Στοιχειώδεις παραμορφώσεις	13
1.6.1 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης	13
1.6.2 Κύριες διευθύνσεις - κύριες κλίμακες	14
1.6.3 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση	14
1.6.4 Παραμορφώσεις γωνιών	15
1.6.5 Κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης	17
1.6.6 Νόμος των παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot	18
1.6.7 Έλλειψη παραμόρφωσης - Δείκτρια Tissot	20
1.7 Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών	21
1.7.1 Παραμόρφωση μήκους πεπερασμένης γραμμής	22
1.7.2 Παραμόρφωση γωνίας	23
1.7.3 Σχέση μεταξύ αζιμουθίου και γωνίας διεύθυνσης - σύγκλιση των μεσημβρινών	24
1.7.4 Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου	25
1.8 Βιβλιογραφία	26
Κεφάλαιο 2-ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ - ΠΡΟΒΟΛΩΝ	29
2.1 Εισαγωγή στις αρχές των απεικονίσεων	29

2.2 Βασικές αρχές απεικονίσεων-προβολών	29
2.3 Βιβλιογραφία	33
Κεφάλαιο 3-ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ	35
3.1 Εισαγωγή στα συστήματα απεικονίσεων	35
3.2 Ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις	35
3.2.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή	35
3.2.2 Μερκατορική προβολή	38
3.2.3 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή	42
3.3 Ορθές κωνικές απεικονίσεις	43
3.3.1 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή	45
3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert	47
3.3.3 Ισοδύναμη κωνική προβολή - Albers	50
3.3.4 Ισοδύναμη προβολή Bonne	52
3.3.5 Ισοδύναμη προβολή Sanson	53
3.3.6 Ισοδύναμη προβολή Mollweide	54
3.4 Ορθές επίπεδες απεικονίσεις	55
3.4.1 Ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή - Postel	56
3.4.2 Πολική στερεογραφική προβολή	58
3.4.3 Πολική επίπεδη ισοδύναμη προβολή - Lambert	60
3.4.4 Πολική γνωμονική προβολή	62
3.4.5 Πολική ορθογραφική προβολή	64
3.5 Εγκάρσιες απεικονίσεις	66
3.5.1 Εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή - Cassini	67
3.5.2 Εγκάρσια Μερκατορική προβολή	68
3.6 Πλάγιες απεικονίσεις	72
3.6.1 Πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή - Hatt	72
3.7 Βιβλιογραφία	76
Κεφάλαιο 4-ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ	77
4.1 Εισαγωγή στα Ελληνικά χαρτογραφικά συστήματα	77
4.2 Σύστημα Hatt	77
4.3 Σύστημα UTM-6°	79
4.4 Σύστημα ΕΜΠ-3°	79
4.5 Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς - ΕΓΣΑ'87	80
4.6 Μετατροπές μεταξύ διαφορετικών προβολικών συστημάτων	80
4.7 Βιβλιογραφία	84

ΜΕΡΟΣ Β' ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	87
Κεφάλαιο 5-ΧΑΡΤΟΜΕΤΡΙΑ	89
5.1 Η έννοια της χαρτομετρίας	89
5.1.1 Εφαρμογές της χαρτομετρίας στις επιστήμες	90
5.1.2 Η χαρτομετρία στην πλοήγηση	91
5.1.3 Η χαρτομετρία στη διοίκηση	92
5.2 Η έννοια του μέσου	93
5.2.1 Ο χάρτης ως μέσο	93
5.2.2 Μετρητικοί και μη μετρητικοί χάρτες	94
5.3 Η γεωμετρία του μέσου μέτρησης	95
5.3.1 Το σχήμα της γης για τις ανάγκες της χαρτομετρίας	95
5.3.2 Η γεωμετρία του χάρτη	96
5.4 Μέθοδοι μέτρησης χαρτομετρίας	97
5.5 Μέτρηση μηκών	98
5.5.1 Μέτρηση ευθυγράμμιου τμήματος	98
5.5.2 Μέτρηση με υποδιαιρέσεις ίσου βήματος	100
5.5.3 Μέτρηση με υποδιαιρέσεις άνισου βήματος	101
5.5.4 Μέτρηση αποστάσεων με ψηφιοποιητή	101
5.5.5 Κλασικές μέθοδοι συνεχούς μέτρησης	102
5.6 Μέθοδοι μέτρησης εμβαδού επιφανειών	102
5.6.1 Μετρήσεις εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων	103
5.6.2 Υπολογισμός εμβαδού με συντεταγμένες	104
5.6.3 Μέτρηση επιφανειών συγκρίνοντας με σταθερά σχήματα	104
5.6.4 Μέθοδος τετραγωνικού καννάβου	105
5.6.5 Μέθοδοι τετραγωνικού καννάβου με κουκίδες	107
5.6.6 Άμεση μέθοδος μέτρησης εμβαδού με κουκίδες	107
5.6.7 Έμμεση μέθοδος μέτρησης εμβαδού με κουκίδες	108
5.6.8 Μέθοδος των λωρίδων	109
5.6.9 Μέτρηση επιφανειών με εμβαδόμετρο	110
5.7 Υπολογισμοί όγκων	110
5.8 Σχέση μεταξύ μετρήσεων και κλίμακας	112
5.8.1 Σχέση μεταξύ κλίμακας και αναπτύγματος ακανόνιστων γραμμών	114
5.8.2 Η ε-κυκλική περιοχή και αναπτύγματα γραμμών	115
5.8.3 Αναπτύγματα ακανόνιστων γραμμών και κλασματική γεωμετρία	116
5.9 Στατιστικά δείγματα και χαρτομετρία	118
5.9.1 Οι ιδιότητες των στατιστικών δειγμάτων	120
5.9.2 Ένα πείραμα δειγματοληψίας μετρήσεων	120

5.9.3 Το μέγεθος ενός στατιστικού δείγματος	125
5.10 Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων	127
5.11 Βιβλιογραφία	127
Κεφάλαιο 6-ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ	129
6.1 Εισαγωγή	129
6.2 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής	129
6.3 Διαγράμματα και συνέχεια	132
6.4 Παράγωγοι και ομαλότητα	134
6.5 Πολυωνυμικές συναρτήσεις	135
6.6 Προσαρμογή καμπύλων με πολυώνυμα	136
6.6.1 Πολυωνυμική παρεμβολή	136
6.6.2 Υπολογισμός πολυωνυμικών τελεστών παρεμβολής	139
6.6.3 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	140
6.6.4 Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων	142
6.7 Εξομάλυνση ή προσδιορισμός επιφάνειας τάσης	143
6.8 Βιβλιογραφία	144
Κεφάλαιο 8-ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΚΙΑΣΗΣ ΑΝΑΓΛΥΦΟΥ	145
8.1 Εισαγωγή	145
8.2 Βασικές αρχές απόδοσης της σκίασης του ανάγλυφου	146
8.3 Αλγόριθμοι αναλυτικού προσδιορισμού της σκίασης του ανάγλυφου	149
8.3.1 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με τμηματική γραμμική προσέγγιση του Peucker	150
8.3.2 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με προσαρμογή της φωτεινής πηγής του Brassel	151
8.3.3 Μαθηματικό μοντέλο σκιάς	152
8.3.4 Αλγόριθμος κατοπτρικής αντανάκλασης	153
8.3.5 Αλγόριθμος κεκλιμένων καμπυλών του Tanaka	154
8.3.6 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του Wiechel	155
8.3.7 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του Marsik	156
8.4 Διερεύνηση και σύγκριση αλγορίθμων	157
8.5 Η σκίαση του ανάγλυφου σε χαρακτηριστικές χαρτογραφικές εφαρμογές	160
8.6 Συμπεράσματα	163
8.7 Βιβλιογραφία	163

Κεφάλαιο 9-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	165
9.1 Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί	165
9.1.1 Μετασχηματισμός μετάθεσης	166
9.1.2 Μετασχηματισμός στροφής	167
9.1.3 Μετασχηματισμός κλίμακας	168
9.1.4 Μετασχηματισμός ομοιότητας	168
9.1.5 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός	170
9.1.6 Οδηγίες εφαρμογής γεωμετρικών μετασχηματισμών	171
9.2 Τομή ευθυγράμμων τμημάτων	171
9.3 Χωρικές ιδιότητες διακριτών σημείων	176
9.3.1 Βαρύκεντρο	176
9.3.2 Τυπική απόσταση	177
9.3.3 Ανίχνευση σημείων εντός/εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου	178
9.3.4 Διάγραμμα Voronoi	179
9.4 Τοπολογικές απεικονίσεις	180
9.4.1 Αξιμουθιακή ισόχρονη απεικόνιση	181
9.4.2 Εστιακές απεικονίσεις	182
9.4.3 Πολυ-εστιακές απεικονίσεις	186
9.5 Βιβλιογραφία	188
 10. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ	 191
10.1 Εισαγωγή	191
10.2 Βασικά στοιχεία της γενίκευσης	191
10.2.1 Το πρόβλημα αλλαγής της κλίμακας	191
10.2.2 Ορισμοί της γενίκευσης	193
10.2.3 Κίνητρα για γενίκευση	195
10.3 Οι διαφορετικές όψεις της γενίκευσης	196
10.3.1 Γενίκευση μοντέλου δεδομένων	197
10.3.2 Χαρτογραφική γενίκευση	197
10.4 Γεωμετρικοί τελεστές γενίκευσης	198
10.4.1 Απλοποίηση	199
10.4.2 Εξομάλυνση	200
10.4.3 Συγχώνευση σημειακών συμβόλων	200
10.4.4 Συγχώνευση γραμμικών συμβόλων	201
10.4.5 Συγχώνευση επιφανειακών συμβόλων	202
10.4.6 Μετάπτωση	202
10.4.7 Εκλέπτυνση	203
10.4.8 Μεγέθυνση	204
10.4.9 Ενίσχυση	205

10.4.10 Μετάθεση	206
10.5 Βασικοί αλγόριθμοι γενίκευσης	207
10.5.1 Επιλογή/απαλοιφή γραφικών αντικειμένων	207
10.5.2 Απλοποίηση γραμμών	209
10.5.3 Αλγόριθμοι ανεξαρτήτων σημείων	211
10.5.4 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας	212
10.5.5 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας με δεσμεύσεις	212
10.5.6 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας χωρίς δεσμεύσεις	213
10.5.7 Καθολικοί αλγόριθμοι	214
10.6 Το πρόβλημα της επικάλυψης των γραφικών αντικειμένων κατά τη γενίκευση	216
10.7 Βιβλιογραφία	218
 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ)	219
Π.1 Εισαγωγή	219
Π.2 Σειρές χαρτών Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού	219
Π.2.1 Χάρτες μικρής κλίμακας	220
Π.2.2 Χάρτες μεσαίας κλίμακας	220
Π.2.3 Χάρτες μεγάλης κλίμακας	220
Π.3 Σειρές χαρτών Υδρογραφικής Υπηρεσίας Πολεμικού Ναυτικού	221
Π.4 Σειρές χαρτών Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας	221
Π.5 Χάρτες Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας	221
Π.5 Χάρτες Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων	222
Π.7 Βιβλιογραφία	222

Πρόλογος

Τα τελευταία 35 χρόνια συντελέστηκαν ραγδαίες εξελίξεις στην περιοχή της χαρτογραφίας, με την ανάπτυξη της ψηφιακής χαρτογραφίας, της χαρτογραφικής επικοινωνίας και της αναλυτικής χαρτογραφίας. Η ανάπτυξη της τελευταίας εκφράζει την προσπάθεια δημιουργίας μιας συμπαγούς βάσης αναλυτικής χαρτογραφικής θεωρίας, σήμερα δε έχει εξελιχθεί σε μια βασική περιοχή χαρτογραφικής έρευνας και αποτελεί τον πυρήνα των θεωρητικών αρχών που διέπουν την τεχνολογία των Συστημάτων Γεωγραφικών Πληροφοριών (ΣΓΠ). Η εξέλιξη αυτή θεωρείται αρκετά σημαντική, γιατί υπήρξε και ίσως ακόμα υπάρχει σήμερα μια τάση αναγνώρισης των επιτευγμάτων της τεχνολογίας και αγνόησης της ουσιαστικής προόδου της αναλυτικής θεωρίας, που όμως είναι απαραίτητη για την εξασφάλιση μακροχρόνιων επιστημονικών επιτευγμάτων.

Η αναλυτική χαρτογραφία έχει τις ρίζες της στην επιστημονική μελέτη και έρευνα από πολύ παλιά. Ο όρος μαθηματική χαρτογραφία αναφερόταν κυρίως στη δημιουργία και μελέτη των χαρτογραφικών προβολών, μια επιστημονική περιοχή που απασχόλησε τους ερευνητές για πολλούς αιώνες, από την αρχή δημιουργίας της χαρτογραφίας, έως σήμερα. Από την άλλη μεριά, οι αναλυτικές μέθοδοι στη μελέτη των χωρικών δεδομένων αποτελούσαν τρόπο προσέγγισης των αντικειμένων έρευνας στη γεωγραφία και στις άλλες γεωεπιστήμες, από πολλές δεκαετίες. Η ιδέα του συνδυασμού μαθηματικών και αναλυτικών μεθόδων για την επίλυση χαρτογραφικών προβλημάτων ανήκει στον W. R. Tobler, καθηγητή στο πανεπιστήμιο του Michigan τη δεκαετία του 1960. Ο Tobler ανέπτυξε τον κλάδο αυτό ερευνητικά και εκπαιδευτικά και για το λόγο αυτό θεωρείται πατέρας της αναλυτικής χαρτογραφίας. Η δουλειά του Tobler συνεχίστηκε και σε ερευνητικό αλλά και σε ακαδημαϊκό επίπεδο και σήμερα υπάρχει ένα ευρύ φάσμα χαρτογραφικών θεμάτων τα οποία αποτελούν δυναμικά αντικείμενα μελέτης και έρευνας και εντάσσονται στον τομέα της αναλυτικής χαρτογραφίας. Σύμφωνα με έναν πρόσφατο ορισμό, η αναλυτική χαρτογραφία περιέχει τις μαθηματικές έννοιες και μεθόδους που υποστηρίζουν τη χαρτογραφία και εξετάζει τις εφαρμογές τους στην παραγωγή χαρτών και στην επίλυση γεωγραφικών προβλημάτων. Πιο αναλυτικά στα θέματα μελέτης και έρευνας της αναλυτικής χαρτογραφίας θεωρείται ότι ανήκουν οι επιστημονικές περιοχές των χαρτογραφικών προβολών, των παρεμβολών, της γενίκευσης, της δημιουργίας

ψηφιακών μοντέλων εδάφους, της αυτόματης τοποθέτησης ονοματολογίας στους χάρτες, της επεξεργασίας χωρικών δεδομένων κλπ.

Η έκδοση αυτή αποτελεί βασικό εκπαιδευτικό βοήθημα του υποχρεωτικού μαθήματος *Χαρτογραφία II* της Σχολής Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών. Το πρώτο μέρος της έκδοσης εστιάζεται στη μελέτη των χαρτογραφικών απεικονίσεων από την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή μιας σφαίρας στο επίπεδο, καθώς επίσης και των παραμορφώσεων που συνοδεύουν τη διαδικασία αυτή. Στη συνέχεια, περιγράφονται τα προβολικά συστήματα που αναφέρονται στον Ελληνικό χώρο. Στο παρελθόν το πεδίο αυτό της χαρτογραφίας διδάσκονταν μέσα από το μάθημα επιλογής της Μαθηματικής Χαρτογραφίας.

Στο δεύτερο μέρος της έκδοσης εξετάζεται η χαρτογραφία από την οπτική των χαρτογραφικών μετασχηματισμών. Στην αρχή, αναλύονται οι μέθοδοι με τις οποίες αντλούνται ποσοτικές και ποιοτικές πληροφορίες από τους χάρτες, μια διεργασία που στη χαρτογραφία ονομάζεται χαρτομετρία. Αρχικά εξετάζονται οι τρόποι μέτρησης μηκών, εμβαδού και προσδιορισμού όγκων από χάρτες. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα σφάλματα που συνοδεύουν τις παραπάνω μετρήσεις και διερευνάται η σχέση μεταξύ των μετρήσεων και κλίμακας του χάρτη. Τέλος, αναλύονται οι συνιστώσες της διαδικασίας της χωρικής δειγματοληψίας. Στην επόμενη ενότητα, εξετάζονται οι βασικές αρχές της μαθηματικής διαδικασίας μονοδιάστατης παρεμβολής για την ανάγκη της προσαρμογής καμπύλων γραμμών στη χαρτογραφία. Ακολουθεί μια ολοκληρωμένη παρουσίαση των υφιστάμενων χαρτογραφικών μεθόδων αναλυτικού προσδιορισμού της σκίασης του ανάγλυφου. Περιγράφονται οι κυριότεροι αλγόριθμοι υπολογισμού της σκίασης, όταν είναι διαθέσιμη η καταγραφή του ανάγλυφου με τη μορφή ενός ψηφιακού μοντέλου υψομέτρων. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στα στοιχεία εκείνα της γεωμετρίας που είναι απαραίτητα για την εφαρμογή των χαρτογραφικών μετασχηματισμών. Στην ενότητα αυτή εξετάζονται γεωμετρικοί μετασχηματισμοί δίνοντας έμφαση στο μετασχηματισμό ομοιότητας και τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό που χρησιμοποιούνται σε πολλές χαρτογραφικές εφαρμογές. Αναλύονται οι βασικότεροι αλγόριθμοι επίλυσης του προβλήματος της αλληλοτομίας γραφικών αντικειμένων στο επίπεδο. Τέλος, παρουσιάζονται ειδικές κατηγορίες προβολών που βασίζονται σε γεωμετρικές αρχές και χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές απεικόνισης τοπολογικά μετασχηματισμένου γεωγραφικού χώρου. Στην τελευταία ενότητα, περιγράφονται οι βασικότεροι τελεστές και αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στη χαρτογραφία για τη γενίκευση χαρτογραφικών αντικειμένων. Η ενότητα ολοκληρώνεται με αναφορά στις σύγχρονες μεθόδους αντιμετώπισης του προβλήματος της άρσης πιθανών γραφικών συμπτώσεων των συμβόλων λόγω της μετάθεσης που υφίστανται κατά τη διαδικασία της γενίκευσης, οι οποίες προκαλούν οπτική σύγχυση.

Η μελέτη των χαρτογραφικών απεικονίσεων όπως παρατίθεται στην έκδοση αυτή κράτησε ως οδηγό και βασικό βοήθημα τις σημειώσεις του

μαθήματος της Μαθηματικής Χαρτογραφίας που συνέθεσε ο ομότιμος καθηγητής του ΕΜΠ κ. Γ. Βέης. Επιπλέον, η έκδοση βασίζεται σε μια μακροχρόνια συνεργασία του συγγραφέα με την καθηγήτρια της Σχολής κ. Β. Φιλιππακοπούλου. Ειδικότερα, τα κεφάλαια της χαρτομετρίας και της μαθηματικής διαδικασίας της παρεμβολής διαμορφώθηκαν με δική της συμβολή. Πέρα όμως από αυτό η συνεργασία μαζί της καθόρισε τη συνολική διαμόρφωση της έκδοσης και ως προς το σχεδιασμό του περιεχομένου της ύλης αλλά και ως προς τον τρόπο απόδοσής του. Το κεφάλαιο της απεικόνισης της σκίασης του ανάγλυφου βασίζεται σε ερευνητική συνεργασία με τον υποψήφιο διδάκτορα της Σχολής κ. Ν. Τζελέπη. Τέλος, σημαντική ήταν η συμβολή της διδάκτορος της Σχολής κ. Ε. Μιχαηλίδου στον εντοπισμό των εκφραστικών ατελειών ή παροραμάτων.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθεται η σχετική με αυτό βιβλιογραφία, στην οποία μπορεί να ανατρέξει κάθε ενδιαφερόμενος. Λόγω του μεγάλου αριθμού των σχέσεων που παρατίθενται, είναι πιθανό να έχουν παραμείνει ορισμένα παροράματα, η συνεργασία σας για τον εντοπισμό τους και τη διόρθωσή τους είναι ευπρόσδεκτη. Επίσης ευπρόσδεκτες είναι όσες άλλες παρατηρήσεις αφορούν τη βελτίωση της έκδοσης.

Βύρωνας Νάκος
Καθηγητής, Ε.Μ.Π.
Αθήνα, Οκτώβριος 2006

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ
ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ

Κεφάλαιο 1

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

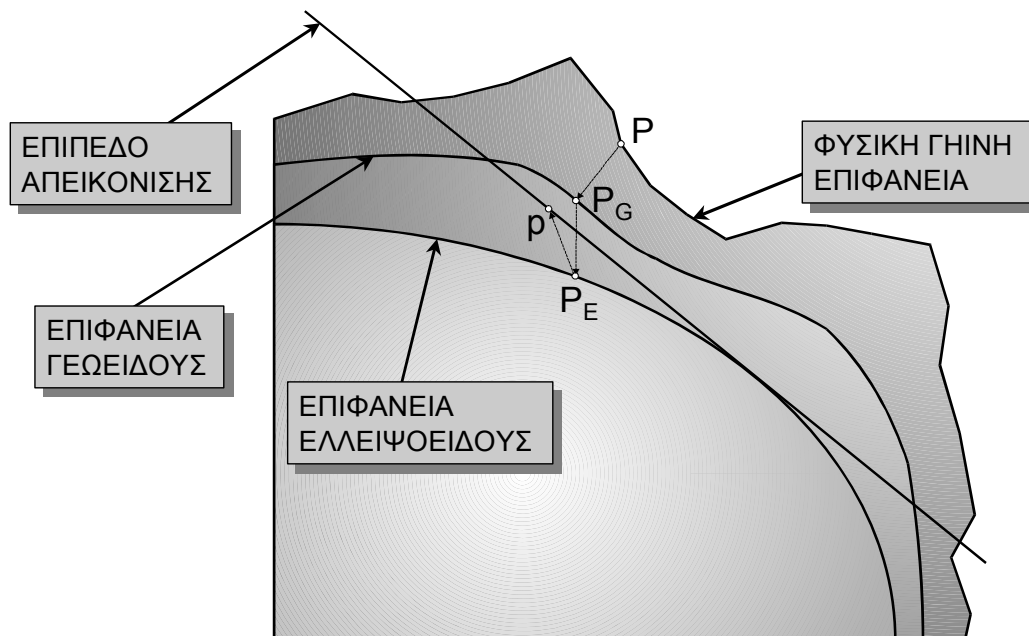
1.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές προβολές

Το αντικείμενο της μελέτης των χαρτογραφικών προβολών ονομάζεται παραδοσιακά μαθηματική χαρτογραφία και ασχολείται με τη μελέτη της απεικόνισης της επιφάνειας της γης πάνω σε ένα επίπεδο, το επίπεδο του χάρτη. Η μελέτη αυτή, της απεικόνισης της γήινης επιφάνειας, έχει θεωρητικό αλλά και πρακτικό χαρακτήρα. Θεωρητικό χαρακτήρα, γιατί ερευνώνται και τεκμηριώνονται όλοι οι δυνατοί τρόποι της απεικόνισης, δηλαδή οι προβολές και οι ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Πρακτικό χαρακτήρα γιατί, με τη βοήθεια του περιεχομένου των χαρτογραφικών προβολών κατασκευάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο του χάρτη, που είναι απαραίτητο για τη σύνθεση οποιουδήποτε χάρτη.

Η έκφραση, όμως, επιφάνεια της γης από μόνη της δεν έχει καμιά μαθηματική σημασία. Οι επιστήμονες από πολύ παλιά ασχολήθηκαν με το να προσεγγίσουν τη μορφή και το μέγεθός της, αξιοποιώντας τις γνώσεις που αναπτύχθηκαν κυρίως από τη γεωμετρία. Η προσέγγιση αυτή πολλές φορές σχηματοποιήθηκε με βάση μια φιλοσοφική θεώρηση όσο αφορά τη μορφή και το μέγεθος της γης. Αφήνοντας την ανάπτυξη της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος για να προσεγγίσει την επιφάνεια της γης στην ενότητα της ιστορίας της χαρτογραφίας, ας δούμε πως το ζήτημα αυτό αντιμετωπίζεται σήμερα.

Στις γεωεπιστήμες η μορφή της γήινης επιφάνειας προσομοιώνεται από μια επιφάνεια, που ονομάζεται **γεωειδές**. Το γεωειδές (Σχήμα 1.1) με έναν απλό τρόπο μπορεί να οριστεί ως η επιφάνεια που διαμορφώνεται από τη μέση στάθμη της θάλασσας και την προέκτασή της στο χώρο που καταλαμβάνουν οι ήπειροι. Μια εικόνα του γεωειδούς μπορεί να έχει κάποιος, αν θεωρήσει ότι «κόβει» όλα τα βουνά των ηπείρων που εξέχουν από τη γήινη επιφάνεια και τα «ρίξει» στις θάλασσες με τρόπο ώστε να σχηματιστεί μια σχετικά ομαλή μορφή. Το γεωειδές στην πραγματικότητα είναι μια πολύπλοκη επιφάνεια και δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί με ένα απλό μαθηματικό (γεωμετρικό) μοντέλο. Ο προσδιορισμός

του γεωειδούς αποτελεί ένα από τα βασικότερα αντικείμενα για την επιστήμη της γεωδαισίας.



Σχήμα 1.1 Φυσική γήινη επιφάνεια, γεωειδές και επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή σφαίρα)

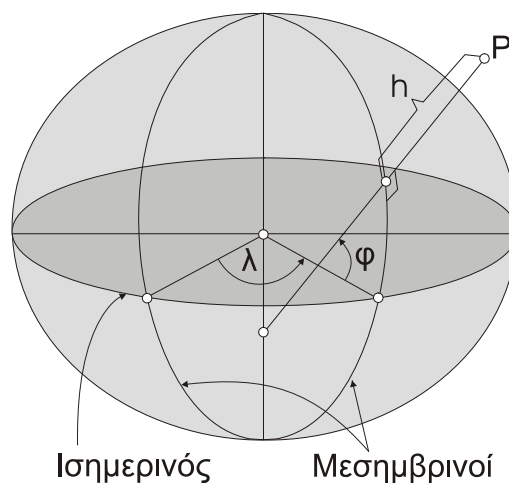
Αντί για το γεωειδές, μπορεί να θεωρήσουμε ότι η μορφή της επιφάνειας της γης είναι μια ομαλότερη επιφάνεια, μια μαθηματική επιφάνεια που το προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα. Μια κατάλληλη επιφάνεια για το σκοπό αυτό είναι η επιφάνεια ενός **ελλειψοειδούς εκ περιστροφής**. Για να φανταστούμε, με ένα σχηματοποιημένο τρόπο, τη μορφή που έχει η επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (Σχήμα 1.1), μπορούμε να θεωρήσουμε μια σφαίρα από ένα ελαστικό μέσο (π.χ. μία μπάλα) την οποίαν πιάζουμε κατά τη διεύθυνση ενός άξονα (τον άξονα περιστροφής της γης). Οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής με επίπεδα που περιέχουν τον άξονα περιστροφής της γης (κατακόρυφα επίπεδα) είναι ελλείψεις, ενώ οι τομές με επίπεδα κάθετα στον άξονα περιστροφής της είναι κύκλοι. Η μελέτη της γεωμετρίας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι αρκετά πολύπλοκη γιατί πρόκειται για επιφάνεια με μεταβαλλόμενη διπλή καμπυλότητα και αντιμετωπίζεται από τον τομέα των μαθηματικών της διαφορικής γεωμετρίας και της θεωρίας επιφανειών.

Στις περιπτώσεις εκείνες, για τις οποίες ένας χάρτης δεν προϋποθέτει υψηλά επίπεδα ακριβειών, είναι δυνατόν η επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής να αντικατασταθεί από την επιφάνεια μιας **σφαίρας**. Η μελέτη της

γεωμετρίας της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι λιγότερο πολύπλοκη, γιατί πρόκειται για επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα.

1.2 Χαρτογραφικό σύστημα αναφοράς

Το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται στη χαρτογραφία είναι το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων (Σχήμα 1.2), που αναφέρεται σε κάποιο από τα ελλειψοειδή που χρησιμοποιούνται στην πράξη ή σε μία σφαίρα. Οι **μεσημβρινοί** κάθε σημείου είναι οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με επίπεδα που περιλαμβάνουν την κάθετο στο σημείο προς την επιφάνεια αναφοράς και τον άξονα περιστροφής, ενώ αντίστοιχα, οι **παράλληλοι** είναι οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με επίπεδα που περιλαμβάνουν το σημείο και είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής οι μεσημβρινοί αποτελούν ελλείψεις ίσες μεταξύ τους ενώ για τη σφαίρα κύκλους. Οι παράλληλοι και στο ελλειψοειδές και στη σφαίρα αποτελούν κύκλοι των οποίων η ακτίνα μειώνεται όσο πλησιάζουμε στους πόλους. Ο παράλληλος που διέρχεται από το κέντρο της γης και είναι σε μέγεθος μεγαλύτερος από όλους τους άλλους, ονομάζεται **ισημερινός**.



Σχήμα 1.2 Σύστημα γεωγραφικών και επιφανειακών συντεταγμένων

Κάθε σημείο του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση προβάλλεται από τη φυσική γήινη επιφάνεια πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας κατά τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια αυτή. Το μήκος της καθέτου, δηλαδή η απόσταση του σημείου από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα, ονομάζεται **γεωμετρικό υψόμετρο** ή απλά **υψόμετρο** (h).

Η θέση της προβολής του σημείου πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας προσδιορίζεται με τη βοήθεια δύο γωνιών. Η γωνία που σχηματίζει η κάθετος από το σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με το επίπεδο του ισημερινού ονομάζεται **γεωγραφικό πλάτος** (φ). Η διέδρη γωνία που σχηματίζεται από το επίπεδο του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο και από έναν αυθαίρετα επιλεγμένο μεσημβρινό ονομάζεται **γεωγραφικό μήκος** (λ). Ο αυθαίρετα επιλεγμένος μεσημβρινός συνήθως είναι ο μεσημβρινός που διέρχεται από το Greenwich. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες μετρώνται σε μοίρες. Το γεωγραφικό πλάτος κυμαίνεται από 0° ως 90° στο βόρειο ημισφαίριο και από 0° ως -90° στο νότιο ημισφαίριο της γης ενώ το γεωγραφικό μήκος κυμαίνεται από 0° ως 360° .

Το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων είναι ουσιαστικά ένα σύστημα επιφανειακών συντεταγμένων για την επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές ή σφαίρα). Το δίκτυο των συντεταγμένων αυτών (σχήμα 1.2) πάνω στο ελλειψοειδές ή τη σφαίρα είναι ένα δίκτυο μεσημβρινών και παραλλήλων. Οι μεσημβρινοί είναι γραμμές με σταθερό γεωγραφικό μήκος ($\lambda=c$) και οι παράλληλοι γραμμές με σταθερό γεωγραφικό πλάτος ($\varphi=c$). Η θέση ενός σημείου πάνω στην επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές ή σφαίρα) ή ακόμα και ενός σημείου που βρίσκεται μεν πάνω στη φυσική γήινη επιφάνεια αλλά έχει προβληθεί πάνω στην επιφάνεια αναφοράς, μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του δικτύου των μεσημβρινών και παραλλήλων, δηλαδή με γραμμικά μεγέθη και όχι γωνιακά. Το αντίστοιχο του γεωγραφικού μήκους θα μετρηθεί ως απόσταση πάνω στον ισημερινό και το αντίστοιχο του γεωγραφικού πλάτους ως απόσταση πάνω στο μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο. Όλες αυτές οι αποστάσεις μετρώνται πάνω στην επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές ή σφαίρα).

1.3 Παραμορφώσεις

Επειδή η επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν είναι αναπτυκτική επιφάνεια, η απεικόνιση πάντα συνοδεύεται από **παραμορφώσεις**. Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να φέρουμε σε επαφή μια ελαστική σφαίρα (μπάλα) με ένα επίπεδο, δεν θα κατορθώσουμε να εφάπτονται όλα τα σημεία της σφαίρας στο επίπεδο παρά μόνον αν την τεντώσουμε ή σχίσουμε, δηλαδή αν την παραμορφώσουμε.

Η μελέτη των παραμορφώσεων γίνεται με τη βοήθεια του τομέα των μαθηματικών της θεωρίας επιφανειών. Η επιφάνεια της γης στη μαθηματική χαρτογραφία προσομοιώνεται από την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής που την προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα. Η γεωμετρία του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι αρκετά πολύπλοκη και κατά συνέπεια το ίδιο πολύπλοκη γίνεται και η μελέτη των παραμορφώσεων στην επιφάνεια αυτή. Αν

προσομοιάσουμε κατά τη μελέτη των παραμορφώσεων την επιφάνεια της γης με την επιφάνεια μιας σφαίρας, τότε μπορούμε να έχουμε μια συστηματική εικόνα των παραμορφώσεων αξιοποιώντας απλές γεωμετρικές αρχές.

Η βασική μελέτη αναφέρεται σε παραμορφώσεις στοιχειωδών μεγεθών αλλά στη χαρτογραφία μας ενδιαφέρουν κυρίως οι παραμορφώσεις που αναφέρονται σε πεπερασμένα μεγέθη. Οι παραμορφώσεις των πεπερασμένων μεγεθών μας χρειάζονται για τη μελέτη της απεικόνισης μεγεθών που βρίσκονται (έχουν μετρηθεί) στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή στην απλούστερη μορφή μιας σφαίρας στο επίπεδο του χάρτη. Μεταφέροντας τα μεγέθη στο επίπεδο της προβολής (απεικόνισης) μπορούμε να κάνουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς εύκολα και απλά, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την Ευκλείδεια και την επίπεδη αναλυτική γεωμετρία. Επίσης, αν αντιστρέψουμε το συλλογισμό, μπορούμε από αποτελέσματα που έχουν προκύψει με υπολογισμούς στο επίπεδο της προβολής (απεικόνισης) να αναχθούμε στα πραγματικά μεγέθη επάνω στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή στη σφαίρα. Οι απαραίτητες αναγωγές για τη μετάβαση μεγεθών από τη φυσική επιφάνεια της γης στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή της σφαίρας και αντίστροφα, είναι αντικείμενο της γεωδαισίας.

1.4 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Θεωρούμε ένα σημείο P πάνω στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (Σχήμα 1.3), που η θέση του ορίζεται από τις γεωγραφικές του συντεταγμένες (φ, λ) . Κοντά στο σημείο P θεωρούμε και ένα δεύτερο σημείο P' με γεωγραφικές συντεταγμένες $(\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda)$.

Ας θεωρήσουμε επίσης, ότι η απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων πάνω στην επιφάνεια αναφοράς είναι dS και ότι το αζιμούθιο της στοιχειώδους γραμμής PP' είναι A . Από τη γεωδαισία γνωρίζουμε ότι το αζιμούθιο μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς είναι η γωνία που σχηματίζεται από το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο και τη γραμμή και μετράται πάντα από το μεσημβρινό και δεξιόστροφα. Θα προσπαθήσουμε, χρησιμοποιώντας απλές γεωμετρικές αρχές, να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν το μέγεθος της στοιχειώδους αυτής γραμμής, δηλαδή, την απόσταση dS καθώς και το αζιμούθιό της A .

Πρώτα, φέρνουμε τους μεσημβρινούς και τους παράλληλους που διέρχονται από τα δύο αυτά σημεία P και P' . Γνωρίζουμε επίσης, ότι η ακτίνα καμπυλότητας ενός μεσημβρινού είναι: ρ και η ακτίνα καμπυλότητας ενός παράλληλου είναι: r , όπου: $r = N \cos \varphi$, με N : την ακτίνα της κυρίας καθέτου τομής σε ένα σημείο και φ : το γεωγραφικό του πλάτος. Η ακτίνα καμπυλότητας του

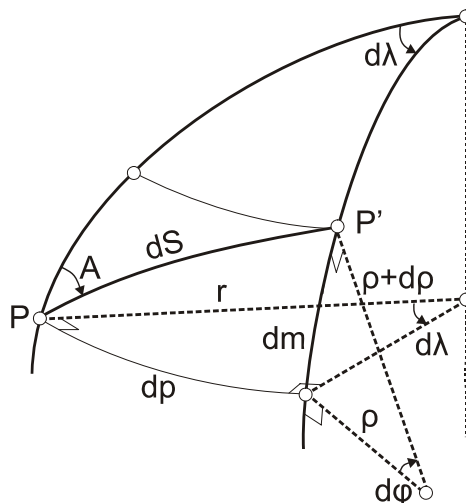
μεσημβρινού (ρ) και η ακτίνα της κυρίας καθέτου (N) είναι γνωστό από τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \text{ και}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

όπου: a ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς και e η πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς που συνδέεται με την επιπλάτυνση του ελλειψοειδούς (f) με τη σχέση:

$$e = \sqrt{2f - f^2}.$$



Σχήμα 1.3 Στοιχειώδης γραμμή στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Η ακτίνα του παράλληλου (r) ενός ελλειψοειδούς μεταβάλλεται ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος του σημείου (φ), δηλαδή στον ισημερινό ($\varphi=0^\circ$) είναι ίση με το μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς και όσο αυξάνει το γεωγραφικό πλάτος μειώνεται και στους πόλους τείνει στο μηδέν.

Οι στοιχειώδεις συνιστώσες της γραμμής κατά μήκος των μεσημβρινών (dm) και των παράλληλων (dp) μεταξύ των δύο σημείων P και P' (Σχήμα 1.3) εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$dm = \rho d\varphi \text{ και}$$

$$dp = r d\lambda \Rightarrow dp = N \cos \varphi d\lambda.$$

Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Σχήμα 1.3) το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής PP' , δηλαδή, η απόσταση dS θα δίνεται από τη σχέση:

$$dS = \sqrt{dm^2 + dp^2},$$

$$\text{ή } dS = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2},$$

$$\text{ή } dS = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}.$$

Από το ίδιο τρίγωνο προκύπτει και η σχέση που εκφράζει το αζιμούθιο A της στοιχειώδους γραμμής PP' , δηλαδή:

$$\tan A = \frac{dp}{dm} \Rightarrow A = \arcsin \frac{dp}{dS} = \arccos \frac{dm}{dS},$$

$$\text{ή } A = \arcsin \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi} = \arccos \frac{\rho d\varphi}{dS}.$$

Τέλος, μεταξύ των μεσημβρινών και των παραλλήλων που διέρχονται από τα σημεία P και P' σχηματίζεται ένα στοιχειώδες χωρίο, το εμβαδόν ($d\Psi$) του οποίου θα εκφράζεται από τη σχέση:

$$d\Psi = dm dp \Rightarrow d\Psi = \rho r d\varphi d\lambda.$$

Στις περιπτώσεις εκείνες που οι απαιτήσεις σε ακρίβειες είναι περιορισμένες, τότε οι σχέσεις απλουστεύονται αν θεωρήσουμε ως επιφάνεια αναφοράς την επιφάνεια της σφαίρας (ακτίνας R). Εύκολα προκύπτει ότι τα αντίστοιχα μεγέθη της στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια της σφαίρας εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$dm = R d\varphi \text{ και}$$

$$dp = R \cos \varphi d\lambda.$$

Οπότε θα έχουμε για το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής (dS) και το αζιμούθιο (A) της:

$$dS = R \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2},$$

$$A = \arcsin \frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi}.$$

Επιπλέον για το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου ($d\Psi$):

$$d\Psi = R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda .$$

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς απεικονίζεται η στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο επίπεδο απεικόνισης, δηλαδή στο επίπεδο του χάρτη.

1.5 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο επίπεδο απεικόνισης

Ο νόμος της απεικόνισης της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο, στη γενική του μορφή θα εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda), \\ y &= y(\varphi, \lambda). \end{aligned}$$

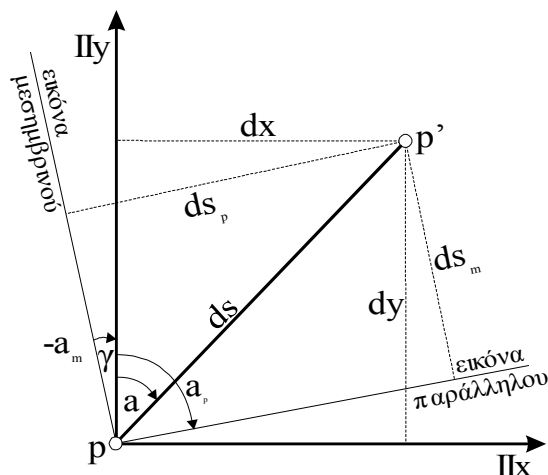
Έτσι λοιπόν, κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που η θέση του ορίζεται από τις γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) θα απεικονίζεται στο επίπεδο του χάρτη σε θέση που θα ορίζεται από τις ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) με τον τρόπο που θα καθορίζει ο νόμος της απεικόνισης.

Οι στοιχειώδεις συνιστώσες κατά τη διεύθυνση του άξονα x (dx) και του άξονα y (dy) στο επίπεδο της απεικόνισης στην πραγματικότητα αποτελούν τα διαφορικά των συναρτήσεων: $x(\varphi, \lambda)$ και $y(\varphi, \lambda)$ που προσδιορίζουν το νόμο της απεικόνισης. Οι στοιχειώδεις αυτές συνιστώσες χρειάζεται να εκφραστούν για να διευκολύνουν τον προσδιορισμό των σχέσεων που θα συνοδεύουν την απεικόνιση μιας στοιχειώδους γραμμής από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο. Επομένως ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda , \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda . \end{aligned}$$

Σύμφωνα λοιπόν, με τον νόμο της απεικόνισης το σημείο P που θεωρήσαμε πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς θα απεικονιστεί στο επίπεδο στο σημείο p και αντίστοιχα το P' στο p' (Σχήμα 1.4). Η στοιχειώδης γραμμή PP' θα απεικονιστεί στο επίπεδο στη γραμμή pp' . Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής pp' στο επίπεδο (ds), δηλαδή, την απόσταση μεταξύ των p και p' καθώς και τη γωνία διεύθυνσης α της γραμμής pp' . Η γωνία διεύθυνσης μιας γραμμής στο επίπεδο είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον

παράλληλο προς τον άξονα y και τη γραμμή και μετράται πάντα δεξιόστροφα με αφετηρία την παράλληλο προς τον άξονα y .



Σχήμα 1.4 Στοιχειώδους γραμμή στο επίπεδο της απεικόνισης

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με τα προηγούμενα το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής στο επίπεδο (ds) θα δίνεται από τη σχέση:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Αν χρησιμοποιηθεί ως βάση η απλή αυτή σχέση και αντικατασταθούν οι στοιχειώδεις συνιστώσες κατά τους άξονες x και y που προηγουμένως προσδιορίστηκαν και εκτελεστούν ορισμένες πράξεις θα προκύψει για το στοιχειώδες μέγεθος της γραμμής pp' στο επίπεδο η παρακάτω έκφραση:

$$ds = \sqrt{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2} ,$$

όπου:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right),$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2.$$

Οι παραστάσεις E , G και F ονομάζονται **θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξεως** και εξαρτώνται από το νόμο της εκάστοτε προβολής (απεικόνισης) και τη θέση στην οποία βρίσκεται η στοιχειώδης γραμμή.

Αν κινηθούμε κατά μήκος ενός μεσημβρινού, δηλαδή το $\lambda=c$ και επομένως: $d\lambda=0$, τότε η στοιχειώδης μετακίνηση κατά μεσημβρινό (ds_m) θα είναι:

$$ds_m = \sqrt{E} d\varphi .$$

Αντίστοιχα, αν κινηθούμε κατά μήκος ενός παραλλήλου, δηλαδή το $\varphi=c$ και επομένως: $d\varphi=0$, τότε η στοιχειώδης μετακίνηση κατά παράλληλο (ds_p) θα είναι:

$$ds_p = \sqrt{G} d\lambda .$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν και οι γωνίες διεύθυνσης στο επίπεδο της απεικόνισης των μεσημβρινών και των παραλλήλων καθώς επίσης και της στοιχειώδους γραμμής pp' . Η γωνία διεύθυνσης (α) της εικόνας μιας στοιχειώδους γραμμής είναι:

$$\alpha = \arctan \frac{dx}{dy} = \arcsin \frac{dx}{ds} = \arccos \frac{dy}{ds} .$$

Αν η γραμμή αυτή είναι μεσημβρινός, τότε η γωνία διεύθυνσης της εικόνας του μεσημβρινού (α_m) θα είναι (με: $\lambda=c$, δηλαδή: $d\lambda=0$):

$$\alpha_m = \arctan \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} : \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \arccos \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} .$$

Αν η γραμμή είναι παράλληλος, τότε η γωνία διεύθυνσης της εικόνας του παράλληλου (α_p) θα είναι (με: $\varphi=c$, δηλαδή: $d\varphi=0$):

$$\alpha_p = \arctan \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \arccos \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} .$$

Η αντίθετη γωνία της διεύθυνσης του μεσημβρινού ($\gamma=-\alpha_m$), δηλαδή αυτή που μετράται από τον μεσημβρινό προς τον άξονα y , έχει μεγάλη χρησιμότητα στη χαρτογραφία και ονομάζεται **σύγκλιση των μεσημβρινών**. Η σύγκλιση των μεσημβρινών είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό της αναγωγής των γωνιών σε αναλυτικά προβλήματα. Η γωνία αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}} \right).$$

Για την εικόνα ενός στοιχειώδους χωρίου ($d\psi$) στο επίπεδο της απεικόνισης λαμβάνοντας υπόψη τις πλευρές του που αποτελούν στοιχειώδεις μετακινήσεις κατά μεσημβρινό (ds_m) και παράλληλο (ds_p), έχουμε:

$$d\psi = ds_m ds_p \sin(\alpha_p - \alpha_m).$$

Αναλύοντας όμως, το ημίτονο της διαφοράς δύο γωνιών σε διαφορά γινομένων των ημιτόνων και συνημιτόνων των γωνιών και αντικαθιστώντας τις σχέσεις που προσδιορίστηκαν πιο πάνω για τις διευθύνσεις των εικόνων του μεσημβρινού και του παράλληλου, προκύπτει:

$$\sin(\alpha_p - \alpha_m) = \frac{J}{\sqrt{EG}}.$$

Η παράσταση J ονομάζεται **ιακωβιανή** και δίνεται από τη σχέση:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις γνωστές ποσότητες στη σχέση της εικόνας ενός χωρίου στο επίπεδο προκύπτει η παρακάτω:

$$d\psi = J d\varphi d\lambda.$$

1.6 Στοιχειώδεις παραμορφώσεις

1.6.1 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης

Η παραμόρφωση του μήκους στοιχειώδους γραμμής μελετάται με τη βοήθεια της **κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης** (m) ή απλώς κλίμακας. Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta S} = \frac{ds}{dS}.$$

όπου: dS είναι το μήκος μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς (Σχήμα 1.3) και ds το μήκος της εικόνας της στο επίπεδο (Σχήμα 1.4). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης αναφέρεται αποκλειστικά και μόνο στην απεικόνιση και δεν έχει καμία σχέση με τη σμίκρυνση την κλίμακα δηλαδή με την οποία σχεδιάζονται οι χάρτες.

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης είναι αδιάστατο μέγεθος και όταν έχει ως τιμή τη μονάδα, τότε το μήκος της στοιχειώδους γραμμής απεικονίζεται στο επίπεδο χωρίς παραμόρφωση. Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης εν γένει μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και σε κάθε σημείο έχει διαφορετική τιμή σε κάθε διεύθυνση.

1.6.2 Κύριες διευθύνσεις- κύριες κλίμακες

Αν θεωρήσουμε μια ορθή γωνία επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και περιστρέψουμε τη γωνία αυτή γύρω από την κορυφή της, τότε εξετάζοντας την εικόνα της γωνίας στο επίπεδο της απεικόνισης θα δούμε ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος προσανατολισμός των πλευρών της που και η εικόνα της είναι ορθή γωνία. Οι κάθετες διευθύνσεις που διατηρούν κάθετες και τις εικόνες τους στο επίπεδο της απεικόνισης ονομάζονται κύριες διευθύνσεις. Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε κάποια θέση, όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα, έχει διαφορετική τιμή σε κάθε διεύθυνση. Οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στις κύριες διευθύνσεις ονομάζονται κύριες κλίμακες και συμβολίζονται με m_1 και m_2 . Οι τιμές των κυρίων κλιμάκων σε κάθε σημείο αποδεικνύεται ότι είναι η μέγιστη ($m_1=\max$) και ελάχιστη ($m_2=\min$) τιμή της κλίμακας παραμόρφωσης στη θέση αυτή.

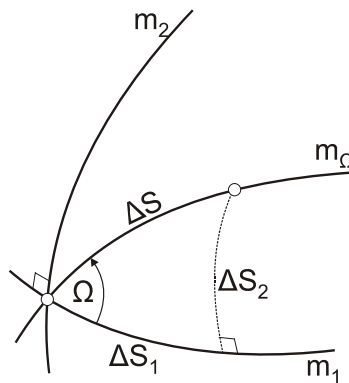
Στις ορθές απεικονίσεις οι κύριες διευθύνσεις είναι πάντα κατά μεσημβρινό και παράλληλο.

1.6.3 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση

Γνωρίζοντας τις τιμές των κυρίων κλιμάκων σε ένα σημείο μιας απεικόνισης μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση Ω (m_Ω). Η διεύθυνση Ω μετράται αριστερόστροφα στο ελλειψοειδές από την κύρια διεύθυνση της μέγιστης κλίμακας (m_1). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$m_{\Omega} = \sqrt{m_1^2 \cos^2 \Omega + m_2^2 \sin^2 \Omega}.$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται εύκολα αναλύοντας μια στοιχειώδη μετακίνηση στις συνιστώσες της ως προς τις κύριες διευθύνσεις και εφαρμόζοντας τον ορισμό της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης για το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5 Τυχαία διεύθυνση στο ελλειψοειδές

Αν οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης είναι ίσες στις δύο κύριες διευθύνσεις ($m_1=m_2$), τότε από τη σχέση αυτή αποδεικνύεται ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης έχει την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε διεύθυνση ($m_{\Omega}=m_1=m_2$).

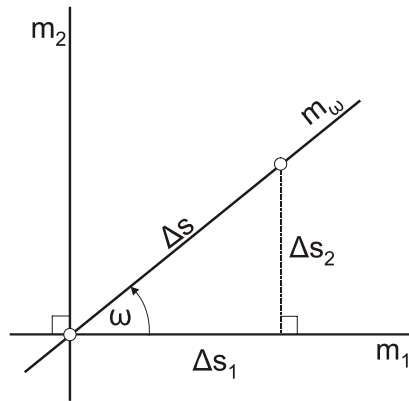
1.6.4 Παραμορφώσεις γωνιών

Αν Ω είναι η γωνία που σχηματίζεται από μία οποιαδήποτε διεύθυνση με την κύρια διεύθυνση της μέγιστης κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης (m_1) και ω η εικόνα της στο επίπεδο (Σχήμα 1.6) τότε, από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται αναλύοντας μια στοιχειώδη μετακίνηση στην τυχαία αυτή διεύθυνση πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και στο επίπεδο απεικόνισης, οι γωνίες Ω και ω συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan \omega = \frac{m_2}{m_1} \tan \Omega.$$

Αξιοποιώντας τη σχέση αυτή, τις ιδιότητες των αναλογιών και ταυτότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)}.$$



Σχήμα 1.6 Τυχαία διεύθυνση στο επίπεδο απεικόνισης

Ορίζοντας λοιπόν ως γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση (ε), τη διαφορά:

$$\varepsilon = \Omega - \omega,$$

τότε αυτή θα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sin \varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin(\Omega + \omega).$$

Αξιοποιώντας την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση (E) θα είναι:

$$\sin E = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Η τιμή αυτή της μέγιστης γωνιακής παραμόρφωσης παρουσιάζεται στη διεύθυνση:

$$\Omega = \frac{\pi}{4} + \frac{E}{2},$$

στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και:

$$\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2},$$

στο επίπεδο της απεικόνισης. Μια γωνία επομένως, μπορεί να παραμορφωθεί μέχρι την τιμή $2E$. Όταν οι κύριες κλίμακες μιας απεικόνισης είναι ίσες, δηλαδή $m_1 = m_2$, τότε η απεικόνιση αυτή δεν θα έχει καμία παραμόρφωση στις γωνίες επειδή:

$$\varepsilon = 0.$$

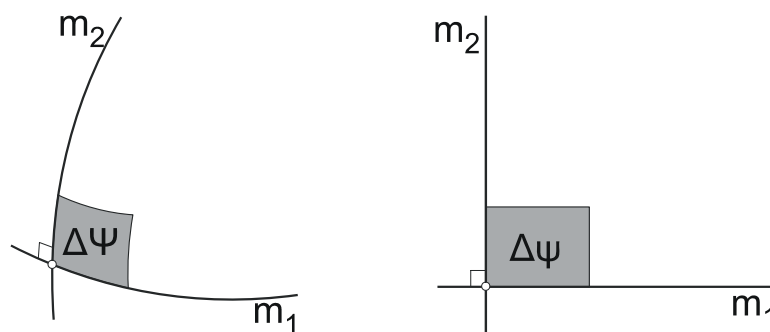
Οι απεικονίσεις που δεν έχουν παραμόρφωση στις γωνίες διατηρούν τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο αναλλοίωτη, οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται **σύμμορφες**.

1.6.5 Κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης

Η παραμόρφωση του εμβαδού στοιχειώδους επιφάνειας μελετάται με τη βοήθεια της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης (M) ή απλώς επιφανειακής κλίμακας. Η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$M = \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta\Psi} = \frac{d\psi}{d\Psi}.$$

όπου: $d\Psi$ είναι το εμβαδόν ενός στοιχειώδους χωρίου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και $d\psi$ το εμβαδόν της εικόνας του στο επίπεδο (Σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7 Στοιχειώδης επιφάνεια στο ελλειψοειδές και το επίπεδο απεικόνισης

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης συνδέεται με τις κύριες κλίμακες μιας απεικόνισης με τη σχέση:

$$M = m_1 m_2.$$

Σε απεικονίσεις που η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης είναι ίση με τη μονάδα ($M=1$) δεν παρουσιάζεται παραμόρφωση στα εμβαδά, δηλαδή διατηρείται το εμβαδόν στοιχειωδών επιφανειών από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο αναλλοίωτο. Οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται **ισοδύναμες**.

1.6.6 Νόμος των παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης για οποιαδήποτε απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής στο επίπεδο. Σε κάποιο σημείο η κλίμακα θα είναι:

$$m = \frac{ds}{dS}.$$

Αν υψώσουμε τη σχέση αυτή στο τετράγωνο και αντικαταστήσουμε σε αυτήν το μήκος μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και το μήκος της απεικόνισής της στο επίπεδο, τότε προκύπτει η σχέση:

$$m^2 = \frac{Ed\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}.$$

Διαιρώντας τη σχέση αυτή με $\rho^2 d\varphi^2$ και επειδή ισχύει:

$$\tan A = \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi},$$

προκύπτει για το τετράγωνο της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης η σχέση:

$$m^2 = \frac{\frac{E}{\rho^2} + \frac{2F}{\rho r} \tan A + \frac{G}{r^2} \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$$

Εξετάζοντας τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης (m) είναι συνάρτηση της θέσης, δηλαδή ισχύει: $m=f(\varphi, \lambda)$, και της διεύθυνσης, άρα: $m=f(A)$. Επειδή λοιπόν, η τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης σε κάποια θέση μεταβάλλεται στις διευθύνσεις γύρω από αυτή τη

θέση, θα υπάρχουν δύο διευθύνσεις που οι τιμές της θα είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε εκείνα τα αζιμούθια A για τα οποία η συνάρτηση m^2 παίρνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Ξεκινάμε μηδενίζοντας την παράγωγο της m^2 ως προς το αζιμούθιο A :

$$\frac{dm^2}{dA} = \tan^2 A - \frac{\frac{G}{r^2} - \frac{E}{\rho^2}}{\frac{F}{\rho r}} \tan A - 1 = 0.$$

Βλέπουμε ότι η παράγωγος είναι ένα τριώνυμο ως προς την εφαπτομένη του αζιμουθίου. Οι ρίζες του τριωνύμου εξετάζοντας τους συντελεστές του έχουν την ιδιότητα:

$$\tan A_1 \tan A_2 = -1,$$

τα αζιμούθια που μηδενίζουν το τριώνυμο βρίσκονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, δηλαδή:

$$A_1 = A_2 + \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

οι διευθύνσεις στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) στις οποίες η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης έχει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι κάθετες μεταξύ τους.

Οι διευθύνσεις αυτές ονομάζονται **κύριες διευθύνσεις**.

Ακολουθώντας ανάλογη πορεία και εξετάζοντας τις απεικονίσεις των κυρίων διευθύνσεων στο επίπεδο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι και:

στο επίπεδο της απεικόνισης οι κύριες διευθύνσεις απεικονίζονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Τα συμπεράσματα αυτά διατυπώνονται στο θεώρημα του Tissot:

Σε κάθε σημείο της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος καθέτων διευθύνσεων οι οποίες και στην απεικόνισή τους παραμένουν κάθετες.

Τέλος, με απλή αντικατάσταση η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης προκύπτει ότι είναι:

$$M = \frac{J}{\rho r}.$$

1.6.7 Έλλειψη παραμόρφωσης. Δείκτης Tissot

Αν θεωρήσουμε πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ένα στοιχειώδη κύκλο με ακτίνα dS , η εξίσωση του κύκλου θα είναι:

$$dm^2 + dp^2 = dS^2.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τα μεγέθη των στοιχειωδών γραμμών κατά μεσημβρινό και παράλληλο, θα έχουμε:

$$\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = dS^2.$$

Ο κύκλος αυτός θα απεικονίζεται στο επίπεδο ως μια κλειστή γραμμή, την οποία θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε.

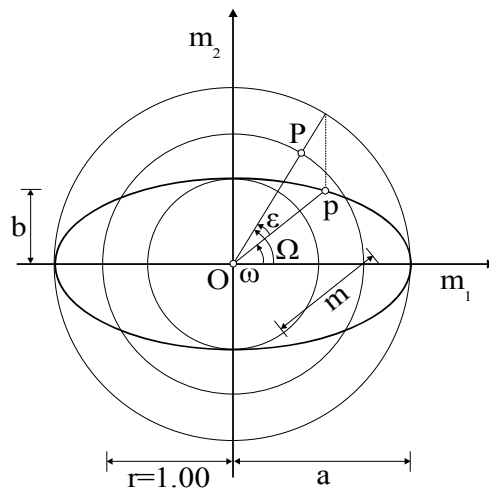
Τα διαφορικά dx και dy του νόμου της απεικόνισης εκφράζουν τις στοιχειώδεις μετακινήσεις στο επίπεδο της απεικόνισης κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x και y . Αν θεωρήσουμε ότι αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους ως προς τα $d\varphi$ και $d\lambda$, θα έχουμε:

$$d\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} dy - \frac{\partial y}{\partial \lambda} dx}{J} \quad \text{και} \quad d\lambda = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} dx - \frac{\partial x}{\partial \varphi} dy}{J},$$

δεδομένου ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ιακωβιανή (J).

Αντικαθιστώντας τα $d\varphi$ και $d\lambda$ στην εξίσωση του κύκλου και εκτελώντας ορισμένες πράξεις, θα έχουμε στο επίπεδο της απεικόνισης ως εικόνα του κύκλου την γραμμή με την εξίσωση:

$$\left[\rho^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] dx^2 + \left[\rho^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \right] dy^2 - 2 \left[r^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \rho^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \right] dx dy = J^2 dS^2.$$



Σχήμα 1.8 Δείκτρια Tissot

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί απλούστερα με την παρακάτω μορφή:

$$a^2 dx^2 + b^2 dy^2 - 2c dx dy = k^2.$$

Είναι όμως γνωστό, ότι η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση μιας έλλειψης, της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας εμφανίζει στροφή ως προς τον άξονα x . Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

κάθε στοιχειώδης κύκλος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) απεικονίζεται στο επίπεδο ως έλλειψη ανεξάρτητα του συγκεκριμένου νόμου της απεικόνισης.

Αν ο στοιχειώδης κύκλος γίνει μοναδιαίος ($dS=1$), τότε η έλλειψη θα μας δίνει μια άμεση εποπτεία των παραμορφώσεων της απεικόνισης (Σχήμα 1.8). Η έλλειψη που αντιστοιχεί σε κύκλο μοναδιαίας ακτίνας είναι γνωστή ως δείκτρια Tissot. Οι ημιάξονες της έλλειψης είναι προσανατολισμένοι στις διευθύνσεις των κυρίων κλιμάκων με το μεγάλο ημιάξονα να είναι ίσος με τη μέγιστη γραμμική κλίμακα (m_1) και το μικρό ημιάξονα αντίστοιχα να είναι ίσος με την ελάχιστη γραμμική κλίμακα (m_2).

1.7 Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών

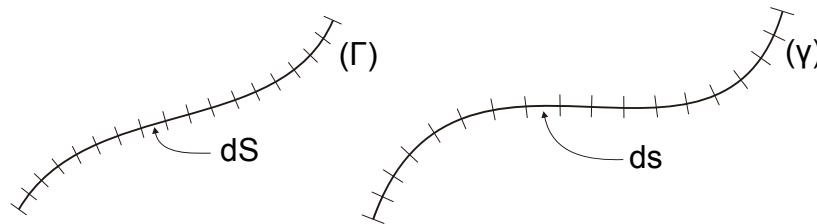
Όλα όσα μελετήθηκαν για τις παραμορφώσεις, αναφέρονται στην απεικόνιση στοιχειωδών μεγεθών από το ελλειψοειδές στο επίπεδο. Στις εφαρμογές όμως,

χρειάζεται πάντα να υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις για πεπερασμένα μεγέθη. Η μελέτη μιας ολοκληρωμένης αντιμετώπισης των παραμορφώσεων πεπερασμένων μεγεθών ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτών των σημειώσεων. Γι' αυτό το λόγο στη συνέχεια του κεφαλαίου θα διατυπωθούν μόνο ορισμένες βασικές αρχές της μελέτης των παραμορφώσεων πεπερασμένων μεγεθών.

1.7.1 Παραμόρφωση μήκους πεπερασμένης γραμμής

Ας θεωρήσουμε μια γραμμή Γ μήκους S πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, τότε η εικόνα της στο επίπεδο της απεικόνισης θα είναι η γ με μήκος s (Σχήμα 1.9). Αξιοποιώντας τη γνωστή σχέση της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης θα έχουμε:

$$ds = m dS.$$



Σχήμα 1.9 Πεπερασμένη γραμμή στο ελλειψοειδές και στο επίπεδο απεικόνισης

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η γραμμή αποτελείται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών γραμμών. Επομένως, το μήκος της γραμμής θα προσδιορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$s = \int_S m dS.$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης (m) είναι συνάρτηση της θέσης και της διεύθυνσης. Το μήκος της πεπερασμένης γραμμής θα δίνεται από τη σχέση:

$$s = \left(\frac{1}{S} \int_S m dS \right) S.$$

Επειδή όμως, η παράσταση που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες αποτελεί τη μέση κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος της γραμμής:

$$\bar{m} = \frac{1}{S} \int_S m \, dS.$$

το μήκος της γραμμής στο επίπεδο της απεικόνισης θα δίνεται από τη σχέση:

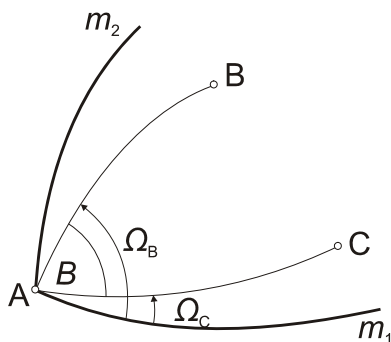
$$s = \bar{m} S.$$

Στην πράξη η μέση κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης προσδιορίζεται προσεγγιστικά, χωρίζοντας τη γραμμή σε τμήματα και υπολογίζοντας τη μέση τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης για κάθε τμήμα.

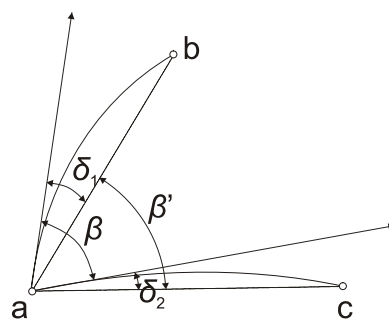
1.7.2 Παραμόρφωση γωνίας

Οι γωνιακές παραμορφώσεις αναφέρονται στις γωνίες που σχηματίζονται από τις εφαπτόμενες των αντίστοιχων γραμμών στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και των εικόνων τους στο επίπεδο της απεικόνισης. Επειδή είναι χρήσιμο στη μελέτη των γωνιακών παραμορφώσεων να αξιοποιηθούν οι απλές σχέσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας στο επίπεδο και δεδομένου ότι οι εικόνες γραμμών της επιφάνειας του ελλειψοειδούς στο επίπεδο είναι εν γένει καμπύλες γραμμές, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ χορδής και εφαπτομένης στα άκρα των γραμμών. Αυτό σημαίνει ότι κάθε γωνία θα πρέπει να διορθώνεται και για τη γωνιακή διαφορά τόξου-χορδής (δ). Έτσι, η γωνία β' που είναι η εικόνα της γωνίας B (Σχήματα 1.10 και 1.11), όπως ορίζεται από τα σημεία: b , a και c στο επίπεδο της απεικόνισης ως εικόνες των σημείων: B , A και C πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, θα είναι:

$$\beta' = B + \varepsilon - \delta_1 + \delta_2, \text{ όπου: } \varepsilon = \beta - B.$$



Σχήμα 1.10 Η γωνία στο ελλειψοειδές



Σχήμα 1.11 Η γωνία στο επίπεδο

Η διόρθωση ε μπορεί να υπολογιστεί από τη διαφορά των διορθώσεων που αντιστοιχούν στις γωνίες διεύθυνσης (Ω_B και Ω_C) των δύο πλευρών της γωνίας στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, δηλαδή:

$$\varepsilon = \varepsilon_B - \varepsilon_C.$$

1.7.3 Σχέση μεταξύ αζιμουθίου και γωνία διεύθυνσης – σύγκλιση των μεσημβρινών

Η μέτρηση των διευθύνσεων στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς γίνεται με τη βοήθεια των αζιμουθίων A , ενώ στο επίπεδο με τις γωνίες διεύθυνσης α . Ως **αζιμούθιο** μιας γραμμής (με άκρα τα σημεία P και Q) στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς σε κάποιο σημείο P, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραμμής στο σημείο αυτό με το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο P. Το αζιμούθιο μετριέται δεξιόστροφα από τη βορεινή φορά του μεσημβρινού μέχρι τη γραμμή. Ως **γωνία διεύθυνσης** μιας γραμμής στο επίπεδο σε κάποιο σημείο p, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της γραμμής στο σημείο αυτό με τη θετική φορά του άξονα y . Η γωνία διεύθυνσης μετριέται δεξιόστροφα από τον άξονα των y προς την εφαπτομένη της γραμμής. Παρατηρώντας τα Σχήματα 1.12 και 1.13 η γωνία A' αποτελεί την εικόνα της γωνίας του αζιμουθίου A στο επίπεδο, επομένως για τη γωνία A' ισχύει:

$$A' = A + \varepsilon,$$

όπου: ε είναι η γωνιακή παραμόρφωση του αζιμουθίου A .

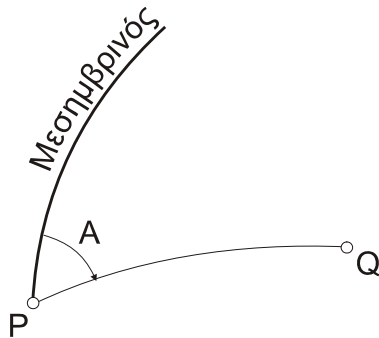
Η γωνία A' όμως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.13, σχηματίζεται από εφαπτόμενες των εικόνων του μεσημβρινού και της γραμμής με άκρα τα σημεία p και q στο επίπεδο, θα δίνεται από τη σχέση:

$$A' = \alpha + \gamma - \delta,$$

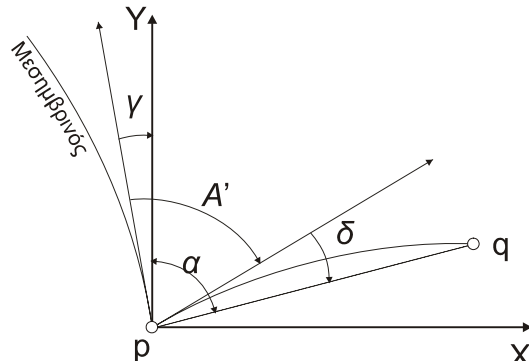
όπου: γ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη θετική φορά του άξονα y και της εφαπτομένης της εικόνας του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο p στο επίπεδο και: δ είναι η διαφορά τόξου-χορδής της γραμμής με άκρα τα σημεία p και q.

Η γωνία γ , που ονομάζεται σύγκλιση μεσημβρινού, έχει οριστεί στην ενότητα 1.5. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις η γωνία διεύθυνσης συνδέεται με τη γωνία του αζιμουθίου ως εξής:

$$\alpha = A - \gamma + \varepsilon + \delta.$$



Σχήμα 1.12 Γωνία αζιμουθίου



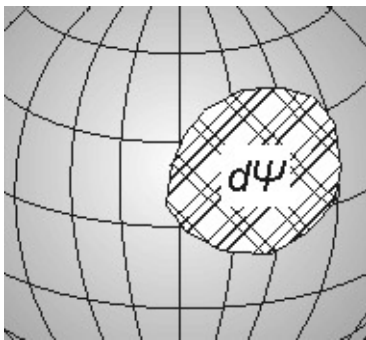
Σχήμα 1.13 Γωνία διεύθυνσης

Με δεδομένο ότι ένας χάρτης απεικονίζει -στις περισσότερες περιπτώσεις- μια περιοχή έκτασης μερικών μοιρών, οι γωνίες ε και δ είναι μικρές όμως η γωνία γ μπορεί να είναι, ανάλογα με την προβολή, μεγαλύτερη από μία μοίρα.

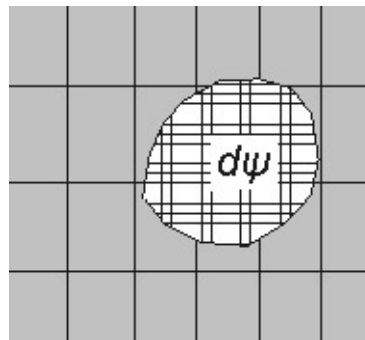
1.7.4 Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου

Ας θεωρήσουμε ένα χωρίο εμβαδού Ψ πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, τότε η εικόνα του χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης θα έχει εμβαδόν ψ (Σχήματα 1.14 και 1.15). Αξιοποιώντας τη γνωστή σχέση της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης θα έχουμε:

$$d\psi = M d\Psi.$$



Σχήμα 1.14 Χωρίο στο ελλειψοειδές



Σχήμα 1.15 Χωρίο στο επίπεδο

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το χωρίο αποτελείται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών χωρίων. Επομένως, το εμβαδόν του θα προσδιορίζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\psi = \int_{\Psi} M d\Psi .$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης (M) είναι συνάρτηση της θέσης και της διεύθυνσης. Το εμβαδόν του χωρίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi = \left(\frac{1}{\Psi} \int_{\Psi} M d\Psi \right) \Psi .$$

Επειδή όμως, η παράσταση που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες αποτελεί τη μέση κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης κατά την έκταση του χωρίου θα έχουμε:

$$\overline{M} = \frac{1}{\Psi} \int_{\Psi} M d\Psi .$$

και το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi = \overline{M} \Psi .$$

Στην πράξη η μέση κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης προσδιορίζεται προσεγγιστικά, χωρίζοντας το χωρίο σε στοιχειώδεις επιφάνειες και υπολογίζοντας τη μέση τιμή της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης για κάθε στοιχειώδη επιφάνεια.

1.8 Βιβλιογραφία

- Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.
- Cuenin, R. *Cartographie Generale*. Tome 1. Editions Eyrolles, Paris, 1972, p. 324.
- Maling, D.H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.
- Νάκος, Β. και Β. Φιλιππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.
- Richardus, P. and R.K. Adler. *Map projections*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1972, p. 174.

Thomas, P.D. *Conformal projections in geodesy and cartography*. U.S. Department of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication No 251. Washington, 1952, p. 142.

Κεφάλαιο 2

2. ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ - ΠΡΟΒΟΛΩΝ

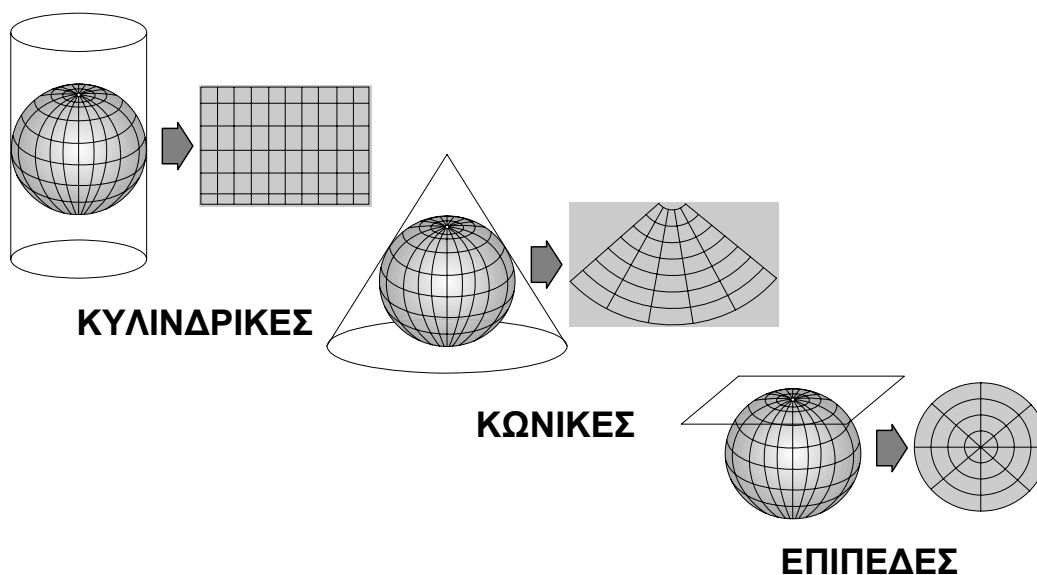
2.1 Εισαγωγή στις αρχές των απεικονίσεων

Οι απεικονίσεις στη χαρτογραφία αναφέρονται στην προβολή ή απεικόνιση της επιφάνειας αναφοράς, δηλαδή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) στο επίπεδο, δηλαδή στο επίπεδο του χάρτη. Η απεικόνιση αυτή πάντα συνοδεύεται από παραμορφώσεις. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να επινοήσουμε τρόπους απεικόνισης που να διατηρούν ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες των χωρικών οντοτήτων αναλλοίωτες (για παράδειγμα: τα εμβαδά ή τις γωνίες ή τα μήκη σε ορισμένες όμως διευθύνσεις), αλλά είναι αδύνατο να παραμένουν ταυτόχρονα όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες αναλλοίωτες.

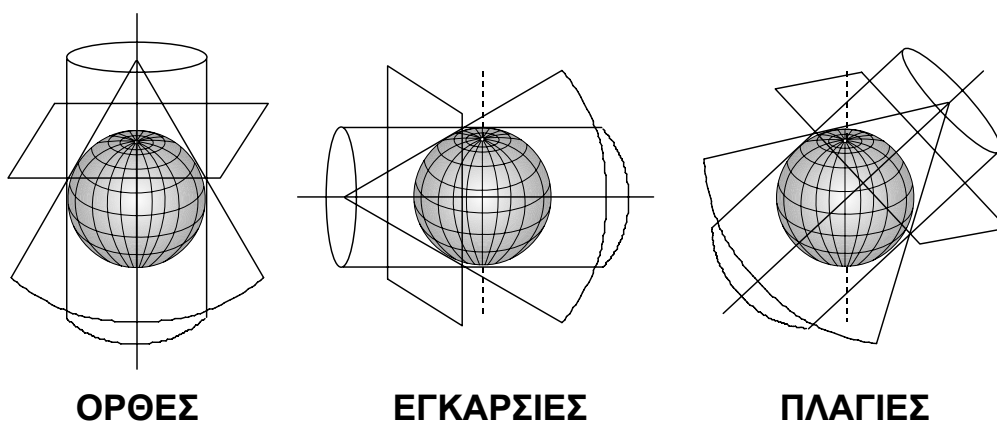
2.2 Βασικές αρχές απεικονίσεων-προβολών

Η απεικόνιση αντί να γίνει απ' ευθείας στην επιφάνεια ενός **επιπέδου**, μπορεί να γίνει πρώτα πάνω σε μια αναπτυκτική επιφάνεια και στη συνέχεια αυτή να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Τέτοιες κατάλληλες αναπτυκτές επιφάνειες είναι η παράπλευρη επιφάνεια ενός **κυλίνδρου** ή ενός **κώνου** (Σχήμα 2.1). Οι απεικονίσεις λοιπόν, ανάλογα με την αναπτυκτική επιφάνεια που χρησιμοποιούμε, ονομάζονται κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες ή αζιμουθιακές.

Ανάλογα με τον προσανατολισμό του κυλίνδρου, του κώνου ή του επιπέδου σε σχέση με την επιφάνεια αναφοράς (έλλειψοειδές εκ περιστροφής ή σφαίρα) οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: **ορθές**, **εγκάρσιες** και **πλάγιες** (Σχήμα 2.2). Ορθές ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυκτικής επιφάνειας ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής της γης. Εγκάρσιες ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυκτικής επιφάνειας είναι κάθετος με τον άξονα περιστροφής της γης. Πλάγιες, τέλος, ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυκτικής επιφάνειας σχηματίζει τυχαία γωνία με τον άξονα περιστροφής της γης.



Σχήμα 2.1 Κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες απεικονίσεις



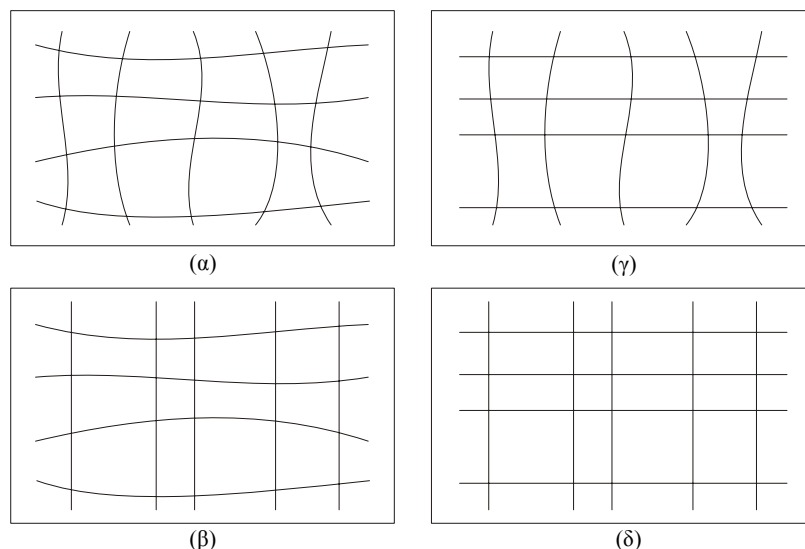
Σχήμα 2.2 Ορθές, εγκάρσιες και πλάγιες απεικονίσεις

Οι απεικονίσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με καθαρά γεωμετρικούς τρόπους. Αρκεί να προβάλλουμε τα σημεία του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας σε ένα επίπεδο ή σε μια αναπτυκτική επιφάνεια. Γι' αυτό το λόγο άλλωστε πολλές φορές χρησιμοποιούμε και τον όρο προβολή. Η προβολή αυτή μπορεί να είναι κεντρική ή παράλληλη. Στις περισσότερες περιπτώσεις μια κεντρική προβολή απεικονίζει μονοσήμαντα μόνο ένα μέρος του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας, για παράδειγμα μόνο το ένα ημισφαίριο. Η απεικόνιση όμως μπορεί να πραγματοποιηθεί και με καθαρά αναλυτικό τρόπο, χωρίς να προέρχεται από

γεωμετρική προβολή, ή και να προκύψει από συνδυασμό αναλυτικής και γεωμετρικής μεθόδου.

Στο ελλειψοειδές ή τη σφαίρα συνήθως χρησιμοποιούμε ως σύστημα αναφοράς το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ, λ) , ενώ στο επίπεδο ένα σύστημα ορθογωνίων (x, y) ή πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) . Κάθε απεικόνιση ορίζεται με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων f, g οι οποίες και καθορίζουν τις παραμορφώσεις των γεωμετρικών μεγεθών από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα στο επίπεδο. Επομένως, ο νόμος κάθε απεικόνισης ή προβολής εκφράζεται από τις σχέσεις:

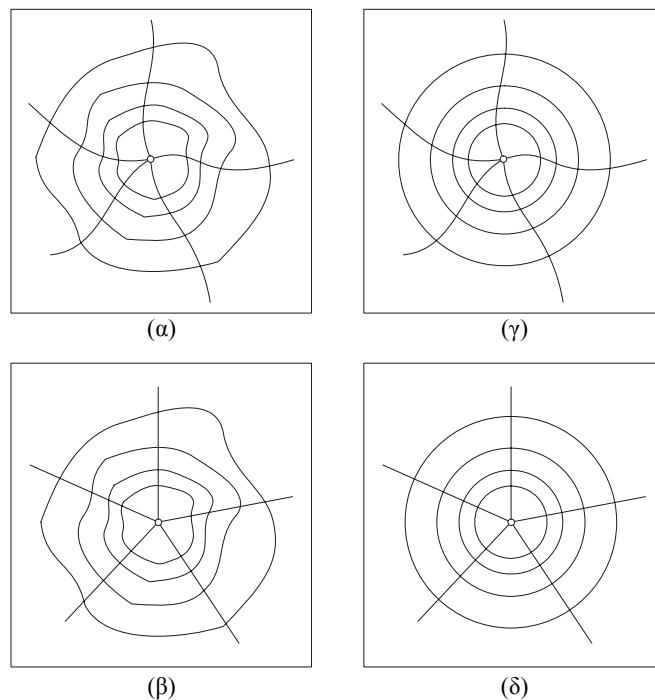
$$x = f(\varphi, \lambda) \text{ και} \\ y = g(\varphi, \lambda).$$



Σχήμα 2.3 Εικόνες μεσημβρινών και παραλλήλων γενικών περιπτώσεων απεικονίσεων που ορίζονται με ορθογώνιες συντεταγμένες

Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων, που αποτελούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις συναρτήσεων f και g ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x, y) για το χάρτη. Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 2.3α) έχουμε τη γενική μορφή μιας προβολής. Δηλαδή, οι σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση είναι: $x=f(\varphi, \lambda)$ και $y=g(\varphi, \lambda)$ και οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων είναι εν γένει καμπύλες γραμμές. Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 2.3β) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει: $x=f(\lambda)$ και $y=g(\varphi, \lambda)$. Δηλαδή, όταν η συντεταγμένη: x είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού μήκους, τότε οι εικόνες των μεσημβρινών αποτελούν μια παράλληλη δέσμη ευθειών. Στην τρίτη περίπτωση

(Σχήμα 2.3γ) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει: $x=f(\varphi,\lambda)$ και $y=g(\varphi)$. Δηλαδή, όταν η συντεταγμένη: y είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού πλάτους, τότε οι εικόνες των παραλλήλων αποτελούν μια παράλληλη δέσμη ευθειών. Τέλος, όταν ισχύει: $x=f(\lambda)$ και $y=g(\varphi)$, τότε και οι μεσημβρινοί αλλά και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών (Σχήμα 2.3δ). Η τελευταία αυτή περίπτωση αναφέρεται στις ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις.



Σχήμα 2.4 Εικόνες μεσημβρινών και παραλλήλων γενικών περιπτώσεων απεικονίσεων που ορίζονται με πολικές συντεταγμένες

Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων χαρακτηριστικών περιπτώσεων συναρτήσεων f και g ως προς ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, θ) για το χάρτη. Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 2.4α) έχουμε τη γενική μορφή μιας προβολής. Δηλαδή, όταν οι σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση είναι: $\rho=f(\varphi,\lambda)$ και $\theta=g(\varphi,\lambda)$ τότε εικόνες των παραλλήλων είναι κλειστές καμπύλες γραμμές και των μεσημβρινών κεντρική δέσμη καμπύλων γραμμών. Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 2.4β) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει: $\rho=f(\varphi,\lambda)$ και $\theta=g(\lambda)$. Δηλαδή, η πολική γωνία: θ είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού μήκους, τότε οι εικόνες των μεσημβρινών αποτελούν μια κεντρική δέσμη ευθειών. Στην τρίτη περίπτωση (Σχήμα 2.4γ) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και

παραλλήλων όταν ισχύει: $\rho=f(\varphi)$ και $y=g(\varphi,\lambda)$. Δηλαδή, η πολική ακτίνα: ρ είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού πλάτους, τότε οι εικόνες των παραλλήλων αποτελούν ομόκεντρους κύκλους. Τέλος, όταν ισχύει: $\rho=f(\varphi)$ και $\theta=g(\lambda)$, τότε οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως ομόκεντροι κύκλοι (Σχήμα 2.4δ).

Ανάλογα με τις παραμορφώσεις που επιφέρουν σε γεωμετρικά μεγέθη, οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: **σύμμορφες**, **ισοδύναμες** και **ισαπέχουσες**. Σύμμορφες ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων, δηλαδή διατηρούν το σχήμα τους. Ισοδύναμες ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτα τα εμβαδά. Τέλος, ισαπέχουσες ονομάζονται οι απεικονίσεις εκείνες οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτα τα μήκη σε ορισμένες μόνο διευθύνσεις.

Συνήθως, επιλέγουμε μια απεικόνιση με βασικό κριτήριο την απλότητα των σχέσεων που την ορίζουν, όμως πολλές φορές το είδος του χάρτη που πρόκειται να δημιουργηθεί είναι δυνατό να καθορίζει το είδος της απεικόνισης που θα χρησιμοποιηθεί. Έτσι, για τους θεματικούς χάρτες χρησιμοποιούμε συνήθως ισοδύναμες απεικονίσεις ενώ για τους τοπογραφικούς χάρτες σύμμορφες. Πολλές φορές, χρησιμοποιούμε πλάγιες απεικονίσεις για να ελαχιστοποιήσουμε τις παραμορφώσεις σε μια περιορισμένη περιοχή.

2.3 Βιβλιογραφία

Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.

Cuenin, R. *Cartographie Generale*. Tome 1. Editions Eyrolles, Paris, 1972, p. 324.

Maling, D. H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.

Νάκος, Β. και Β. Φιλιππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.

Richardus, P. and R. K. Adler. *Map projections*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1972, p. 174.

Tobler, W. R. "A classification of map projections". *Annals of the Association of American Geographers*, 52, 1962, pp. 167-175.

Κεφάλαιο 3

3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

3.1 Εισαγωγή στα συστήματα απεικονίσεων

Από την απειρία των απεικονίσεων που μπορούμε να φανταστούμε για να απεικονίσουμε την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς ή μιας σφαίρας στο επίπεδο μόνο ένας μικρός σχετικά αριθμός χρησιμοποιείται στην πράξη για χαρτογραφικούς σκοπούς και μάλιστα, ένας ακόμη μικρότερος για γεωδαιτικούς σκοπούς.

Ένα σύστημα προβολής ή απεικόνισης μπορεί να προκύψει με γεωμετρικό ή αναλυτικό τρόπο. Ο νόμος της απεικόνισης μπορεί να ορισθεί ακόμα και αυθαίρετα αλλά συνήθως στην πράξη προκύπτει από την ολοκλήρωση μιας διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες. Ένας απλός τρόπος δημιουργίας μιας οικογένειας συστημάτων απεικόνισης είναι να ξεκινήσουμε με μια απλή ισαπέχουσα απεικόνιση σε κύλινδρο ή κώνο ή επίπεδο και να τη μετατρέψουμε σε σύμμορφη ή ισοδύναμη. Μπορούμε ακόμα να εφαρμόσουμε στροφή 90° στην αναπτυκτική επιφάνεια μιας ορθής απεικόνισης για να παραχθεί μια εγκάρσια ή μια τυχαία στροφή με σκοπό να δημιουργηθεί μια πλάγια απεικόνιση.

3.2 Ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις

Οι κυλινδρικές απεικονίσεις προκύπτουν από την απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου, η οποία εφάπτεται σε αυτήν.

3.2.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή

Η ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή ορίζεται στη σφαίρα από τις σχέσεις:

$$x = R \lambda,$$

$$y = R \varphi,$$

όπου: R η ακτίνα της σφαίρας.

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις αυτές οι γεωγραφικές συντεταγμένες, συναρτήσει των ορθογωνίων δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\varphi = \frac{y}{R}.$$

Οι σχέσεις της προβολής για την απεικόνιση της επιφάνειας ενός ελλειψοειδούς, είναι:

$$x = a \lambda \text{ και}$$

$$y = M,$$

όπου: a ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς και M το μήκος του μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι το πλάτος φ .

Το μήκος του μεσημβρινού (M) υπολογίζεται με τη βοήθεια του παρακάτω αναπτύγματος σειρών:

$$M = a (1 - e^2) [M_0 \varphi - M_2 \sin 2\varphi + M_4 \sin 4\varphi - M_6 \sin 6\varphi].$$

Με:

$$M_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \dots$$

$$M_2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6 + \dots$$

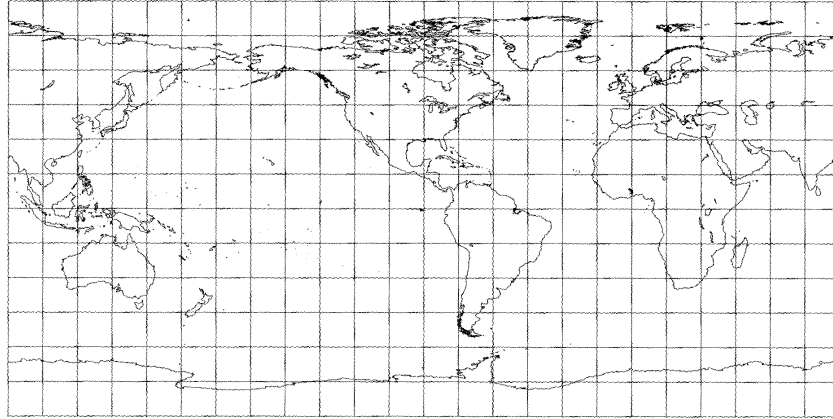
$$M_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \dots$$

$$M_6 = \frac{35}{3072}e^6 + \dots,$$

όπου: e η πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Εξετάζοντας τις σχέσεις αυτές εύκολα παρατηρούμε ότι οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται σε ευθείες κάθετες μεταξύ τους, που μάλιστα στην περίπτωση της σφαίρας ισαπέχουν. Δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας, το

δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων απεικονίζεται στο επίπεδο σε ένα δίκτυο τετραγώνων (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή

Οι κύριες κλίμακες της απεικόνισης, δηλαδή οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο για τη σφαίρα θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{dy}{R d\varphi} = \frac{R d\varphi}{R d\varphi} = 1,$$

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Ενώ για το ελλειψοειδές θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{dy}{dM} = \frac{dM}{dM} = 1,$$

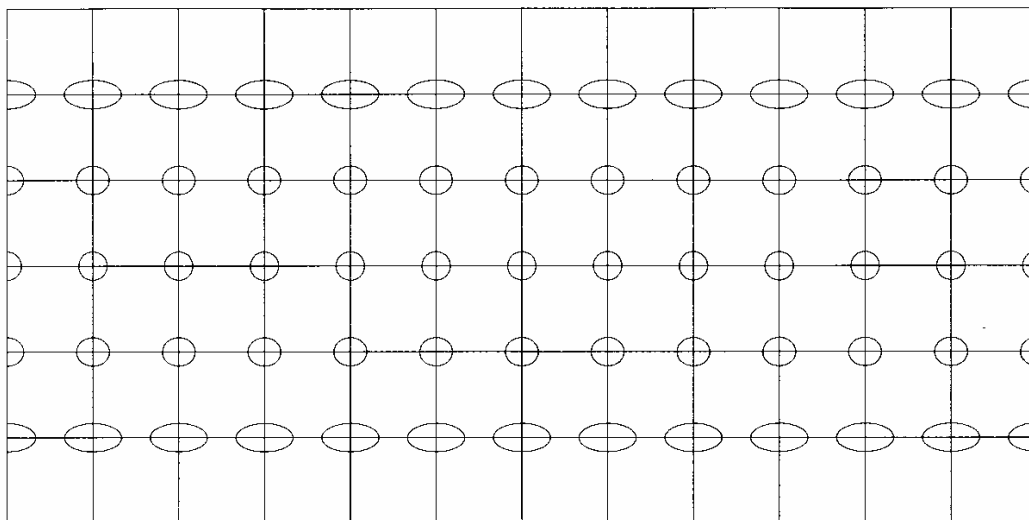
$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{dx}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{a d\lambda}{\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi d\lambda} = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Εξετάζοντας τις κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, συμπεραίνουμε ότι τα μήκη των μεσημβρινών διατηρούνται αναλλοίωτα στο επίπεδο της απεικόνισης και επειδή ισχύει $m_p \geq m_m$, ο μεγάλος ημιάξονας της δείκτριας Tissot είναι προσανατολισμένος κατά τη διεύθυνση των παραλλήλων.

Για τις παραμορφώσεις επιφανειών και γωνιών, εάν αντικαταστήσουμε στις γνωστές σχέσεις τις κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, θα έχουμε για τη σφαίρα:

$$M = \frac{1}{\cos \varphi} \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Η προβολή αυτή δεν είναι σύμμορφη ούτε ισοδύναμη. Είναι όμως ιδιαίτερα απλή. Οι παραμορφώσεις είναι αρκετά σημαντικές εκτός από τις περιοχές που βρίσκονται κοντά στον ισημερινό (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κυλινδρικής ισαπέχουσας προβολής

3.2.2 Μερκατορική προβολή

Η Μερκατορική προβολή είναι μια σύμμορφη ορθή κυλινδρική απεικόνιση. Προκύπτει από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή με κατάλληλη μετάθεση των θέσεων των παραλλήλων στο επίπεδο της απεικόνισης ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη της συμμορφίας. Για να προσδιορίσουμε το νόμο της απεικόνισης στη σφαίρα διατηρούμε τη σχέση:

$$x = R \lambda,$$

και επειδή επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας, θα έχουμε:

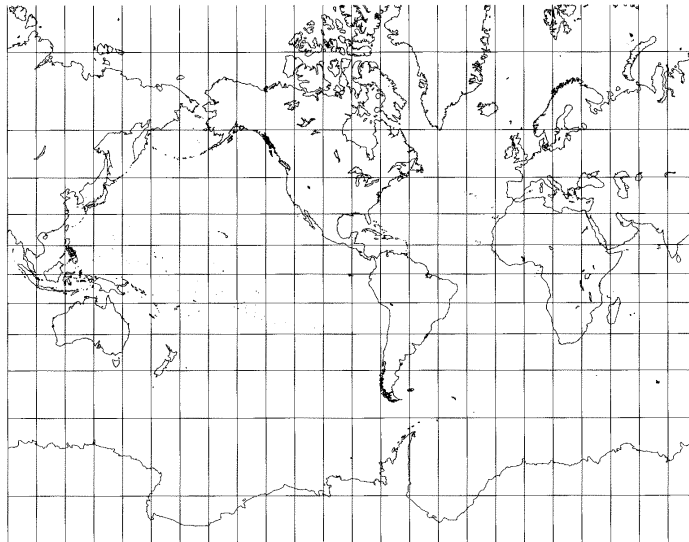
$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{R d\varphi} = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Όμως: $dx = R d\lambda$, οπότε θα έχουμε:

$$dy = \frac{R}{\cos \varphi} d\varphi \Rightarrow y = R \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

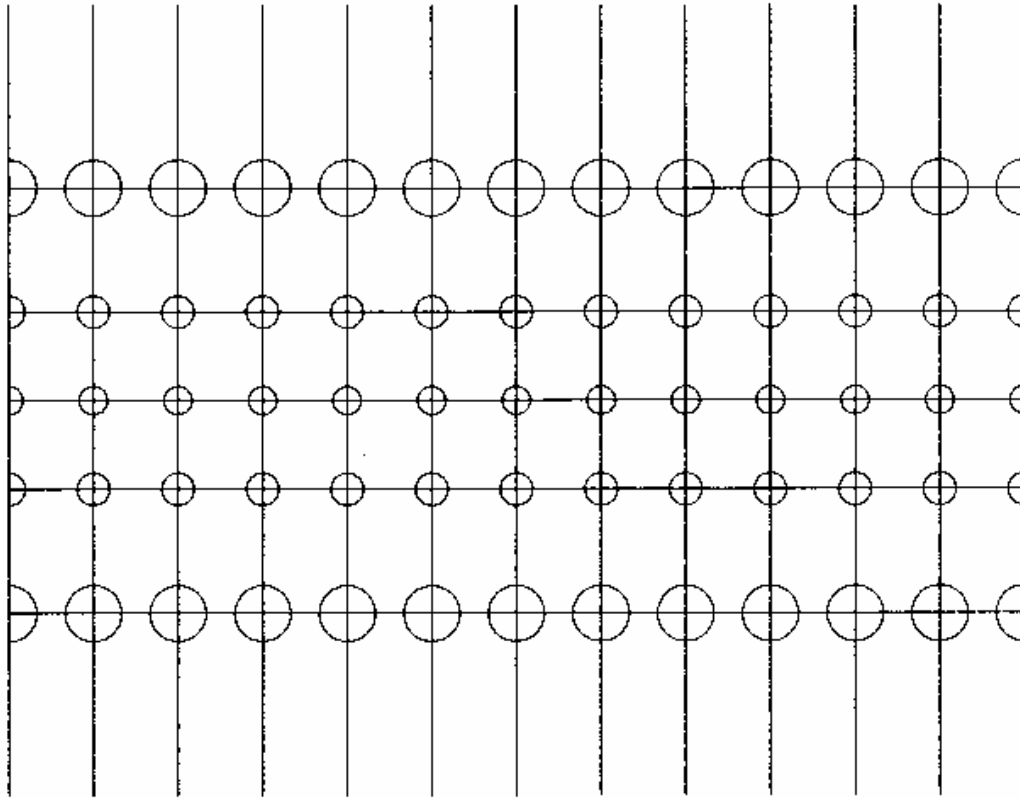
$$y = R \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$



Σχήμα 3.3 Ορθή Μερκατορική προβολή

Στην απεικόνιση αυτή οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών και μάλιστα οι μεσημβρινοί ισαπέχουν μεταξύ τους (Σχήμα 3.3). Η ορθή Μερκατορική προβολή είναι σύμμορφη απεικόνιση ($\varepsilon=0$), δηλαδή οι ελλείψεις παραμόρφωσης εκφυλίζονται σε κύκλους (Σχήμα 3.4). Οι κύριες κλίμακες (δηλαδή, οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο) δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos \varphi},$$



Σχήμα 3.4 Οι κύκλοι παραμόρφωσης της ορθής Μερκατορικής προβολής

ενώ η επιφανειακή κλίμακα θα είναι:

$$M = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την προβολή, προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\varphi = 2 \arctan \left(e^{\frac{y}{R}} \right) - \frac{\pi}{2}.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να απεικονίσουμε την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο, διατηρούμε τη σχέση:

$x = a \lambda$, όπου: a ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς.

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, λόγω του ότι επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας, θα έχουμε:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{\rho d\varphi} = \frac{dx}{N \cos \varphi d\lambda}.$$

Επειδή όμως: $dx = a d\lambda$, θα έχουμε:

$$dy = \frac{\rho a}{N \cos \varphi} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi \Rightarrow y = a \int_0^\varphi \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$y = a \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right].$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για τη σύμμορφη αυτή απεικόνιση οι κύριες κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στο ελλειψοειδές είναι:

$$m_m = m_p = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Τέλος, η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης είναι:

$$M = \frac{1-e^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Η ορθή Μερκατορική προβολή χρησιμοποιείται στη ναυτιλία, επειδή έχει την ιδιότητα να απεικονίζει τις λοξοδρομίες σε ευθείες γιατί αφενός είναι σύμμορφη αφετέρου η σύγκλιση των μεσημβρινών είναι μηδενική σε κάθε σημείο της προβολής. Οι **λοξοδρομίες** είναι γραμμές στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που έχουν σε κάθε σημείο σταθερό αζιμούθιο.

3.2.3 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή

Ξεκινώντας πάλι από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή μπορούμε να δημιουργήσουμε μια απεικόνιση που να είναι ισοδύναμη. Για να προσδιορίσουμε το νόμο της απεικόνισης στη σφαίρα διατηρούμε ξανά τη σχέση:

$$x = R \lambda,$$

και επειδή επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της ισοδυναμίας, θα έχουμε:

$$m_m m_p = 1 \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{R d\varphi} \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως: $dx = R d\lambda$, θα έχουμε:

$$dy = R \cos \varphi d\varphi \Rightarrow y = R \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$y = R \sin \varphi.$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{R}.$$

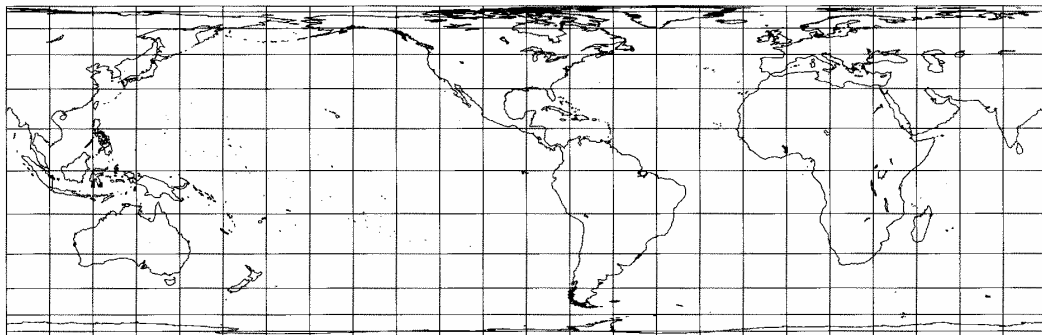
Η απεικόνιση αυτή (Σχήμα 3.5) είναι ισοδύναμη (δηλαδή $M=1$). Οι κύριες κλίμακες (στη σφαίρα) δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_m = \cos \varphi \text{ και } m_p = \frac{1}{\cos \varphi},$$

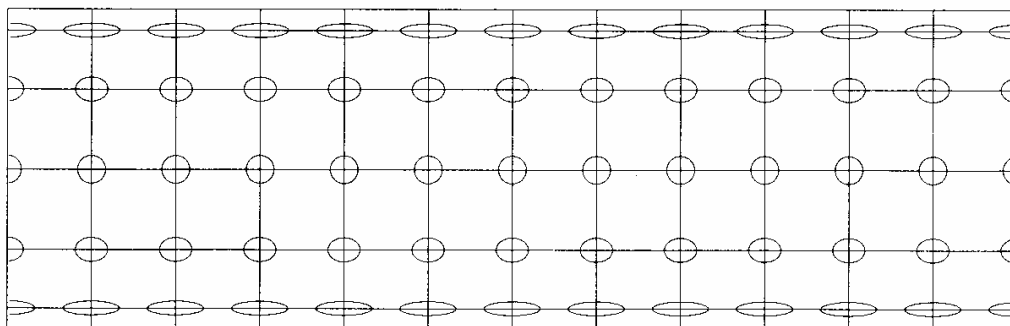
ενώ η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση θα είναι:

$$\sin E = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}.$$

Όπως και με τις υπόλοιπες ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις, οι παραμορφώσεις και σε αυτήν αυξάνουν όσο αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος (Σχήμα 3.6). Η ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή έχει περιορισμένες εφαρμογές που κατά κανόνα αναφέρονται σε άτλαντες οι οποίοι περιλαμβάνουν χάρτες με πολύ μικρές κλίμακες και απεικονίζουν συνήθως ολόκληρη την επιφάνεια της γης. Στις περιπτώσεις αυτές αρκεί η χρήση των σχέσεων της απεικόνισης στη σφαίρα.



Σχήμα 3.5 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή



Σχήμα 3.6 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κυλινδρικής ισοδύναμης προβολής

3.3 Ορθές κωνικές απεικονίσεις

Οι κωνικές προβολές προκύπτουν από ένα κώνο που εφάπτεται στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα κατά μήκος ενός παραλλήλου. Ο παράλληλος αυτός ονομάζεται βασικός παράλληλος και χαρακτηρίζεται από το γεωγραφικό του πλάτος (ϕ_0). Οι κωνικές προβολές ορίζονται για λόγους ευκολίας με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων (ρ, θ). Όταν ο κώνος αναπτυχθεί στο επίπεδο οι μεσημβρινοί

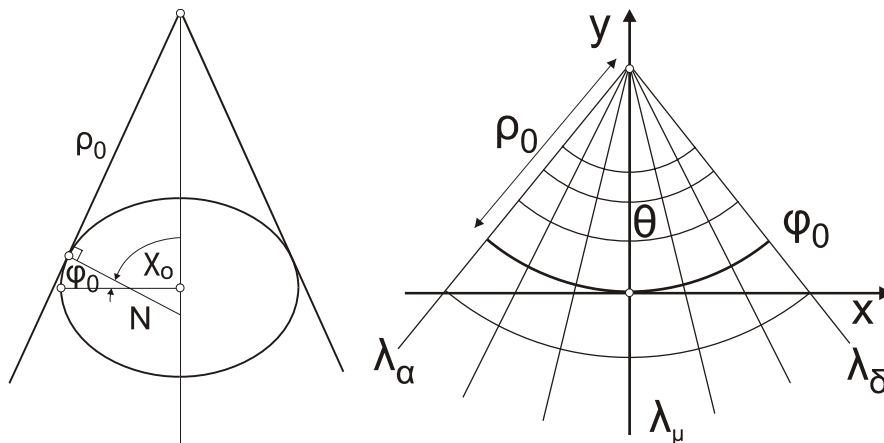
απεικονίζονται ως δέσμη ευθειών με κέντρο τον πόλο και οι παράλληλοι ως τόξα ομόκεντρων κύκλων με το ίδιο κέντρο (Σχήμα 3.7). Η πολική ακτίνα του βασικού παράλληλου (ρ_0) από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Σχήμα 3.7) θα είναι, για το ελλειψοειδές:

$$\rho_0 = \frac{N}{\tan \varphi_0} = N \tan \chi_0 ,$$

όπου: χ η πολική απόσταση, δηλαδή η συμπληρωματική γωνία του γεωγραφικού πλάτους, $\chi=90^\circ-\varphi$,

ή για τη σφαίρα:

$$\rho_0 = \frac{R}{\tan \varphi_0} = R \tan \chi_0 .$$



Σχήμα 3.7 Γεωμετρία κωνικών απεικονίσεων

Λόγω της επαφής του κώνου με την σφαίρα ο βασικός παράλληλος θα απεικονίζεται στο επίπεδο χωρίς παραμορφώσεις. Επομένως, για την πολική γωνία (θ) θα ισχύει:

$$d\theta = \frac{ds_{p_0}}{\rho_0} = \frac{N \cos \varphi_0 d\lambda}{N \cot \varphi_0} ,$$

δηλαδή: $\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0$.

Είναι φανερό, ότι στις κωνικές απεικονίσεις η σύγκλιση των μεσημβρινών θα είναι: $\gamma=\theta$. Στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να μετατρέψουμε τις πολικές σε

ορθογώνιες συντεταγμένες και μάλιστα, έτσι ώστε η απεικονιζόμενη περιοχή να παρουσιάζεται ορθά στο επίπεδο του χάρτη, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = \rho_0 - \rho \cos \theta,$$

όπου: $\theta = (\lambda - \lambda_\mu) \sin \varphi_0 = (\lambda - \lambda_\mu) \cos \chi_0$, με λ_μ τον μέσο μεσημβρινό της απεικονιζόμενης περιοχής.

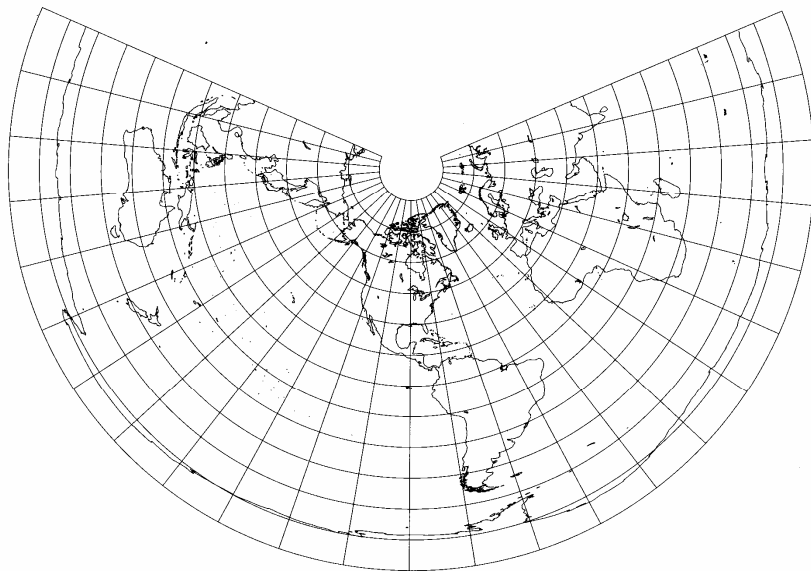
Ο άξονας y ταυτίζεται με τον μέσο μεσημβρινό της περιοχής και ο άξονας x εφάπτεται στο βασικό παράλληλο (Σχήμα 3.7).

3.3.1 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή

Όπως και με την προηγούμενη κατηγορία των απεικονίσεων έτσι και στις κωνικές ξεκινάμε με την ισαπέχουσα, που αποτελεί την απλούστερη των περιπτώσεων. Ο νόμος της απεικόνισης για τη σφαίρα θα ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + R(\varphi_0 - \varphi).$$



Σχήμα 3.8 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή

Είναι φανερό ότι στην ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή ο πόλος του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν απεικονίζεται ως σημείο αλλά ως τόξο κύκλου (Σχήμα 3.8).

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση, έχουμε:

$$\lambda = \frac{\theta}{\sin \varphi_0},$$

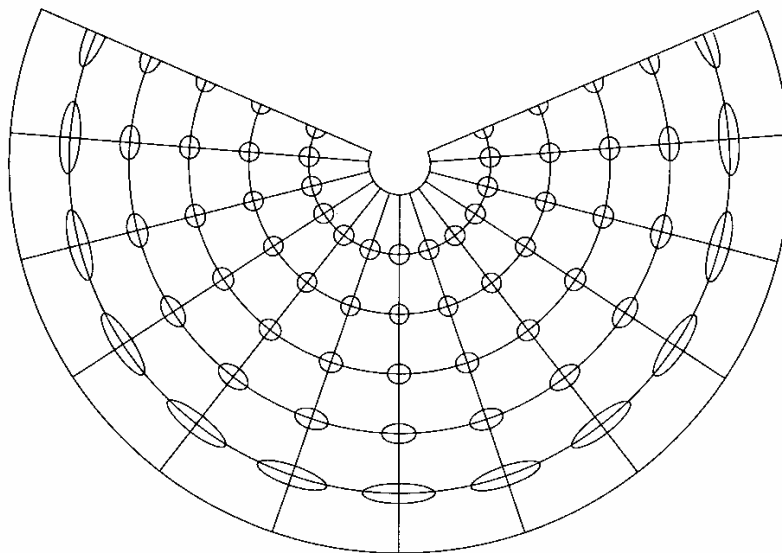
$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho - \rho_0}{R}.$$

Οι κύριες κλίμακες, δηλαδή οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης κατά μεσημβρινό και παράλληλο της σφαίρας θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{R d\varphi}{R d\varphi} = 1,$$

και:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \sin \varphi_0 d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \sin \varphi_0}{R \cos \varphi}.$$



Σχήμα 3.9 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής

Εξετάζοντας τη σχέση της κλίμακας κατά παράλληλο (m_p) παρατηρούμε αφενός ότι ο βασικός παράλληλος παραμένει αναλλοίωτος, αφετέρου ότι οι παραμορφώσεις αυξάνονται όσο απομακρυνόμαστε από το βασικό παράλληλο (Σχήμα 3.9).

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης αυτής αν η επιφάνεια της σφαίρας αντικατασταθεί από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Τότε θα έχουμε:

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0,$$

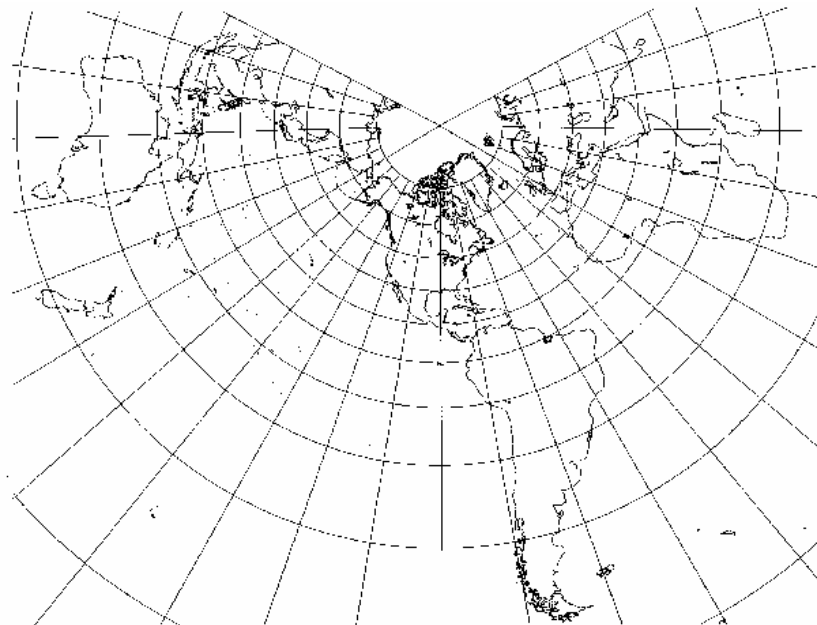
$$\rho = \rho_0 - M.$$

όπου: M το τόξο μεσημβρινού από πλάτος φ_0 μέχρι φ .

3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert

Ξεκινώντας από την ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε σύμμορφη μεταθέτοντας τις θέσεις των παραλλήλων (Σχήμα 3.10). Θα διατηρήσουμε λοιπόν τη σχέση για την πολική γωνία θ :

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0.$$



Σχήμα 3.10 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε την πολική ακτίνα (ρ) με τρόπο που να διατηρείται η ιδιότητα της συμμορφίας. Θα πρέπει, λοιπόν, οι κύριες κλίμακες να είναι ίσες, δηλαδή:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Επειδή όμως $d\theta = \cos \chi_0 d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$, θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} = \frac{\rho \cos \chi_0}{R \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \cos \chi_0 \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\ln \rho = \cos \chi_0 \ln \tan \frac{\chi}{2} + C \quad \text{ή} \quad \rho = k \left(\tan \frac{\chi}{2} \right)^{\cos \chi_0}.$$

Η σταθερά k προσδιορίζεται από την ίδια σχέση σε μία οριακή θέση. Πράγματι, για $\chi = \chi_0$ γνωρίζουμε ότι η πολική ακτίνα πρέπει να είναι: $\rho = R \tan \chi_0$. Επιλύοντας ως προς τη σταθερά k , θα έχουμε:

$$k = R \tan \chi_0 \left(\cot \frac{\chi_0}{2} \right)^{\cos \chi_0},$$

Με αντικατάσταση, λοιπόν, θα έχουμε για την πολική ακτίνα στη σφαίρα την παρακάτω σχέση:

$$\rho = R \tan \chi_0 \left(\cot \frac{\chi_0}{2} \right)^{\cos \chi_0} \left(\tan \frac{\chi}{2} \right)^{\cos \chi_0}.$$

Αντιστρέφοντας προκύπτουν οι σχέσεις:

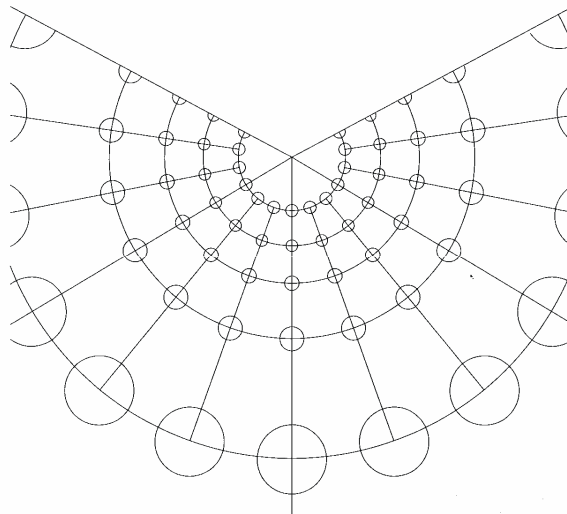
$$\lambda = \frac{\theta}{\cos \chi_0} \quad \text{και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\left(\frac{\rho}{R \tan \chi_0} \right)^{\frac{1}{\cos \chi_0}} \tan \frac{\chi_0}{2} \right).$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο (δηλαδή, οι κύριες κλίμακες) θα είναι:

$$m_m = m_p = \frac{-d\rho}{R d\varphi}.$$

Στο Σχήμα 3.11 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της προβολής σε σκαρίφημα καθώς και οι ελλείψεις παραμόρφωσης, οι οποίες λόγω της συνθήκης της συμμορφίας εκφυλίζονται σε κύκλους. Η προβολή Lambert είχε πολύ μεγάλη διάδοση στην Ευρώπη στο διάστημα του μεσοπολέμου, για χαρτογραφικές αλλά και γεωδαιτικές εφαρμογές. Σήμερα, έχει αντικατασταθεί από την εγκάρσια Μερκατορική προβολή.



Σχήμα 3.11 Οι κύκλοι παραμόρφωσης της σύμμορφης κωνικής προβολής - Lambert

Με ανάλογη διαδικασία μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης για το ελλειψοειδές, οι οποίες είναι:

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0,$$

$$\text{και: } \rho = N_0 \tan \chi_0 \left(\frac{\tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}}{\tan \left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e}{2}}} \right)^{\sin \varphi_0}.$$

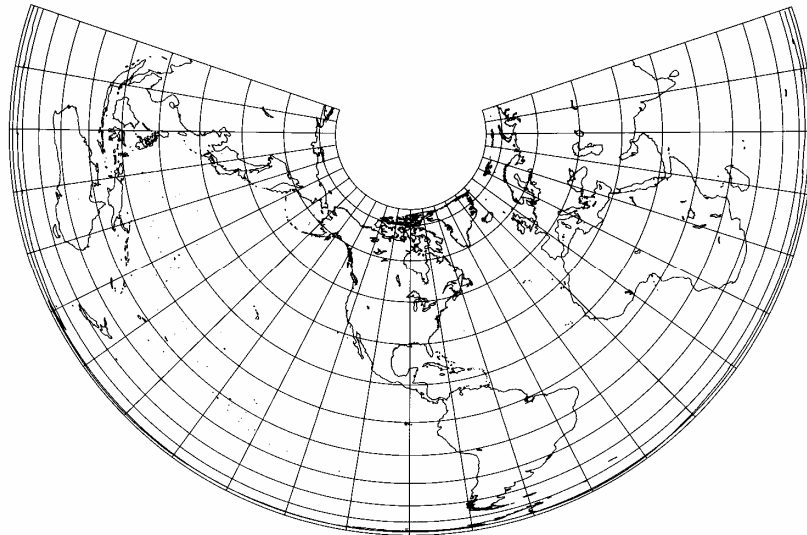
Οι κύριες κλίμακες στο ελλειψοειδές είναι:

$$m = m_m = m_p = \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi}.$$

3.3.3 Ισοδύναμη κωνική προβολή - Albers

Η ορθή κωνική προβολή μετατρέπεται σε ισοδύναμη αν η πολική ακτίνα προσδιοριστεί με τρόπο που να διατηρείται η ιδιότητα της ισοδυναμίας (Σχήμα 3.12). Θα διατηρήσουμε λοιπόν τη σχέση για την πολική γωνία θ :

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0.$$



Σχήμα 3.12 Ισοδύναμη κωνική προβολή – Albers

Ας προσδιορίσουμε τώρα την πολική ακτίνα εξασφαλίζοντας τη συνθήκη της ισοδυναμίας, δηλαδή:

$$m_m m_p = 1.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή για να διαμορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση της πολικής ακτίνας (ρ), θα έχουμε:

$$\frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως: $d\theta = \cos \chi_0 d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$. Θα έχουμε:

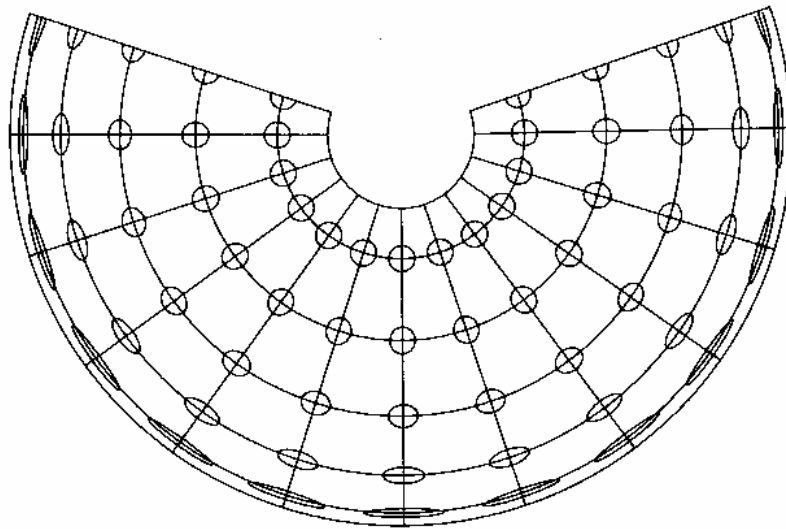
$$\frac{d\rho}{R d\chi} \frac{\rho \cos \chi_0}{R \sin \chi} = 1 \Rightarrow \rho d\rho = R^2 \frac{\sin \chi}{\cos \chi_0} d\chi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\rho^2 = -2R^2 \frac{\cos \chi}{\cos \chi_0} + C.$$

Η σταθερά C προσδιορίζεται από την ίδια σχέση σε μία οριακή θέση. Πράγματι, για $\chi = \chi_0$ γνωρίζουμε ότι η πολική ακτίνα πρέπει να είναι: $\rho = R \tan \chi_0$. Επιλύοντας ως προς τη σταθερά C , θα έχουμε:

$$C = R^2 \tan^2 \chi_0 + 2R^2.$$



Σχήμα 3.13 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ισοδύναμης κωνικής προβολής - Albers

Με αντικατάσταση, λοιπόν, θα έχουμε για την πολική ακτίνα την παρακάτω σχέση για τη σφαίρα:

$$\rho^2 = R^2 \tan^2 \chi_0 + 2R^2 \left(1 - \frac{\cos \chi}{\cos \chi_0} \right).$$

Ας σημειωθεί, ότι και σε αυτήν την απεικόνιση η εικόνα του πόλου του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν θα είναι σημείο αλλά τόξο κύκλου. Στο Σχήμα 3.13 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων σε σκαρίφημα για την προβολή αυτή και οι ελλείψεις παραμόρφωσης.

3.3.4 Ισοδύναμη προβολή Bonne

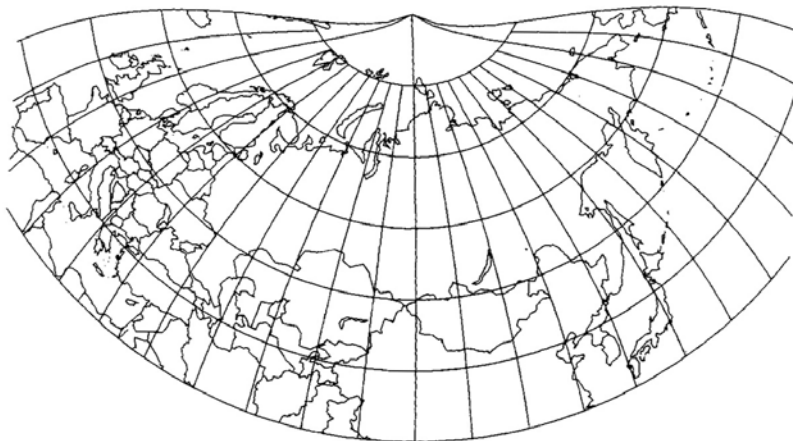
Η ισοδύναμη προβολή Bonne είναι μια ισοδύναμη απεικόνιση που διατηρεί τους παράλληλους της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής αλλά μετασχηματίζει τους μεσημβρινούς με τρόπο που να ικανοποιείται η ιδιότητα της ισοδυναμίας. Επειδή στην απεικόνιση αυτή διατηρούνται οι παράλληλοι της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής η κλίμακα κατά τη διεύθυνση των μεσημβρινών είναι ίση με τη μονάδα, δηλαδή τα μήκη κατά τον παράλληλο (dp) θα πρέπει να είναι ίσα με τα αντίστοιχα στην επιφάνεια της σφαίρας. Δηλαδή θα ισχύει:

$$dp = R \cos \varphi d\lambda = R \sin \chi d\lambda .$$

Επομένως η πολική γωνία (θ) θα δίνεται από τις σχέσεις:

$$d\theta = \frac{ds_p}{\rho} = \frac{R \sin \chi}{\rho} d\lambda = \frac{R \cos \varphi}{\rho} d\lambda \Rightarrow \theta = \frac{R \sin \chi}{\rho} \lambda = \frac{R \cos \varphi}{\rho} \lambda ,$$

όπου: ρ η πολική ακτίνα που διατηρείται ίση με την πολική ακτίνα της ορθής κωνικής προβολής.



Σχήμα 3.14 Η προβολή Bonne

Δηλαδή:

$$\rho = \rho_0 + R(\varphi_0 - \varphi) = \rho_0 + R(\chi - \chi_0),$$

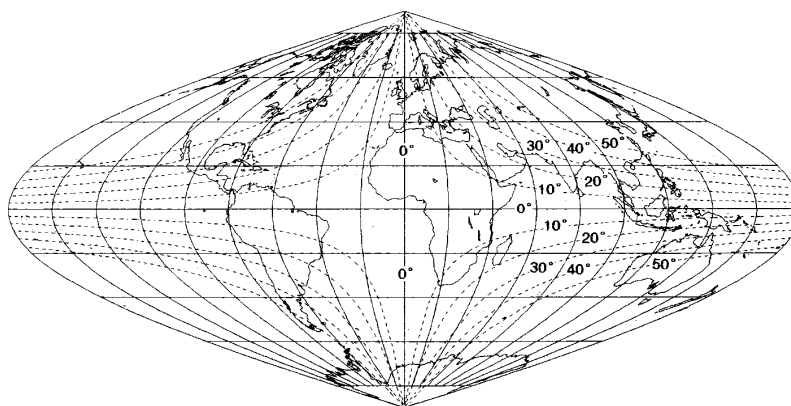
με ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{R}{\tan \varphi_0} = R \tan \chi_0.$$

Στην προβολή αυτή ο πόλος απεικονίζεται ως σημείο ενώ αντίθετα στις τρεις προηγούμενες κωνικές προβολές ο πόλος απεικονιζόταν ως κυκλικό τόξο (Σχήμα 3.14). Επίσης, ενώ οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στις διευθύνσεις των μεσημβρινών και των παραλλήλων είναι ίσες με τη μονάδα δεν είναι οι κύριες κλίμακες της απεικόνισης και μάλιστα οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων τους στο επίπεδο της απεικόνισης εν γένει δεν τέμνονται κάθετα. Η προβολή Bonne είχε μεγάλη χρήση σε χαρτογραφικές εφαρμογές στις αρχές του 20ου αιώνα στην Ευρώπη.

3.3.5 Ισοδύναμη προβολή Sanson

Η ισοδύναμη προβολή Sanson αποτελεί μια απλοποιημένη έκφραση της ισοδύναμης προβολής Bonne μετατρέποντας την αναπτυσσόμενη επιφάνεια από κώνο σε κύλινδρο. Επομένως οι σχέσεις της απεικόνισης μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις της ισοδύναμης προβολής Bonne αν θέσουμε όπου $\varphi_0=0^\circ$ ή $\chi_0=90^\circ$.



Σχήμα 3.15 Η προβολή Sanson

Δηλαδή θα έχουμε:

$$x = R \lambda \cos \varphi \text{ και}$$

$$y = R \varphi.$$

Στην απεικόνιση αυτή οι παράλληλοι απεικονίζονται ως δέσμη παράλληλων ευθειών και οι μεσημβρινοί ως ημιτονικές καμπύλες (Σχήμα 3.15). Η ισοδύναμη προβολή Sanson εφαρμόζεται σε θεματικούς χάρτες που κατά κανόνα αναφέρονται σε άτλαντες, οι οποίοι περιλαμβάνουν χάρτες με πολύ μικρές κλίμακες και απεικονίζουν συνήθως ολόκληρη την επιφάνεια της γης.

3.3.6 Ισοδύναμη προβολή Mollweide

Με την ισοδύναμη προβολή Mollweide απεικονίζεται ολόκληρη η επιφάνεια της γης ως μια έλλειψη της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας -εικόνα του ισημερινού- είναι διπλάσιος του μικρού ημιάξονα -εικόνα του κεντρικού μεσημβρινού. Στην απεικόνιση αυτή οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως ελλείψεις που τέμνουν τον ισημερινό σε ισαπέχουσες αποστάσεις. Ο μεσημβρινός που αντιστοιχεί σε γεωγραφικό πλάτος $\lambda = \pm 90^\circ$ απεικονίζεται ως κύκλος. Οι παράλληλοι απεικονίζονται ως δέσμη παράλληλων ευθειών που δεν ισαπέχουν (Σχήμα 3.16). Οι αποστάσεις των παραλλήλων από την εικόνα του ισημερινού (y) ικανοποιούν τη συνθήκη της ισοδυναμίας και δίνονται από τη σχέση:

$$y = R \sqrt{2} \sin \omega,$$

όπου: ω μια βοηθητική γωνία.

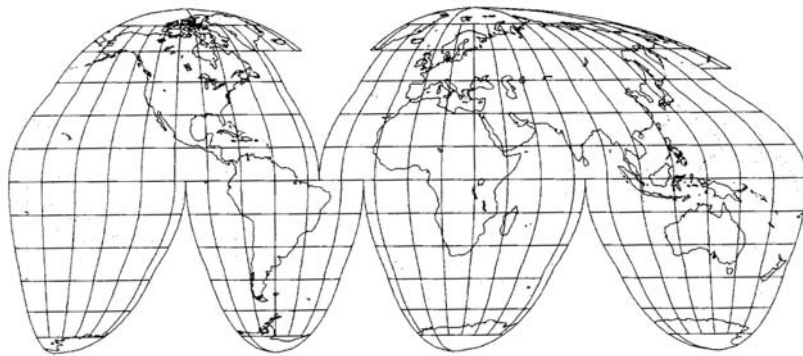
Η βοηθητική γωνία συνδέεται με το γεωγραφικό πλάτος (φ) από τη σχέση:



Σχήμα 3.16 Η προβολή Mollweide

$$\sin \varphi = \frac{2\omega}{\pi} + \frac{\sin 2\omega}{\pi}.$$

Οι προβολές Mollweide και Sanson έχουν μικρές σχετικά παραμορφώσεις κοντά στο κέντρο της προβολής αλλά σχετικά μεγάλες παραμορφώσεις στα άκρα. Για αυτόν το λόγο συχνά οι προβολές αυτές εφαρμόζονται ως διακεκομμένες (Σχήμα 3.17) χρησιμοποιώντας περισσότερους του ενός κεντρικούς μεσημβρινούς και μάλιστα διαφορετικούς για το βόρειο και νότιο ημισφαίριο. Οι κεντρικοί μεσημβρινοί που χρησιμοποιούνται επιλέγονται με τρόπο που να απεικονίζονται με μικρές παραμορφώσεις όσες περιοχές επιθυμούμε. Η μέθοδος αυτή των διακεκομμένων προβολών μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες απεικονίσεις.



Σχήμα 3.17 Παράδειγμα διακεκομμένης προβολής

3.4 Ορθές επίπεδες απεικονίσεις

Οι επίπεδες προβολές προκύπτουν από ένα επίπεδο που εφάπτεται στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα σε κάποιο σημείο. Στις ορθές επίπεδες απεικονίσεις το σημείο αυτό είναι ο πόλος. Στη συνέχεια, τα σημεία από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας προβάλλονται στο επίπεδο. Οι επίπεδες προβολές ορίζονται για λόγους ευκολίας με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) . Στις ορθές επίπεδες απεικονίσεις, ή αζιμουθιακές όπως αλλιώς λέγονται, οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο τον πόλο της σφαίρας και οι παράλληλοι ως ομόκεντροι κύκλοι με το ίδιο κέντρο.

Στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να μετατρέψουμε τις πολικές σε ορθογώνιες συντεταγμένες και μάλιστα, έτσι ώστε η απεικονιζόμενη περιοχή να παρουσιάζεται ορθά στο χάρτη, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = y_0 - \rho \cos \theta,$$

όπου: $\theta = \lambda - \lambda_\mu$, με λ_μ : το μέσο μεσημβρινό της απεικονιζόμενης περιοχής.

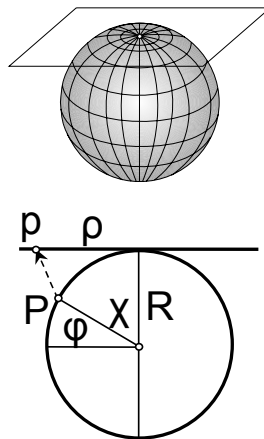
Ο άξονας y ταυτίζεται με το μέσο μεσημβρινό της περιοχής και ο άξονας x εφάπτεται στον παράλληλο για τον οποίο η πολική ακτίνα είναι ίση με $\rho=y_0$.

3.4.1 Ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή - Postel

Η επίπεδη αυτή προβολή, μπορεί να οριστεί σε αντιστοιχία με την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή αν αντί για ορθογώνιες χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες. Ο πόλος της σφαίρας απεικονίζεται σε σημείο, οι μεσημβρινοί σε κεντρική δέσμη ευθειών που διέρχεται από τον πόλο και οι παράλληλοι σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο τον πόλο. Οι ακτίνες των παραλλήλων είναι ίσες με τις πραγματικές τους αποστάσεις πάνω στη σφαίρα, μετρούμενες από τον πόλο (Σχήμα 3.18). Για την απεικόνιση αυτή θα έχουμε:

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \chi.$$



Σχήμα 3.18 Γεωμετρική αρχή προβολής Postel

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις, έχουμε:

$$\lambda = \theta \text{ και } \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

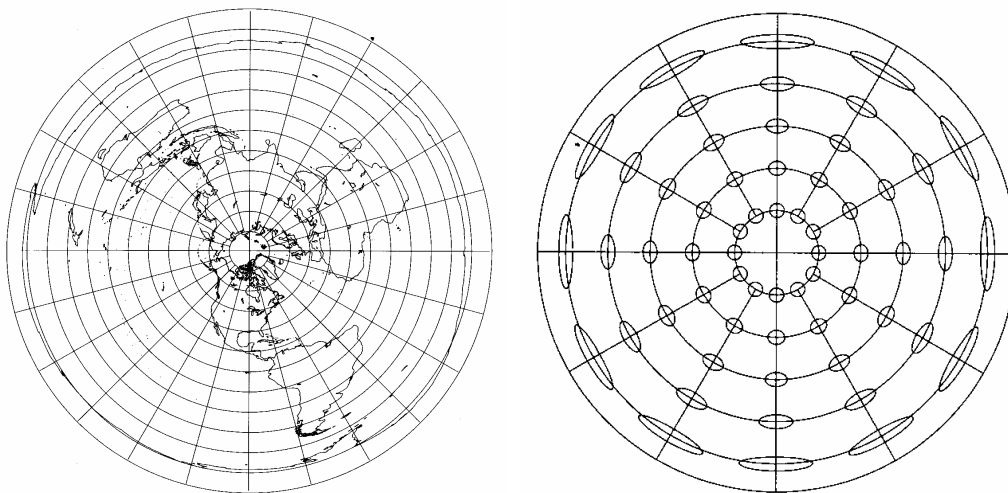
$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{-R d\chi}{-R d\chi} = 1.$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} = \frac{\chi}{\sin \chi}.$$

Εξετάζοντας την κλίμακα κατά μεσημβρινό παρατηρούμε ότι: $m_p \geq 1$. Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \frac{\chi}{\sin \chi} \quad \text{και} \quad \sin E = \frac{\chi - \sin \chi}{\chi + \sin \chi}.$$



Σχήμα 3.19 Η προβολή Postel του βόρειου ημισφαιρίου της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά)

Η προβολή αυτή είναι πολύ απλή στην κατασκευή της και οι παραμορφώσεις στην περιοχή του πόλου είναι αρκετά μικρές. Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή δεν είναι ούτε σύμμορφη ούτε ισοδύναμη.

Στο Σχήμα 3.19 (αριστερά) παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρη την επιφάνεια της γης και (δεξιά) οι ελλείψεις παραμόρφωσης της απεικόνισης.

3.4.2 Πολική στερεογραφική προβολή

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να μετατραπεί σε σύμμορφη ακολουθώντας την ίδια γνωστή πλέον διαδικασία. Επομένως για την πολική γωνία θα έχουμε:

$$\theta = \lambda.$$

Θα προσδιορίσουμε, λοιπόν, την πολική ακτίνα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της σύμμορφίας, δηλαδή:

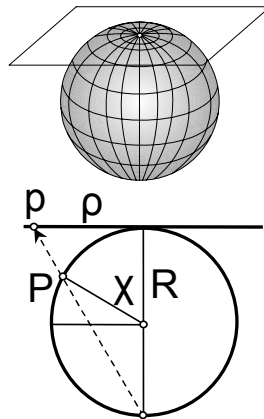
$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Επειδή όμως, $d\theta = d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$. Θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} = \frac{\rho}{R \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\ln \rho = \ln \tan \frac{\chi}{2} + C \quad \text{ή} \quad \rho = c \tan \frac{\chi}{2}.$$



Σχήμα 3.20 Γεωμετρική αρχή στερεογραφικής προβολής

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης μας δίνει μια οικογένεια από σύμμορφες απεικονίσεις, τα μέλη της οποίας εξαρτώνται από τη σταθερά c . Για την τιμή

όμως της σταθεράς $c=2R$, η απεικόνιση που προκύπτει προέρχεται από κεντρική προβολή της σφαίρας από τον αντίποδα του πόλου στο επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο (Σχήμα 3.20).

Επομένως, επιλέγουμε να έχουμε:

$$\rho = 2R \tan \frac{\chi}{2}.$$

Οι αντίστροφες σχέσεις της στερεογραφικής προβολής είναι:

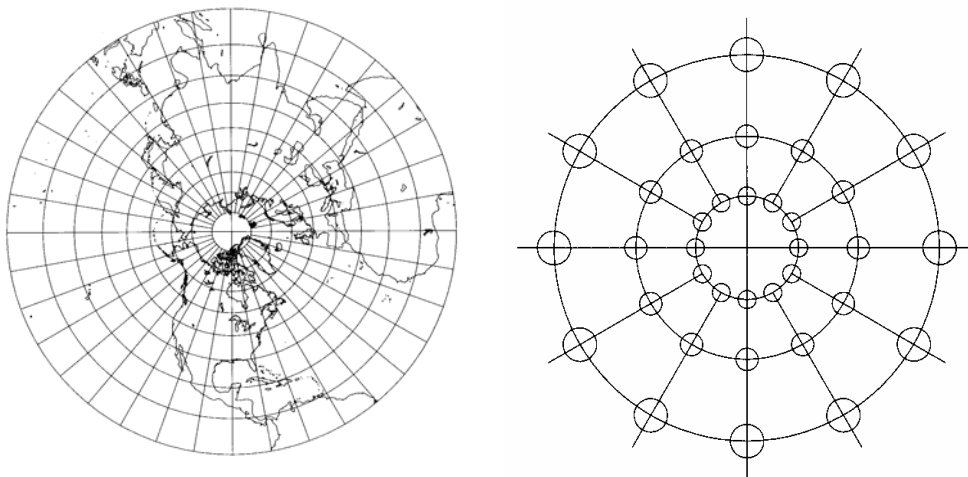
$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\rho}{2R}.$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο θα είναι:

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}},$$

ενώ, η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης θα είναι:



Σχήμα 3.21 Η στερεογραφική προβολή (αριστερά) και οι κύκλοι παραμόρφωσης (δεξιά)

$$M = \frac{1}{\cos^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Η προβολή αυτή ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες με την ονομασία στερεογραφική προβολή. Χαρακτηριστική ιδιότητα της συγκεκριμένης προβολής είναι η απεικόνιση των κύκλων της σφαίρας σε κύκλους στο επίπεδο (σύμμορφη). Στο Σχήμα 3.21 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της γης.

Με ανάλογη διαδικασία μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης για το ελλειψοειδές, οι οποίες είναι:

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = \left(\frac{2a^2}{b} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{e}{2}} \right) \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}.$$

3.4.3 Πολική επίπεδη ισοδύναμη προβολή - Lambert

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμη. Για την πολική γωνία θα έχουμε:

$$\theta = \lambda.$$

Θα προσδιορίσουμε, λοιπόν, την πολική ακτίνα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της ισοδυναμίας, δηλαδή:

$$m_m m_p = 1 \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως $d\theta = d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$, θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} \frac{\rho}{R \cos \varphi} = 1 \Rightarrow \rho d\rho = R^2 \sin \chi d\chi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\rho^2 = -2R^2 \cos \chi + C \Rightarrow \rho^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} - 2R^2 + c.$$

Η σταθερά c προσδιορίζεται για την οριακή θέση, όπου $\chi=0$ και επομένως θα πρέπει: $\rho=0$, τότε:

$$c = 2R^2.$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$\rho = 2R \sin \frac{\chi}{2}.$$

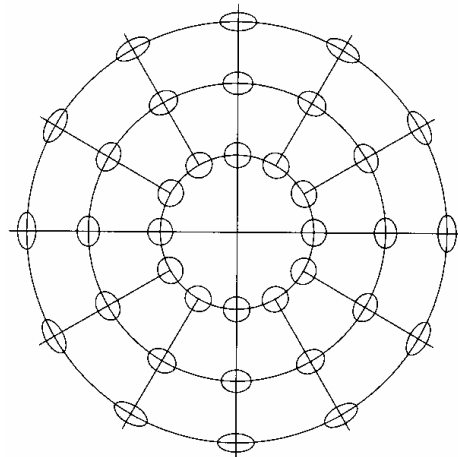
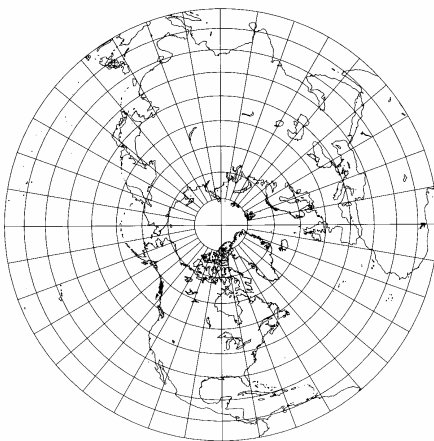
Με αντιστροφή των σχέσεων έχουμε:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{\rho}{2R}.$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο θα είναι:

$$m_m = \cos \frac{\chi}{2} \text{ και } m_p = \frac{1}{\cos \frac{\chi}{2}}.$$



Σχήμα 3.22 Η ορθή επίπεδη ισοδύναμη προβολή για το βόρειο ημισφαίριο της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά)

Η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης φυσικά θα είναι μονάδα ($M=1$), ενώ η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση (E) σε διεύθυνση θα είναι:

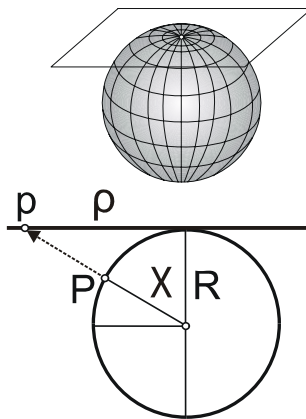
$$\sin E = \frac{1 - \cos^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\chi}{2}}.$$

Στο Σχήμα 3.22 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

3.4.4 Πολική γωνιωματική προβολή

Η απεικόνιση αυτή προκύπτει από γεωμετρική κεντρική προβολή της επιφάνειας της σφαίρας σε ένα επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο με κέντρο προβολής το κέντρο της σφαίρας. Οι αναλυτικές σχέσεις της προβολής αυτής επομένως θα είναι (Σχήμα 3.23):

$$\begin{aligned}\theta &= \lambda, \\ \rho &= R \tan \chi.\end{aligned}$$



Σχήμα 3.23 Η γεωμετρική αρχή πολικής γωνιωματικής προβολής

Οι αντίστροφες σχέσεις της απεικόνισης είναι:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

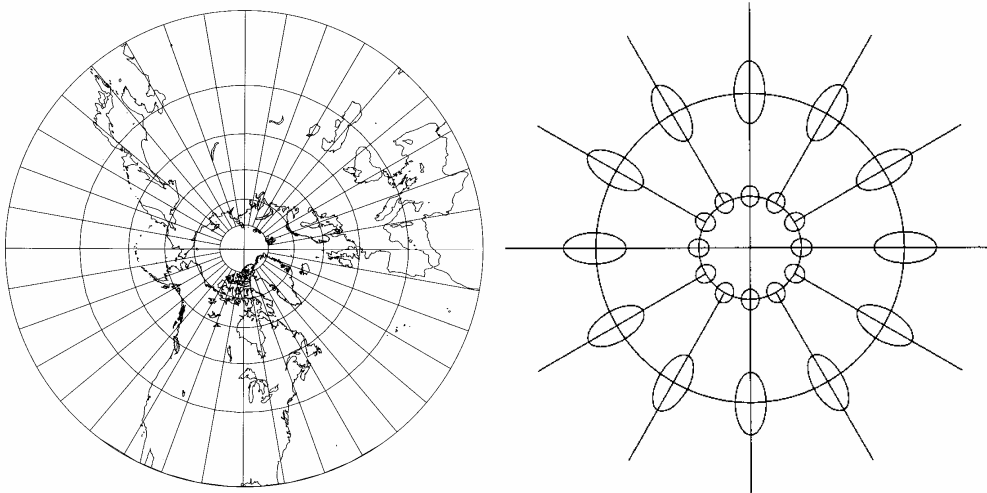
$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{-\frac{R}{\cos^2 \chi} d\chi}{-R d\chi} = \frac{1}{\cos^2 \chi}.$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R \tan \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} \Rightarrow m_p = \frac{1}{\cos \chi}.$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \frac{1}{\cos^3 \chi} \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\chi}{2}$$



Σχήμα 3.24 Η γωνιομετρική προβολή (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά)

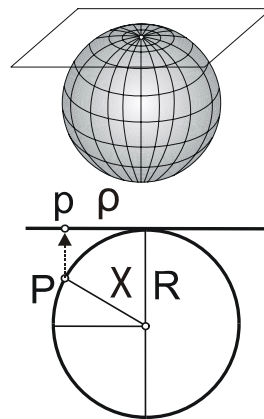
Η πολική γωνιολογική προβολή έχει τη σημαντική ιδιότητα να προβάλλονται οι μέγιστοι κύκλοι στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας σε ευθείες. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, η συντομότερη οδός μεταξύ δύο σημείων στη σφαίρα θα είναι στην απεικόνιση η ευθεία που ενώνει τις προβολές των δύο σημείων. Στο Σχήμα 3.24 (αριστερά) παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της επιφάνειας της γης καθώς και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

3.4.5 Πολική ορθογραφική προβολή

Η απεικόνιση αυτή προκύπτει από ορθή παράλληλη προβολή της επιφάνειας της σφαίρας σε επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο. Οι αναλυτικές σχέσεις της προβολής αυτής επομένως θα είναι (Σχήμα 3.25):

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \sin \chi.$$



Σχήμα 3.25 Γεωμετρική αρχή ορθογραφικής προβολής

Αντιστρέφοντας προκύπτει ότι:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

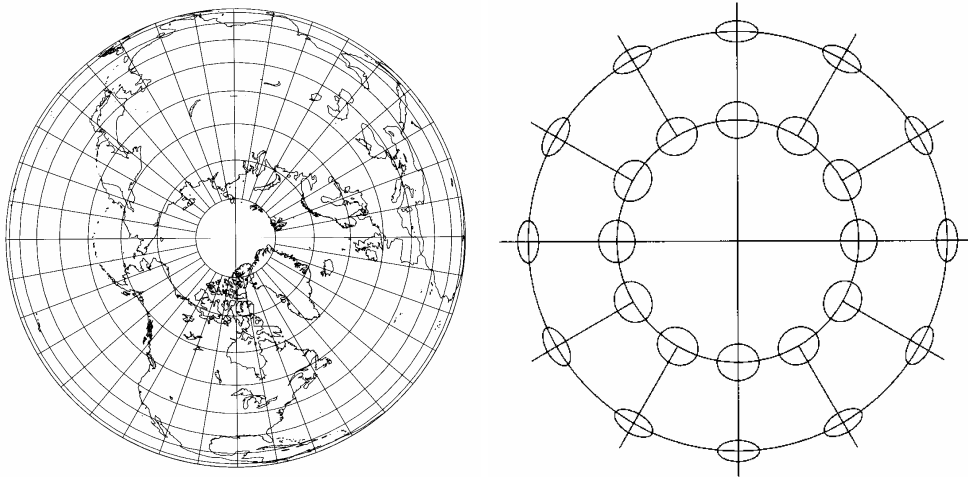
$$m_m = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{R \cos \chi d\chi}{R d\chi} = \cos \chi .$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R \sin \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} = 1.$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και την μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

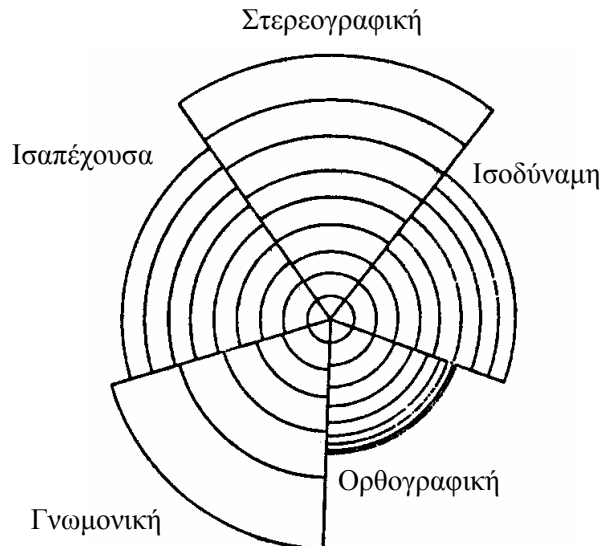
$$M = \cos \chi \quad \text{και} \quad \sin E = \tan^2 \frac{\chi}{2}.$$



Σχήμα 3.26 Η ορθογραφική προβολή και οι ελλείψεις παραμόρφωσης

Στο Σχήμα 3.26 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της επιφάνειας της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά). Στο Σχήμα 3.27 παρουσιάζονται σε σύγκριση μεταξύ τους οι παράλληλοι για όλες τις περιπτώσεις των επίπεδων απεικονίσεων. Παρατηρώντας το Σχήμα 3.27, βλέπουμε ότι οι παράλληλοι της σύμμορφης απεικόνισης (στερεογραφική) απομακρύνονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουν προς τον ισημερινό σε σχέση με την ισαπέχουσα. Αντίθετα οι παράλληλοι της ισοδύναμης προβολής συμπιέζονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό. Ανάλογη εικόνα έχουμε και για τις δύο άλλες προβολές λόγω της γεωμετρικής αρχής ορισμού τους. Στη γνωμονική προβολή οι

μεσημβρινοί απομακρύνονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό, χωρίς όμως να είναι σύμμορφη. Ενώ οι παράλληλοι της ορθογραφικής προβολής συμπιέζονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό, χωρίς βέβαια να είναι ισοδύναμη.

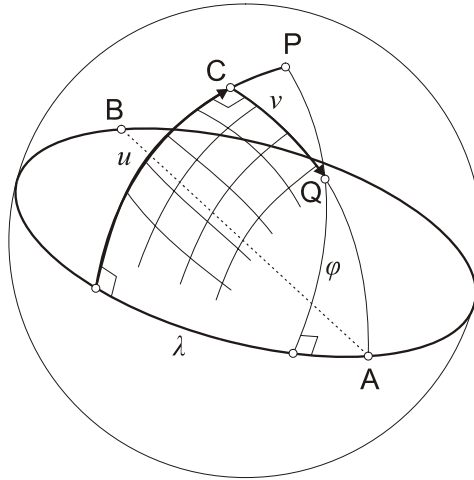


Σχήμα 3.27 Συγκριτική παρουσίαση επίπεδων απεικονίσεων

3.5 Εγκάρσιες απεικονίσεις

Όλες οι απεικονίσεις που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες είναι δυνατό να μετατραπούν σε εγκάρσιες. Όλες οι εγκάρσιες απεικονίσεις μπορούν να προκύψουν από τις ορθές εφαρμόζοντας στροφή του γεωγραφικού συστήματος αναφοράς (φ, λ) κατά μία ορθή γωνία.

Για την εφαρμογή της στροφής κατά 90° ορίζουμε στην επιφάνεια της σφαίρας ένα δίκτυο επιφανειακών συντεταγμένων (u, v) τέτοιο ώστε ο άξονας: v να ταυτίζεται με τον ισημερινό της σφαίρας και ο άξονας: u με τον κεντρικό μεσημβρινό. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο Q πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (Σχήμα 3.28). Η θέση του στο εγκάρσιο σύστημα αναφοράς (u, v) προσδιορίζεται φέροντας την προβολή του στον άξονα u . Στο εγκάρσιο σύστημα αναφοράς (u, v) οι γραμμές με $u = \text{σταθερό}$ είναι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας και διέρχονται από τα σημεία A (με $\varphi=0^\circ$ και $\lambda=90^\circ$) και B (με $\varphi=0^\circ$ και $\lambda=-90^\circ$) και οι γραμμές με $v = \text{σταθερό}$ είναι μικροί κύκλοι της σφαίρας με πόλους τα σημεία A και B (Σχήμα 3.28). Επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο PQC , οι συντεταγμένες του εγκάρσιου συστήματος αναφοράς (u, v) συναρτήσει των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ, λ) δίνονται από τις σχέσεις:



Σχήμα 3.28 Το εγκάρσιο επιφανειακό σύστημα αναφοράς στη σφαίρα

$$u = \arctan\left(\frac{1}{\cot\varphi \cos\lambda}\right) \text{ και } v = \arcsin(\cos\varphi \sin\lambda),$$

και οι αντίστροφές τους από τις σχέσεις:

$$\varphi = \arcsin(\cos v \sin u) \text{ και } \lambda = \arctan\left(\frac{1}{\cot v \cos u}\right).$$

Στις σχέσεις αυτές έχει ληφθεί ως κεντρικός μεσημβρινός αυτός που διέρχεται από το Αστεροσκοπείο του Greenwich με $\lambda_0=0^\circ$.

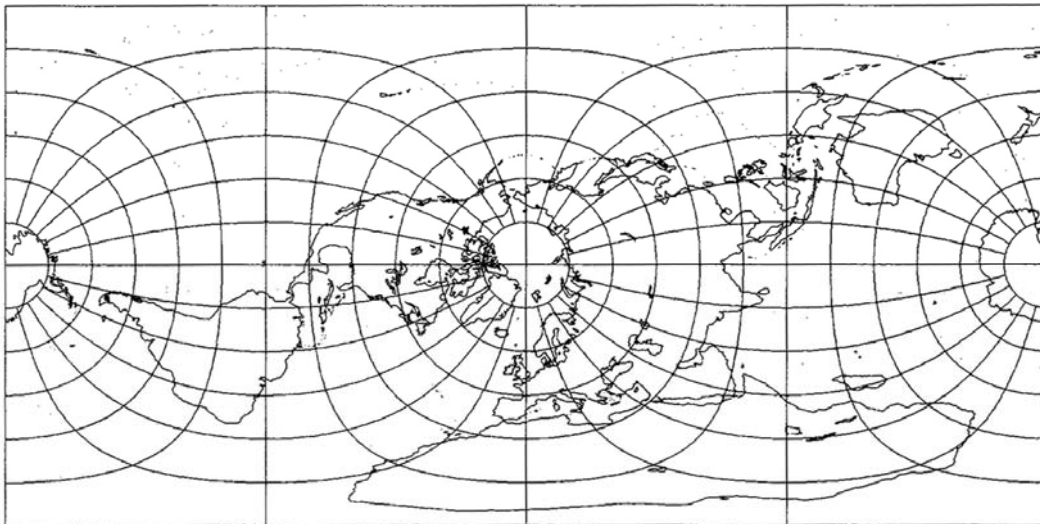
3.5.1 Εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή – Cassini

Η ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2.1 έχει ένα σημαντικό πλεονέκτημα την απλότητα, όμως μόνον οι περιοχές γύρω από τον ισημερινό απεικονίζονται με μικρές παραμορφώσεις. Αν η προβολή αυτή γίνει εγκάρσια και επιλεγεί κεντρικός μεσημβρινός στο κέντρο της απεικονιζόμενης περιοχής τότε η παράγωγη προβολή θα απεικονίζει την έκταση που μας ενδιαφέρει με μικρές σχετικά παραμορφώσεις. Έτσι, λοιπόν ορίζεται ως εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή (Cassini) η απεικόνιση με:

$$\begin{aligned} x &= R v, \\ y &= R u. \end{aligned}$$

Η κλίμακα κατά τη διεύθυνση ν θα είναι: $m_\nu=1$, ενώ κατά τη διεύθυνση u είναι:

$$m_u = \frac{1}{\cos \nu}.$$



Σχήμα 3.29 Η προβολή Cassini

Στο Σχήμα 3.29 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της Προβολής Cassini για ολόκληρη την επιφάνεια της γης.

3.5.2 Εγκάρσια Μερκατορική προβολή

Ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόστηκε στην ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή με σκοπό να μετατραπεί στην ορθή Μερκατορική, η εγκάρσια Μερκατορική προβολή προκύπτει από την προβολή Cassini μεταθέτοντας τα x με κατάλληλο τρόπο ώστε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας. Η εγκάρσια Μερκατορική προβολή στη σφαίρα ορίζεται από τις σχέσεις:

$$x = R \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\nu}{2} \right),$$

$$y = R u.$$

Επειδή η απεικόνιση είναι σύμμορφη, για τις κύριες κλίμακες θα ισχύει:

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos \nu}.$$

Οι σχέσεις της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής στο ελλειψοειδές μπορούν να προκύψουν από την εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή - Cassini εφαρμόζοντας τη συνθήκη της συμμορφίας ή με τη βοήθεια αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων. Οι σχέσεις της προβολής μπορούν επιπλέον να αναπτυχθούν με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων σε σειρές. Έτσι, για περιοχές έκτασης 10° - 12° κατά τη διεύθυνση του γεωγραφικού μήκους (λ) και μέχρι το γεωγραφικό πλάτος (φ) των 61° , οι ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) προσδιορίζονται από τις γεωγραφικές (φ, λ) με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x = N\Delta\lambda \cos \varphi + \frac{N\Delta\lambda^3 \cos^3 \varphi}{6} (1 - t^2 + n^2) + \frac{N\Delta\lambda^5 \cos^5 \varphi}{120} & \begin{pmatrix} 5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - \\ - 58t^2 n^2 + 13n^4 + 4n^6 - \\ - 64t^2 n^4 - 24t^2 n^6 \end{pmatrix} + \\ + \frac{N\Delta\lambda^7 \cos^7 \varphi}{5.040} (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6), \\ y = M + \frac{N\Delta\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{N\Delta\lambda^4 \sin \varphi \cos^3 \varphi}{24} (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) + \\ + \frac{N\Delta\lambda^6 \sin \varphi \cos^5 \varphi}{720} & \begin{pmatrix} 61 - 58t^2 + t^4 + 270n^2 - 330t^2 n^2 + 445n^4 + 324n^6 - \\ - 680t^2 n^4 + 88n^8 - 600t^2 n^6 - 192t^2 n^8 \end{pmatrix} + \\ + \frac{N\Delta\lambda^8 \sin \varphi \cos^7 \varphi}{40.320} & (1.385 - 3.111t^2 + 543t^4 - t^6), \end{aligned}$$

όπου $t = \tan \varphi$, $n^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς, M το τόξο μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι το πλάτος φ , $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό λ_0 και N η ακτίνα της κυρίας καθέτου.

Οι γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) προσδιορίζονται από τις ορθογώνιες (x, y) με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = -\frac{x^2 t_1}{2\rho_1 N_1} + \frac{x^4 t_1}{24\rho_1 N_1^3} (5 + 3t_1^2 + n_1^2 - 4n_1^4 - 9t_1^2 n_1^2) - \\ - \frac{x^6 t_1}{720\rho_1 N_1^5} & \begin{pmatrix} 61 + 90t_1^2 + 46n_1^2 + 45t_1^4 - 252t_1^2 n_1^2 - 3n_1^4 + 100n_1^6 - 66t_1^2 n_1^4 - \\ - 90t_1^4 n_1^2 + 88n_1^8 + 225t_1^4 n_1^4 + 84t_1^2 n_1^6 - 192t_1^2 n_1^8 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^8 t_1}{40.320 \rho_1 N_1^7} (1.385 + 3.633 t_1^2 + 4.095 t_1^4 + 1.574 t_1^6), \\
\Delta\lambda = & \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{x^3}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t_1^2 + n_1^2) + \frac{x^5}{120 N_1^5 \cos \varphi_1} \left(\begin{aligned} & 5 + 28 t_1^2 + 6 n_1^2 + 24 t_1^4 + \\ & + 8 t_1^2 n_1^2 - 3 n_1^4 - 4 n_1^6 + \\ & + 4 t_1^2 n_1^4 + 24 t_1^2 n_1^6 \end{aligned} \right) - \\
& - \frac{x^7}{5.040 N_1^7 \cos \varphi_1} (61 + 662 t_1^2 + 1.320 t_1^4 + 720 t_1^6),
\end{aligned}$$

όπου φ_1 είναι το γεωγραφικό πλάτος της προβολής κάθε σημείου στον κεντρικό μεσημβρινό κατά τη διεύθυνση της γεωδαισιακής γραμμής, είναι δηλαδή εκείνο το γεωγραφικό πλάτος που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού $M_1 = y$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό λ_0 , N_1 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και ρ_1 η ακτίνα καμπυλότητας του μεσημβρινού στο γεωγραφικό πλάτος φ_1 , $t_1 = \tan \varphi_1$ και $n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_1$ στο γεωγραφικό πλάτος φ_1 , με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Ο προσδιορισμός της σύγκλισης των μεσημβρινών (γ) από γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) γίνεται με τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\gamma = & \Delta\lambda \sin \varphi + \frac{\Delta\lambda^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{3} (1 + 3n^2 + 2n^4) + \\
& + \frac{\Delta\lambda^5 \sin \varphi \cos^4 \varphi}{15} \left(\begin{aligned} & 2 - t^2 + 15n^2 + 35n^4 - 15t^2 n^2 + 33n^6 - \\ & - 50t^2 n^4 + 11n^8 - 60t^2 n^6 - 24t^2 n^8 \end{aligned} \right) + \\
& + \frac{\Delta\lambda^7 \sin \varphi \cos^6 \varphi}{315} (17 - 26t^2 + 2t^4).
\end{aligned}$$

όπου $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό λ_0 , $t = \tan \varphi$ και $n^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Ενώ ο προσδιορισμός της σύγκλισης των μεσημβρινών (γ) από ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) γίνεται με τη σχέση:

$$\gamma = \frac{x t_1}{N_1} - \frac{x^3 t_1}{3 N_1^3} (1 + t_1^2 - n_1^2 - 2n_1^4) + \frac{x^5 t_1}{15 N_1^5} \left(\begin{aligned} & 2 + 5t_1^2 + 2n_1^2 + 3t_1^4 + t_1^2 n_1^2 + 9n_1^4 + 20n_1^6 - \\ & - 7t_1^2 n_1^4 - 27t_1^2 n_1^6 + 11n_1^8 - 24t_1^2 n_1^8 \end{aligned} \right) -$$

$$-\frac{x^7 t_1}{315 N_1^7} (17 + 77 t_1^2 + 105 t_1^4 + 45 t_1^6).$$

όπου N_1 η ακτίνα της κυρίας καθέτου, $t_1 = \tan \varphi_1$ και $n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_1$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και φ_1 το γεωγραφικό πλάτος της προβολής κάθε σημείου στον κεντρικό μεσημβρινό κατά τη διεύθυνση της γεωδαισιακής γραμμής.

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης (m) προσδιορίζεται από τις γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) με τη βοήθεια της σχέσης:

$$m = 1 + \frac{\Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi}{2} (1 + n^2) + \frac{\Delta \lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} \left(5 - 4t^2 + 14n^2 + 13n^4 - 28t^2 n^2 + 4n^6 - 48t^2 n^4 - 24t^2 n^6 \right) + \frac{\Delta \lambda^6 \cos^6 \varphi}{720} (61 - 148t^2 + 16t^4).$$

όπου $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό λ_0 , $t = \tan \varphi$ και $n^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

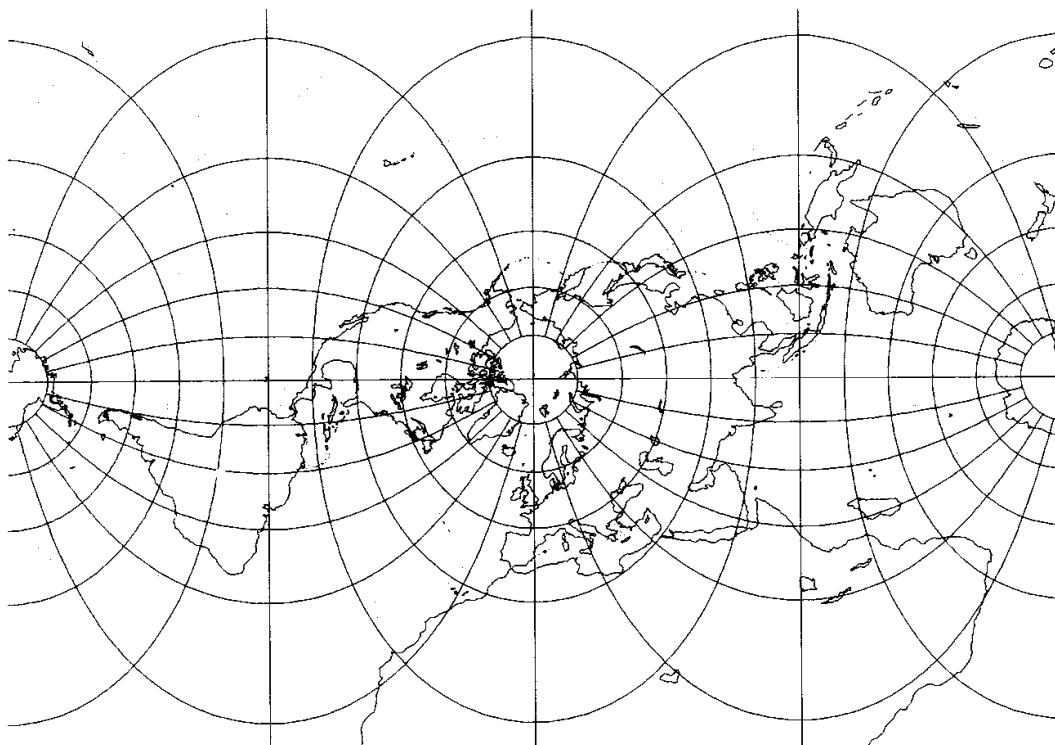
Ενώ, τέλος, ο προσδιορισμός της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης (m) από τις ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2N_1^2} (1 + n_1^2) + \frac{x^4}{24N_1^4} (1 + 6n_1^2 + 9n_1^4 + 4n_1^6 - 24t_1^2 n_1^4 - 24t_1^2 n_1^6) + \frac{x^6}{720N_1^6}.$$

όπου N_1 η ακτίνα της κυρίας καθέτου, $t_1 = \tan \varphi_1$ και $n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_1$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και φ_1 το γεωγραφικό πλάτος της προβολής κάθε σημείου στον κεντρικό μεσημβρινό κατά τη διεύθυνση της γεωδαισιακής γραμμής.

Στο Σχήμα 3.30 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρη την επιφάνεια της γης.

Η εγκάρσια Μερκατορική προβολή έχει μεγάλη εφαρμογή στις περισσότερες χώρες του κόσμου. Χρησιμοποιείται σε διεθνή κλίμακα ως Παγκόσμια Μερκατορική Προβολή (Universal Transverse Mercator – UTM). Από το έτος 1987 το κρατικό σύστημα αναφοράς της χώρας εφαρμόζεται σε αυτήν την προβολή.



Σχήμα 3.30 Η εγκάρσια Μερκατορική προβολή

3.6 Πλάγιες απεικονίσεις

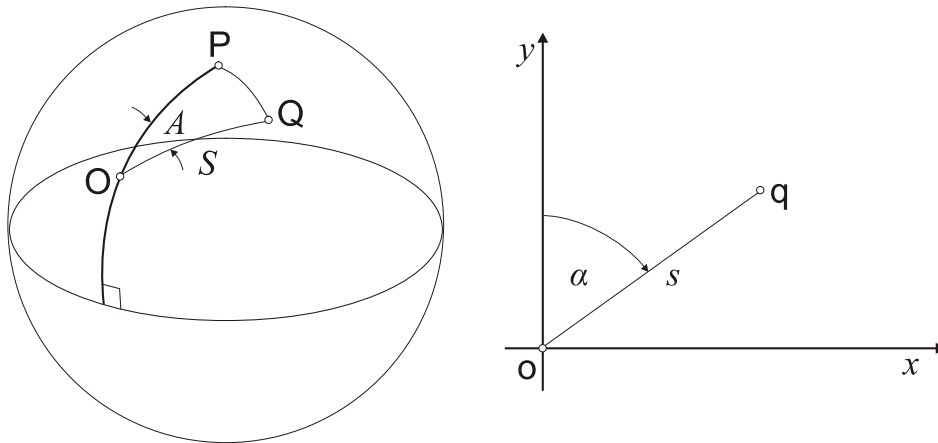
Όλες οι ορθές απεικονίσεις μπορούν να γίνουν πλάγιες εφαρμόζοντας μια στροφή του γεωγραφικού συστήματος συντεταγμένων (φ, λ) . Επιλέγοντας κατάλληλα τη στροφή μπορούμε να περιορίσουμε σημαντικά τις παραμορφώσεις στην περιοχή που μας ενδιαφέρει. Από τη μεγάλη ποικιλία των πλαγίων απεικονίσεων θα μελετήσουμε μία εξ' αυτών την πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή ή προβολή Hatt, γιατί σε αυτήν την απεικόνιση εφαρμοζόταν το παλαιό κρατικό σύστημα αναφοράς της χώρας.

3.6.1 Πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή - Hatt

Η προβολή Hatt είναι επίπεδη απεικόνιση. Το επίπεδο της απεικόνισης εφάπτεται στην επιφάνεια της σφαίρας στο σημείο O που ονομάζεται κέντρο της προβολής. Ο μεσημβρινός που διέρχεται από το σημείο O είναι η αφετηρία των αζιμουθίων (Σχήμα 3.31). Κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας Q μπορεί να οριστεί από

τις πολικές του συντεταγμένες (S, A) , όπως και η εικόνα του q στο επίπεδο (s, α) . Η προβολή Hatt ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} s &= S, \\ \alpha &= A. \end{aligned}$$



Σχήμα 3.31 Η γεωμετρική αρχή της προβολής Hatt

Εάν εκφράσουμε τις σχέσεις ως προς το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= s \sin \alpha = S \sin A, \\ y &= s \cos \alpha = S \cos A. \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο: OPQ (Σχήμα 3.31) οι πολικές συντεταγμένες (S, A) ως προς τις γεωγραφικές (φ, λ) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} S &= R \arccos(\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)), \\ A &= \arcsin\left(\frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\sin S}\right), \end{aligned}$$

όπου φ_0, λ_0 οι γεωγραφικές συντεταγμένες του κέντρου της προβολής (σημείο O).

Οι αντίστροφες σχέσεις της απεικόνισης Hatt είναι:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \arcsin\left(\frac{\sin S \sin A}{\cos \varphi}\right) \text{ και} \\ \varphi &= \arcsin(\cos S \sin \varphi_0 + \sin S \cos \varphi_0 \cos A), \end{aligned}$$

όπου:

$$A = \arctan \frac{x}{y} \text{ και}$$

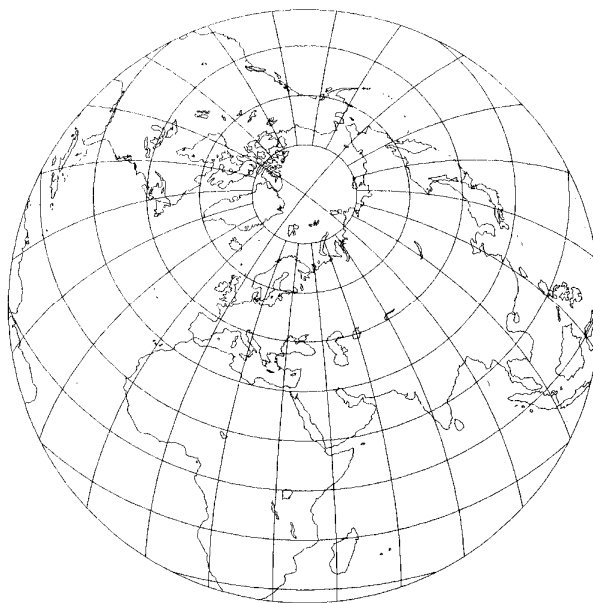
$$S = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Η πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή δεν είναι ούτε σύμμορφη ούτε ισοδύναμη. Η προβολή αυτή είναι ισαπέχουσα, διατηρεί δηλαδή τις αποστάσεις αναλλοίωτες κατά τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας:

$$m_S = 1,$$

ενώ κατά την κάθετο διεύθυνση η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης είναι:

$$m_A = \frac{S}{\sin S}$$



Σχήμα 3.32 Η προβολή Hatt

Στο Σχήμα 3.32 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της προβολής Hatt.

Οι σχέσεις της πλάγιας αζιμουθιακής ισαπέχουσας προβολής (Hatt) στο ελλειψοειδές μπορούν να αναπτυχθούν με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων σε σειρές. Έτσι, για περιοχές έκτασης $1^\circ \times 1^\circ$ κατά τη διεύθυνση του γεωγραφικού

μήκους (λ) και του γεωγραφικού πλάτους (φ), οι ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) προσδιορίζονται από τις γεωγραφικές (φ, λ) με τις σχέσεις:

$$x = N_0 \Delta \lambda \cos \varphi_0 - \rho_0 \Delta \lambda \Delta \varphi \sin \varphi_0 - \frac{1}{6} \rho_0 \Delta \lambda \Delta \varphi^2 \cos \varphi_0 (2 + 9 t_0^2 n_0^2) -$$

$$- \frac{1}{6} N_0 \Delta \lambda^3 \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 ,$$

$$y = \rho_0 \Delta \varphi + \frac{1}{2} N_0 \Delta \lambda^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{3}{2 N_0} \rho_0^2 \Delta \varphi^2 t_0 n_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \rho_0 \Delta \lambda^2 \Delta \varphi (1 - 4 \sin^2 \varphi_0 + n_0^2 \cos^2 \varphi_0) .$$

όπου N_0 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και ρ_0 η ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινού στο κέντρο φύλλου (φ_0, λ_0), $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ και $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$ η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος και πλάτος από το κέντρο φύλλου, $t_0 = \tan \varphi_0$ και $n_0^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi_0$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και φ_0 το γεωγραφικό πλάτος του κέντρου φύλλου.

Οι γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) προσδιορίζονται από τις ορθογώνιες (x, y) στην απεικόνιση αυτή με τις σχέσεις:

$$\Delta \varphi = \frac{y}{\rho_0} - \frac{x^2 t_0}{2 \rho_0 N_0} - \frac{3 y^2 t_0 n_0^2}{2 \rho_0 N_0} - \frac{x^2 y (1 + 3 t_0^2 + n_0^2 - 9 t_0^2 n_0^2)}{6 \rho_0 N_0^2} ,$$

$$\Delta \lambda = \frac{x}{N_0 \cos \varphi_0} + \frac{x y t_0}{N_0^2 \cos \varphi_0} + \frac{x y^2 (1 + 3 t_0^2 + n_0^2)}{3 N_0^3 \cos \varphi_0} - \frac{x^3 t_0^2}{3 N_0^3 \cos \varphi_0} ,$$

όπου N_0 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και ρ_0 η ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινού στο κέντρο φύλλου (φ_0, λ_0), $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ και $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$ η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος και πλάτος από το κέντρο φύλλου, $t_0 = \tan \varphi_0$ και $n_0^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi_0$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και φ_0 το γεωγραφικό πλάτος του κέντρου φύλλου.

Ο προσδιορισμός της σύγκλισης των μεσημβρινών (γ) από ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) γίνεται με τη σχέση:

$$\gamma = \frac{x t_0}{N_0} + \frac{x y (2 + 3 t_0^2 + 2 n_0^2)}{3 N_0^2} + \frac{(3 x y^2 - x^3) \sin \varphi_0}{3 N_0^3 \cos^3 \varphi_0} ,$$

όπου N_0 η ακτίνα της κυρίας καθέτου στο κέντρο φύλλου (φ_0, λ_0) , $t_0 = \tan \varphi_0$ και $n_0^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_0$, με e την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και φ_0 το γεωγραφικό πλάτος του κέντρου φύλλου.

Η προβολή αυτή είχε μεγάλη εφαρμογή στο παρελθόν γιατί σε αυτήν εφαρμόζοταν το κρατικό σύστημα αναφοράς της χώρας.

3.7 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου, Α.Μ. "Τα προβολικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα". Εισήγηση στο Σεμινάριο: Τάσεις και εξελίξεις στην επιστήμη του Αγρονόμου και Τοπογράφου Μηχανικού. Πανελλήνιος Σύλλογος Διπλωματούχων Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Αθήνα, Μάρτιος, 1985, σ. 45.
- Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.
- Bugayevskiy, L.M. and J.P. Snyder. *Map Projections. A Reference Manual*. Taylor & Francis, London, 1995, p 328.
- Cuenin, R. *Cartographie Generale*. Tome 1. Editions Eyrolles, Paris, 1972, p. 324.
- Maling, D. H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.
- Maling, D. H. *Measurements from Maps*. Pergamon Press. Oxford, 1989, p. 577.
- Νάκος, Β. "Αυτόματη Χαρτογράφηση για Χάρτες Μικρής Κλίμακας". Διπλωματική Εργασία. Ανώτατη Σχολή Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1979, σελ. 81.
- Νάκος, Β. και Β. Φιλιππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.
- Richardus, P. and R. K. Adler. *Map projections*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1972, p. 174.
- Snyder, J.P. *An Album of Map Projections*. United States Geological Survey, Professional Paper **1453**, 1989, p. 249.
- Thomas, P. D. *Conformal projections in geodesy and cartography*. U.S. Dept. of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication No. 251. Washington, 1952, p. 142.

Κεφάλαιο 4

4. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

4.1 Εισαγωγή στα Ελληνικά χαρτογραφικά συστήματα

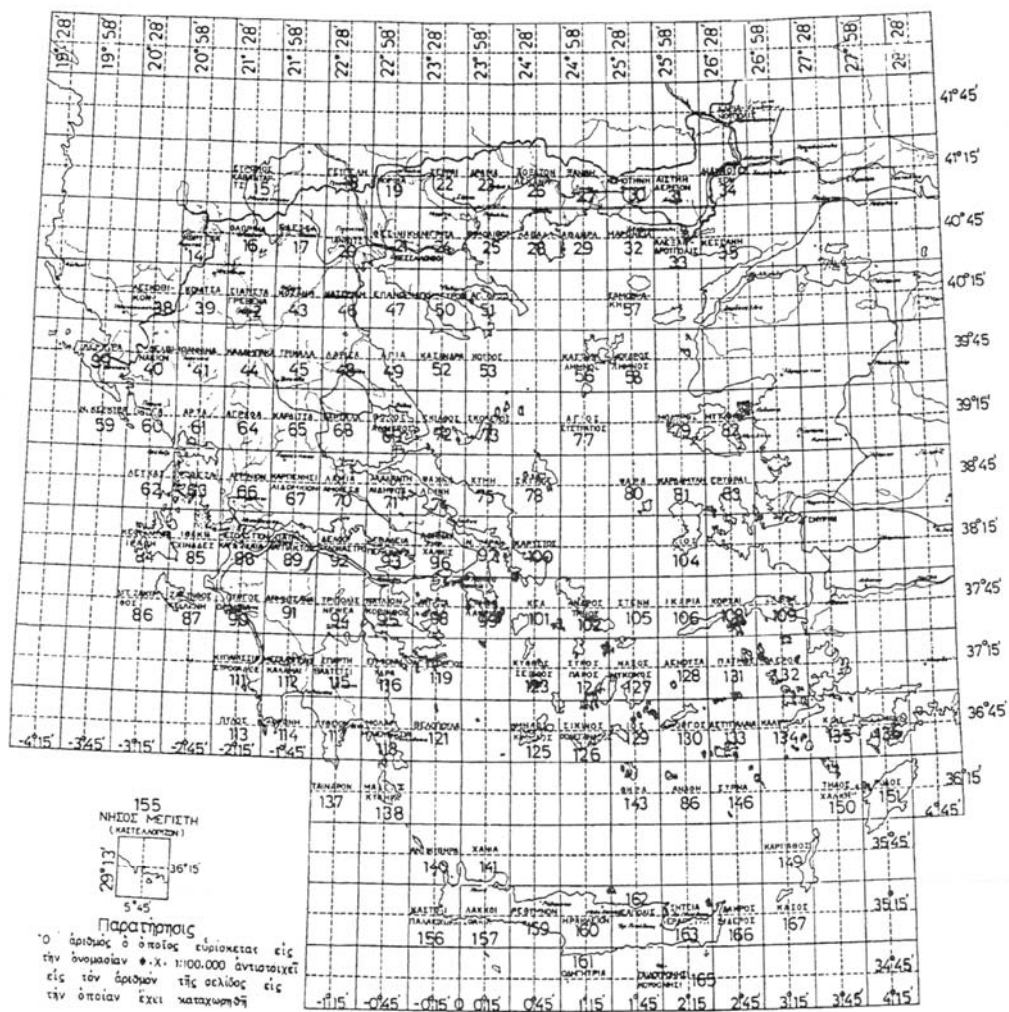
Με τον όρο σύστημα απεικόνισης ορίζουμε μια απεικόνιση εφαρμοσμένη σε συγκεκριμένο ελλειψοειδές. Το σύστημα απεικόνισης έτσι όπως ορίστηκε αποτελεί ένα σύστημα αναφοράς του γεωγραφικού χώρου. Ένα σύστημα απεικόνισης αξιοποιείται σε γεωδαιτικές και χαρτογραφικές εργασίες προσδιορίζοντας τη θέση στο χώρο οποιουδήποτε αντικειμένου επιθυμούμε. Στην Ελλάδα σήμερα βρίσκονται σε χρήση τέσσερα συστήματα απεικονίσεων.

4.2 Το σύστημα Hatt

Το σύστημα Hatt εφαρμόζεται στην Πλάγια Αζιμουθιακή Ισαπέχουσα Προβολή και στο ελλειψοειδές Bessel (με μεγάλο ημιάξονα $a=6.377.397,155\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=0,003342773$). Η απεικόνιση αυτή όπως φαίνεται και από την ονομασία της είναι ισαπέχουσα, δηλαδή, διατηρεί αναλλοίωτα τα μήκη στοιχειωδών γραμμών από το ελλειψοειδές στο επίπεδο κατά τις διευθύνσεις που συνδέουν το κέντρο της προβολής με τα σημεία του χώρου. Ολόκληρη η χώρα στο σύστημα Hatt έχει χωριστεί σε 130 περίπου σφαιροειδή τραπέζια διαστάσεων $30'\times 30'$, κάθε ένα από τα οποία αποτελεί και διαφορετικό τοπικό σύστημα (Σχήμα 4.1). Η αφετηρία του συστήματος είναι το Αστεροσκοπείο Αθηνών από το μεσημβρινό του οποίου μετράται το γεωγραφικό μήκος. Τα κέντρα των σφαιροειδών τραπεζίων αποτελούν κέντρα της προβολής και ονομάζονται κέντρα φύλλου, οι γεωγραφικές τους συντεταγμένες βρίσκονται σε ακέραιες μοίρες και $15'$ ή $45'$. Στην έκταση κάθε σφαιροειδούς τραπέζιου οι παραμορφώσεις μηκών φθάνουν τα 5 ppm (parts per million), δηλαδή οι παραμορφώσεις είναι της τάξης του 1:200.000. Το σύστημα Hatt αποτελούσε το επίσημο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς της χώρας και την ευθύνη της διαχείρισής του είχε η ΓΥΣ (Γεωγραφική

Υπηρεσία Στρατού). Σήμερα, το σύστημα αυτό βρίσκεται σε φθίνουσα χρήση λόγω των μειονεκτημάτων του. Μεταξύ των οποίων ξεχωρίζει και η ασυμβατότητά του με τις σύγχρονες τεχνολογίες δεδομένου ότι το ελλειψοειδές δεν είναι γεωκεντρικό και ως εκ τούτου δεν μπορούν εύκολα σε αυτό να εκφραστούν δεδομένα προερχόμενα από την τεχνολογία των GPS. Στις εφαρμογές αντικαθίσταται πλέον από το σύστημα ΕΓΣΑ'87.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ
ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ Ο.Χ. ΚΛΙΜΑΚΟΣ 1:100.000



Σχήμα 4.1 Η διανομή του συστήματος Hatt

4.3 Το σύστημα UTM-6° (Universal Transverse Mercator)

Το σύστημα UTM εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή απεικόνιση και αρχικά στο ελλειψοειδές Hayford. Σήμερα στο σύστημα αυτό το ελλειψοειδές Hayford αντικαταστάθηκε από το ελλειψοειδές GRS-80 (με μεγάλο ημιάξονα $a=6378137\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=1/298,25722$). Η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή είναι σύμμορφη απεικόνιση, δηλαδή διατηρεί αναλλοίωτη τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων από το ελλειψοειδές στο επίπεδο. Στο σύστημα UTM ολόκληρη η επιφάνεια της γης χωρίζεται σε 60 ζώνες (τοπικά συστήματα) πλάτους 6° η κάθε μία. Η Ελλάδα απεικονίζεται σε δύο ζώνες με κεντρικούς μεσημβρινούς αντίστοιχα $\lambda_0=21^\circ$ (34η ζώνη) και $\lambda_0=27^\circ$ (35η ζώνη) από το μεσημβρινό του Greenwich. Ο συντελεστής κλίμακας (k_0) της απεικόνισης είναι 0.9996, ενώ στις τετμημένες (E-eastings) προστίθεται η σταθερά 500.000m. Οι παραμορφώσεις αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό και είναι της τάξης των 500ppm (δηλαδή 1:2.000). Το σύστημα UTM έχει παγκόσμια χρήση και στην Ελλάδα το διαχειρίζεται αποκλειστικά η ΓΥΣ.

4.4 Το σύστημα ΕΜΠ-3° (Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή)

Το σύστημα ΕΜΠ εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή και στο ελλειψοειδές Bessel (με μεγάλο ημιάξονα $a=6.377.397,155\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=0,003342773$). Η απεικόνιση έχει την ιδιότητα της συμμορφίας. Με το σύστημα ΕΜΠ-3° η χώρα χωρίζεται σε τρεις ζώνες πλάτους 3°, με αφετηρία το Αστεροσκοπείο Αθηνών. Ο κεντρικός μεσημβρινός της πρώτης ζώνης είναι ο μεσημβρινός με $\lambda_0=-3^\circ$, της δεύτερης ζώνης $\lambda_0=0^\circ$ και της τρίτης $\lambda_0=3^\circ$. Ο συντελεστής κλίμακας (k_0) της απεικόνισης είναι 0.9999, ενώ στις τετμημένες (X) προστίθεται η σταθερά 200.000m και στις τεταγμένες (Y) αφαιρείται η σταθερά που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι τον παράλληλο των 34°. Οι παραμορφώσεις στο σύστημα αυτό αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό. Στην έκταση κάθε ζώνης οι παραμορφώσεις είναι της τάξης των 100ppm (δηλαδή 1:10.000). Το σύστημα της ΕΜΠ δημιουργήθηκε για τις ανάγκες του Υπουργείου Δημοσίων Έργων λόγω των μειονεκτημάτων που παρουσίαζε το σύστημα Hatt. Η Επιχείρηση Πολεοδομική Ανασυγκρότηση (ΕΠΑ'83) βασίστηκε σε αυτό το σύστημα αναφοράς. Σήμερα, παρουσιάζει και αυτό φθίνουσα χρήση καθώς αντικαθίσταται από το ΕΓΣΑ'87.

4.5 Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΕΓΣΑ'87)

Το σύστημα ΕΓΣΑ'87 εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή και στο ελλειψοειδές GRS-80 (με μεγάλο ημιάξονα $a=6378137\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=1/298,25722$). Η απεικόνιση έχει την ιδιότητα της συμμορφίας. Με το σύστημα αυτό η χώρα περιέχεται σε μία μόνο ζώνη με κεντρικό μεσημβρινό $\lambda_0=24^\circ$ από το μεσημβρινό του Greenwich. Ο συντελεστής κλίμακας (k_0) είναι 0.9996, ενώ στις τετμημένες (X) προστίθεται η σταθερά 500.000m. Όπως και στις άλλες εφαρμογές της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής οι παραμορφώσεις αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό. Οι μέγιστες παραμορφώσεις στην έκταση της χώρας φθάνουν στα 670 ppm. Το σύστημα ΕΓΣΑ'87 είναι συμβατό με τις απαιτήσεις της σύγχρονης τεχνολογίας δεδομένου ότι εφαρμόζεται σε γεωκεντρικό ελλειψοειδές και αποτελεί πλέον σήμερα το επίσημο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς της χώρας. Την ευθύνη της διαχείρισης του συστήματος έχει ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ).

4.6 Μετατροπές μεταξύ διαφορετικών προβολικών συστημάτων

Σε πολλές χαρτογραφικές αλλά και γεωδαιτικές εφαρμογές οι συντεταγμένες ενός συνόλου σημείων του γεωγραφικού χώρου χρειάζεται να μετατραπούν από ένα προβολικό σύστημα σε κάποιο άλλο. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά απλή αν τα δύο συστήματα αναφέρονται στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (datum – ελλειψοειδές) και υλοποιείται εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν οι δύο προβολές. Αν όμως τα δύο συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum – ελλειψοειδή), τότε η διαδικασία της μετατροπής γίνεται πολύπλοκη και σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις μπορεί να υλοποιηθεί μόνο προσεγγιστικά με τη βοήθεια γεωμετρικών μετασχηματισμών (π.χ. ομοπαράλληλο μετασχηματισμό) ή πολυωνύμων (π.χ. $2^{\text{ου}}$ βαθμού).

Στις περιπτώσεις που τα δύο προβολικά συστήματα ανήκουν στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (datum – ελλειψοειδές), τότε η μετατροπή γίνεται προσδιορίζοντας τις γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) από τις ορθογώνιες (x_1, y_1), εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν το πρώτο προβολικό σύστημα. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες (x_2, y_2) από τις γεωγραφικές (φ, λ), εφαρμόζοντας τις αντίστροφες σχέσεις που ορίζουν το δεύτερο προβολικό σύστημα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι αν κάποιο από τα δύο προβολικά συστήματα είναι κωνική ή επίπεδη απεικόνιση τότε είναι απαραίτητη και η ανάλογη μετατροπή των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) σε ορθογώνιες ή αντίστροφα. Με τη διαδικασία αυτή η μετατροπή γίνεται με την ακρίβεια που συνοδεύει τις σχέσεις που ορίζουν τα δύο προβολικά συστήματα και επομένως, αν η ακρίβεια είναι ικανοποιητική, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε γεωδαιτικές

όσο και σε χαρτογραφικές εργασίες. Κλασικό παράδειγμα της περίπτωσης αυτής αποτελεί η μετατροπή συντεταγμένων από το σύστημα Hatt στο σύστημα της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής 3° (ΕΜΠ-3°) και αντίστροφα.

Στις περιπτώσεις που τα δύο προβολικά συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum – ελλειψοειδή) και είναι γνωστή η μεταξύ τους σχέση, δηλαδή γνωρίζουμε το διάνυσμα μετάθεσης σε γεωκεντρικές συντεταγμένες $[\Delta X_{12}, \Delta Y_{12}, \Delta Z_{12}]$ μεταξύ των δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς, τότε η μετατροπή μπορεί να γίνει με τα ακόλουθα στάδια. Αρχικά, προσδιορίζονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες (φ_1, λ_1) από τις ορθογώνιες (x_1, y_1) , εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν το πρώτο προβολικό σύστημα. Ακολουθεί η μετατροπή των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ_1, λ_1) σε γεωκεντρικές (X_1, Y_1, Z_1) στο πρώτο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς με τη βοήθεια των σχέσεων:

$$X_1 = N_1 \cos \varphi_1 \cos \lambda_1,$$

$$Y_1 = N_1 \cos \varphi_1 \sin \lambda_1,$$

$$Z_1 = N_1 (1 - e_1^2) \sin \varphi_1,$$

όπου N_1 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και e_1 πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς σε γεωγραφικό πλάτος φ_1 .

Στο επόμενο στάδιο, εφαρμόζεται το γνωστό διάνυσμα μετάθεσης σε γεωκεντρικές συντεταγμένες μεταξύ των δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς ώστε να προκύψουν οι γεωκεντρικές (X_2, Y_2, Z_2) στο δεύτερο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{pmatrix}.$$

Ακολουθεί η μετατροπή των γεωκεντρικών συντεταγμένων σε γεωγραφικές (φ_2, λ_2) στο δεύτερο γεωδαιτικό σύστημα, χρησιμοποιώντας τις αντίστροφες των σχέσεων που εφαρμόστηκαν προηγουμένως:

$$\lambda_2 = \arctan \left(\frac{Y_2}{X_2} \right),$$

$$\varphi_2 = \arctan \left(\frac{Z_2 + e_2^2 N_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \right).$$

όπου N_2 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και e_2 πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς σε γεωγραφικό πλάτος φ_2 .

Από τις σχέσεις αυτές ο προσδιορισμός του γεωγραφικού πλάτους (φ_2) γίνεται με προσεγγιστική τεχνική μέσω διαδοχικών επαναλήψεων μέχρι να επιτευχθεί η απαραίτητη ακρίβεια. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες (x_2, y_2) από τις γεωγραφικές (φ_2, λ_2), εφαρμόζοντας τις αντίστροφες σχέσεις που ορίζουν το δεύτερο προβολικό σύστημα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι και στην περίπτωση αυτή αν κάποιο από τα δύο προβολικά συστήματα είναι κωνική ή επίπεδη απεικόνιση τότε είναι απαραίτητη και η ανάλογη μετατροπή των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) σε ορθογώνιες ή αντίστροφα. Με τη διαδικασία αυτή η μετατροπή γίνεται με ακρίβεια της τάξης μερικών cm, επομένως, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε ορισμένες γεωδαιτικές όσο και σε χαρτογραφικές εργασίες.

Τέλος, στις περιπτώσεις που τα δύο προβολικά συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum – ελλειψοειδή) και δεν είναι γνωστή η μεταξύ τους σχέση, η μετατροπή μπορεί να γίνει με προσεγγιστικές τεχνικές. Η διαδικασία της μετατροπής προϋποθέτει να είναι γνωστές οι συντεταγμένες ορισμένων σημείων και στα δύο προβολικά συστήματα. Εφαρμόζοντας είτε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ή πολυώνυμα μπορούν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των γεωμετρικών μετασχηματισμών ή των πολυώνυμων με τη βοήθεια των σημείων με γνωστές συντεταγμένες και στη συνέχεια μέσω των συντελεστών να γίνει η μετατροπή ακολουθώντας μια προσεγγιστική τεχνική. Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται περισσότερα των απαραίτητων σημείων με γνωστές συντεταγμένες στα δύο συστήματα ώστε οι συντελεστές να προσδιοριστούν ύστερα από διαδικασία συνόρθωσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (MET). Έτσι, είναι δυνατός ο έλεγχος της ακρίβειας της μετατροπής ώστε να ικανοποιούνται οι ανάγκες της ενδεχόμενης εφαρμογής.

Σε αρκετές περιπτώσεις μετατροπών εφαρμόζεται ως γεωμετρικός μετασχηματισμός ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

όπου (x_1, y_1) οι ορθογώνιες συντεταγμένες στο πρώτο προβολικό σύστημα, (x_2, y_2) οι συντεταγμένες στο δεύτερο προβολικό σύστημα και a_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) οι συντελεστές του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού.

Περισσότερα στοιχεία για τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό καθώς και άλλων γεωμετρικών μετασχηματισμών δίνονται στο Κεφάλαιο 9, που περιλαμβάνει μια αναλυτική παρουσίασή τους.

Σε περιπτώσεις μετατροπών που εφαρμόζονται πολυώνυμα συνήθως χρησιμοποιείται ένα πλήρες πολυώνυμο 2^{ov} βαθμού, το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ x_1^2 \\ y_1^2 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix},$$

όπου (x_1, y_1) οι ορθογώνιες συντεταγμένες στο πρώτο προβολικό σύστημα, (x_2, y_2) οι συντεταγμένες στο δεύτερο προβολικό σύστημα και a_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Περισσότερα στοιχεία για την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, όταν έχουμε γνωστά περισσότερα από τα απαραίτητα σημεία για τον προσδιορισμό των συντελεστών είτε του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού ή του πολυωνύμου 2^{ov} βαθμού, δίνονται στο Κεφάλαιο 6, το οποίο περιλαμβάνει μια αναλυτική παρουσίαση των μεθόδων παρεμβολής.

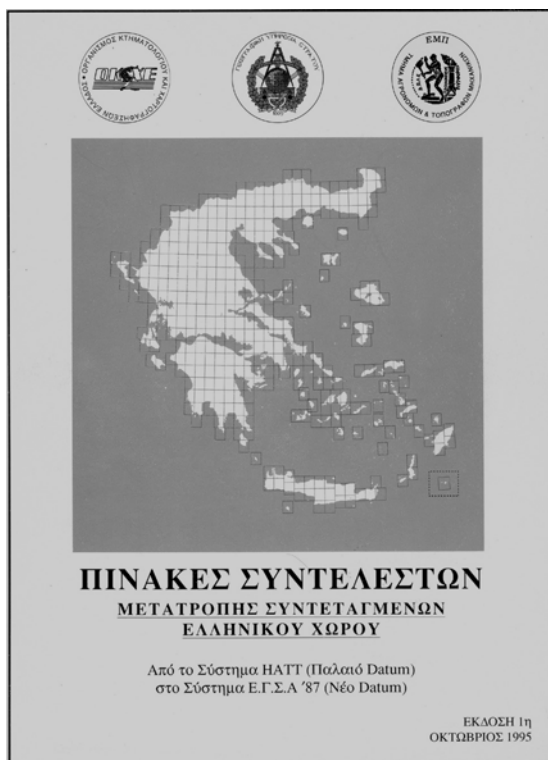
Ειδικότερα για χαρτογραφικές εφαρμογές σχετικές με τη μετατροπή από το παλαιό σύστημα αναφοράς της χώρας (σύστημα Hatt) στο νέο (ΕΓΣΑ'87) και με τη βοήθεια συντεταγμένων των τριγωνομετρικών σημείων του κρατικού δικτύου της χώρας, εκφρασμένες και στα δύο συστήματα, προσδιορίστηκαν οι συντελεστές πολυωνύμων 2^{ov} βαθμού για κάθε φύλλο χάρτη (του συστήματος Hatt) κλίμακας 1:50.000. Με τη βοήθεια των συντελεστών αυτών μπορεί να γίνει η μετατροπή των συντεταγμένων από το παλαιό σύστημα (Hatt) στο σύγχρονο (ΕΓΣΑ'87) με ακρίβεια της τάξης μερικών δεκάδων cm. Οι συντελεστές των πολυωνύμων περιλαμβάνονται σε ειδική έκδοση (Σχήμα 4.2) του Οργανισμού Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδος (ΟΚΧΕ), της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ) και της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΣΑΤΜ-ΕΜΠ). Τα πολυώνυμα 2^{ov} βαθμού που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή είναι της μορφής:

$$X = A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 y^2 + A_5 x y,$$

$$Y = B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 x^2 + B_4 y^2 + B_5 x y,$$

όπου (X, Y) είναι οι ζητούμενες συντεταγμένες στο προβολικό επίπεδο του συστήματος ΕΓΣΑ'87, (x, y) είναι οι γνωστές συντεταγμένες στα προβολικά

επίπεδα του συστήματος Hatt, A0, A1, A2, A3, A4, A5 και B0, B1, B2, B3, B4, B5 οι συντελεστές μετατροπής (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.2 Φυλλάδιο μετατροπών

Περιλαμβανόμενα Φύλλα Χαρτών Κλίμακας 1:50.000		Υπολογισθέντες Πολυωνυμικοί Συντελεστές 2ου Βαθμού			
Κωδικός	Όνομα	A1	Τιμή	B1	Τιμή
037	Αμφιλοχία	A0	236395.18	B0	4293221.14
056	Αστακός	A1	0.9999088	B1	-0.0331876
074	Βόνιτσα	A2	0.0331796	B2	0.9999168
		A3	-3.30 E-09	B3	0.13 E-09
		A4	3.21 E-09	B4	-0.00 E-09
		A5	-0.52 E-09	B5	-6.47 E-09
130	Κάλαμος	A0	236395.55	B0	4293220.55
		A1	0.9998981	B1	-0.0332230
		A2	0.0331868	B2	0.9998956
		A3	-4.86 E-09	B3	1.17 E-09
		A4	3.06 E-09	B4	-0.37 E-09
		A5	-0.03 E-09	B5	-8.87 E-09

Σχήμα 4.3 Πίνακας συντελεστών

4.7 Βιβλιογραφία

- Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.
- Βέης, Γ. *Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς*. Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφήσεων Ελλάδας. Αθήνα, 1987.
- Bugayevskiy, L.M. and J.P. Snyder. *Map Projections. A Reference Manual*. Taylor & Francis, London, 1995, p 328.
- Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. *Πίνακες συντελεστών μετατροπής συντεταγμένων Ελληνικού χώρου* (Εκδοση 1η), Αθήνα, 1995, σ. 108.
- Maling, D. H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.
- Μπαλοδήμου Α. "Εν προβολικόν σύστημα διά την Ελλάδα". *Τεχνικά Χρονικά*. No. 10, 1973.

- Νάκος, Β. και Β. Φιλίππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.
- Thomas, P. D. *Conformal projections in geodesy and cartography*. U. S. Dept. of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication No. **251**. Washington, 1952, p. 142.
- Yang, Q., Snyder, J.P., and Tobler, W.R. *Map Projection Transformation. Principles and Applications*. Taylor & Francis, London, 2000, p. 367.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Κεφάλαιο 5

5. ΧΑΡΤΟΜΕΤΡΙΑ

5.1 Η έννοια της χαρτομετρίας

Η **χαρτομετρία** έχει ορισθεί από τη Διεθνή Χαρτογραφική Ένωση (ICA) ως: «*Η μέτρηση και ο υπολογισμός αριθμητικών τιμών από τους χάρτες...*».

Τέσσερις τύποι μετρήσεων μπορούν να θεωρηθούν ως οι βασικές τεχνικές της χαρτομετρίας:

- μέτρηση αποστάσεων,
- μέτρηση εμβαδού,
- μέτρηση διευθύνσεων,
- καταμέτρηση του αριθμού των στοιχείων που απεικονίζονται στους χάρτες.

Παράγωγα μεγέθη μπορούν να προκύψουν από συνδυασμούς, των ανωτέρω μετρήσεων με άλλα δεδομένα. Για παράδειγμα, η πυκνότητα προκύπτει από συνδυασμό του αριθμού των στοιχείων με το εμβαδόν της έκτασης στην οποία αυτά αναφέρονται. Ο όγκος προκύπτει από εμβαδά επιφανειών και υψομετρικές διαστάσεις που αποδίδονται στους χάρτες με ένα συγκεκριμένο τρόπο (π.χ. με ισαριθμικές), για να εισαχθεί η τρίτη διάσταση. Η κλίση προκύπτει από τη μέτρηση απόστασης μεταξύ σημείων γνωστών υψομέτρων. Δύο από τις προαναφερθείσες πράξεις, η μέτρηση αποστάσεων και η μέτρηση εμβαδών, είναι ιδιαίτερης σημασίας για πολλούς, διαφορετικών ενδιαφερόντων, χρήστες χαρτών. Η μέτρηση των διευθύνσεων, ενώ πρακτικά δεν ενδιαφέρει την πλειονότητα των χρηστών των χαρτών, είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για ορισμένες ειδικές κατηγορίες χρηστών, όπως είναι οι τοπογράφοι και οι πλοηγοί.

Από τον ορισμό της χαρτομετρίας προκύπτουν τρία στάδια που συνθέτουν την όλη διαδικασία. Το πρώτο στάδιο, το οποίο ουσιαστικά υπονοείται και δεν ορίζεται, είναι ο καθορισμός των ορίων του αντικειμένου που μετριέται. Προφανώς πρέπει να είναι γνωστός ο σκοπός της μέτρησης, πριν αρχίσει η διαδικασία. Το δεύτερο στάδιο είναι η μέτρηση αυτή καθεαυτή. Το τρίτο

περιλαμβάνει τη μετατροπή των αποτελεσμάτων της μέτρησης σε μια αριθμητική μορφή, που να καθιστά δυνατή τη σύγκρισή τους με άλλα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί από διαφορετικές πηγές.

Σε ποιές ανθρώπινες δραστηριότητες όμως είναι απαραίτητη η χαρτομετρία; Οι χρήσεις χαρτών, όπου προκύπτει ανάγκη μετρήσεων, μπορούν να διακριθούν σε:

- επιστημονικές χρήσεις,
- χρήσεις πλοήγησης,
- διοικητικές χρήσεις.

5.1.1 Εφαρμογές της χαρτομετρίας στις επιστήμες

Η χαρτομετρία είναι μια σημαντική τεχνική για τις φυσικές επιστήμες, όπως και για ορισμένους κλάδους μηχανικών. Ο χάρτης είναι βασικό εργαλείο στη γεωγραφία, τη γεωλογία, σε συγκεκριμένες περιοχές των βιολογικών επιστημών καθώς και σε εφαρμογές αυτών των επιστημών στη γεωργία, στη δασονομία και στη μεταλλουργία. Στους μηχανικούς η χαρτομετρία αποτελεί ζωτικής σημασίας τεχνική, ειδικότερα για όσους διαχειρίζονται χωρικά δεδομένα. Η χρήση χαρτομετρικών τεχνικών επεκτείνεται εκτός των χαρτών και των διαγραμμάτων, στις φωτογραφίες και σε άλλου είδους γραφικές αποδόσεις, έως την εφαρμογή τους σε συνθήκες εργαστηριακής έρευνας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις εργαστηριακές μελέτες παρουσιάζει τα τελευταία χρόνια η ανάπτυξη των μεθόδων της **στερεολογίας**, η οποία ορίζεται ως: *ένα σύνολο μαθηματικών μεθόδων που σχετίζουν τις τρισδιάστατες παραμέτρους που προσδιορίζουν μια κατασκευή, με τις διδιάστατες μετρήσεις που αποκτώνται από τομές της κατασκευής*. Ισοδύναμοι με τη στερεολογία όροι χρησιμοποιούνται σε διάφορες άλλες επιστημονικές περιοχές, όπως είναι η ποσοτική μικροσκοπία και η μορφομετρία.

Από το φάσμα των τεχνικών μέτρησης, η χαρτομετρία αντιπροσωπεύει εκείνο το τμήμα που ψάχνει να καταλάβει τα διάφορα φαινόμενα από πληροφορίες που προκύπτουν από εικόνες, των οποίων γενικά η κλίμακα είναι πολύ μικρότερη από το στοιχείο που μελετάται. Ένα άλλο τμήμα αυτού του φάσματος κατέχουν οι ποσοτικές μέθοδοι της μικροσκοπίας, όπου τα αντικείμενα που μελετώνται και μετρώνται έχουν μεγεθυνθεί πολλές φορές, σε σχέση με τις φυσικές τους διαστάσεις.

Αξίζει να επισημανθεί ότι δεν υπάρχει πραγματική διαφορά στις μετρήσεις που γίνονται στους χάρτες με αυτές που γίνονται σε μια μικρογραφία. Και στις δύο περιπτώσεις μετρώνται αποστάσεις, εμβαδά, διευθύνσεις και γίνονται καταμετρήσεις (που δηλώνουν πλήθος στοιχείων). Υπάρχει μια

σημαντική διάκριση μεταξύ του σκοπού των μετρήσεων. Σκοπός της χαρτομετρικής μέτρησης είναι η ανακάλυψη των ποσοτικών σχέσεων μεταξύ αντικειμένων που υπάρχουν στο χάρτη. Αυτά απεικονίζονται σε μια διδιάστατη επιφάνεια και δεν είναι δυνατό να μετρηθούν όλες οι συνθήκες που συμβαίνουν στην ατμόσφαιρα της γήινης επιφάνειας, από τις μετρήσεις και μόνο που γίνονται στο χάρτη.

Σχεδόν σε όλες τις ποσοτικές μικροσκοπικές μελέτες γίνεται χρήση των τομών ή διατομών στον τρισδιάστατο χώρο, ανεξάρτητα του αν το αντικείμενο μελέτης είναι ένα όργανο, ένα μέταλλο, ή ένας βράχος. Υπάρχει σε αυτές τις περιπτώσεις η δυνατότητα δημιουργίας τομών οι οποίες απεικονίζουν τα διαφορετικά επίπεδα του αντικειμένου στο χώρο. Η χαρτογραφική αναλογία θα ήταν μια σειρά χαρτών που ο καθένας θα απεικόνιζε και ένα διαφορετικό επίπεδο, παράλληλο ως προς τον ορίζοντα, τις ατμοσφαιρικές ζώνες ή τις διευθύνσεις των γεωλογικών δομών. Όμως αυτοί οι χάρτες θα μπορούσαν να σχεδιαστούν μόνον αν υπήρχαν επαρκείς πληροφορίες για τις συνθήκες που επικρατούν σε κάθε επίπεδο του ορίζοντα, ώστε να μην απαιτείται δειγματοληψία μιας μεταβλητής στην τρίτη διάσταση. Η εφαρμογή της διαδικασίας αναπαράστασης της τρίτης διάστασης μέσα από δειγματοληψία στη στερεολογία, έχει ως αποτέλεσμα, πολλές από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στη μέτρηση αποστάσεων και εμβαδού να βασίζονται σε μεθόδους πιθανολογικές. Η ίδια θεώρηση είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις μεθόδους της χαρτομετρίας και αποτελεί το σημείο εκείνο που οι δυο περιοχές (στερεολογία και χαρτομετρία) επηρεάζονται η μία από την άλλη. Ορισμένες πιθανολογικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται από ευχρηστία και αποτελεσματικότητα και οδηγούν σε ακριβείς εκτιμήσεις μεγεθών, με αποτέλεσμα να είναι εξίσου χρήσιμες για μετρήσεις χαρακτηριστικών του χάρτη αλλά και μιας μικρογραφίας.

5.1.2 Η χαρτομετρία στην πλοήγηση

Η πλοήγηση είναι ο πιο δύσκολος για να ορισθεί τομέας της χαρτομετρίας, επειδή περιλαμβάνει ένα μεγάλο φάσμα δραστηριοτήτων, από τη στοιχειώδη ανάγνωση του χάρτη, έως τις εξειδικευμένες μεθόδους πλοήγησης κινούμενων μέσων. Ακόμα και εδώ όμως οι τεχνικές δεν διαφέρουν τόσο πολύ. Ένας πεζός που χρησιμοποιεί ένα χάρτη για να βρει το δρόμο του, μετρά αποστάσεις και διευθύνσεις πάνω στο χάρτη, όπως και ο πλοηγός. Ένας πλοηγός μετρά τα ίδια επίσης στοιχεία στο διάγραμμά του και προσδιορίζει το γραφικό του στίγμα δια μέσου αναμετρήσεων πλοήγησης (dead-reckoning). Η μόνη πραγματική διαφορά είναι ότι ο πεζός θα χρησιμοποιήσει την πυξίδα του για εφαρμογή των μετρήσεων που έκανε στο χάρτη με μια ακρίβεια της τάξης των 2° και θα εκτιμήσει τη χρονική διάρκεια της πορείας του, με βάση τη μέση ταχύτητα του βαδίσματός

του, ενώ ο πλοηγός θα εκτιμήσει τη διεύθυνση κίνησής του με ακρίβεια της τάξης 0.5° , για να προσδιορίσει την αναμενόμενη ώρα άφιξής του. Και στις δυο περιπτώσεις η οπτική αναγνώριση των απεικονιζόμενων χαρακτηριστικών είναι πιο σημαντική από τις μεθόδους πλοήγησης δια μέσου του στίγματος των αναμετρήσεων, γιατί υπάρχει πληθώρα πληροφοριών που επιβεβαιώνουν τη θέση του μέσου πλοήγησης. Αυτό αποδεικνύεται και από τα προβλήματα που προκύπτουν όταν τα μέσα πλοήγησης χάνουν την ορατότητα με τα χαρακτηριστικά της επιφάνεια της γης λόγω σκότους, ή δυσμενών καιρικών συνθηκών. Σε αυτές τις περιπτώσεις καθίσταται απαραίτητη η ύπαρξη ενός ακριβούς σχεδίου στίγματος αναμετρήσεων και οι δυο λειτουργίες μέτρησης των αποστάσεων και των διευθύνσεων στο διάγραμμα πρέπει να γίνουν με μεγάλη προσοχή.

Καταλήγοντας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι είναι δύσκολο να βρεθεί μεγάλη διαφορά μεταξύ των μεθόδων μέτρησης αποστάσεων από ένα χάρτη, ανεξάρτητα του αν αυτό γίνεται για τη διευκόλυνση ενός πεζοπόρου, ενός στρατιώτη ή ενός επιστήμονα.

5.1.3 Η χαρτομετρία στη διοίκηση

Η τρίτη βασική εφαρμογή της χαρτομετρίας γίνεται σε θέματα διοίκησης. Τμήματα δημόσιας διοίκησης που ασχολούνται με σχεδιασμό, προγραμματισμό, μελέτες και εκτέλεση δημοσίων έργων έχουν συνεχή ανάγκη για χαρτομετρικές μετρήσεις που χρησιμοποιούνται σε οικονομικές και τεχνικές εφαρμογές. Χαρακτηριστική είναι μια μελέτη που έγινε στη Μ. Βρετανία, όπου αποτιμάται ο ρόλος των χαρτών στον προσδιορισμό του εμβαδού εκτάσεων, στις διάφορες κυβερνητικές δραστηριότητες. Οι δραστηριότητες αυτές αναφέρονται, στη γενική διοίκηση, στο σχεδιασμό, στη διαχείριση των υδατικών πόρων, στον καθορισμό ορίων ιδιοκτησίας, στον καθορισμό αντικειμενικών αξιών, στη γεωργία, στα δάση κλπ.

Μια άλλη σημαντική εφαρμογή της χαρτομετρίας στη διοίκηση, είναι οι προσπάθειες που γίνονται τη σημερινή εποχή, να τροποποιηθεί ο διεθνής νόμος που καθορίζει τα εθνικά δικαιώματα στο θαλάσσιο χώρο. Γενικά υπάρχει συμφωνία ότι τα ύδατα ναυσιπλοΐας μπορούν να χωριστούν σε τέσσερις περιοχές, όπου το κάθε τμήμα της θάλασσας έχει διαφορετικό νομικό καθεστώς. Οι περιοχές αυτές είναι:

- τα διεθνή ύδατα,
- τα χωρικά ύδατα,
- η προσκείμενη ζώνη,
- η ανοικτή θάλασσα.

Ο τρόπος προσδιορισμού των τμημάτων αυτών στις διάφορες περιοχές δεν είναι καθόλου απλός. Γιατί ενώ είναι απλό να ειπωθεί ότι σύμφωνα με το διεθνή νόμο, μια χώρα έχει χωρικά ύδατα πλάτους κάποιων μιλίων, είναι δύσκολο να ορισθεί η αφετηρία μέτρησης αυτών των μιλίων. Η ακτογραμμή δεν είναι μια απλή καμπύλη. Συχνά έχει βαθείς κόλπους, εντός των χωρικών υδάτων υπάρχουν νησιά, σε ορισμένες περιοχές συμβαίνουν παλίρροιες κλπ. Όταν υπάρχει διαφωνία μεταξύ γειτονικών χωρών για τον καθορισμό των χωρικών τους υδάτων, οι ανωτέρω παράμετροι αποτελούν προβλήματα που δύσκολα απαντώνται γιατί δεν προβλέπονται από τους γενικούς ισχύοντες νόμους. Σε αυτές τις πολύ σοβαρές διευθετήσεις, η λειτουργία αξιόπιστων ναυτικών διαγραμμάτων και οι μέθοδοι χαρτομετρίας αποκτούν ιδιαίτερη σημασία.

5.2 Η έννοια του μέσου

5.2.1 Ο χάρτης ως μέσο

Εξ ορισμού οι χαρτομετρικές μετρήσεις γίνονται σε χάρτες και διαγράμματα, με σκοπό τον προσδιορισμό διαστάσεων πάνω στη γήινη επιφάνεια. Όμως, ο χάρτης, ή το διάγραμμα, δεν είναι μια πιστή αναπαραγωγή της γήινης επιφάνειας. Άρα πρέπει να μελετηθούν οι τρόποι με τους οποίους η εικόνα της γήινης επιφάνειας μετασχηματίζεται δια μέσου των διαδικασιών δημιουργίας των χαρτών, γιατί οι μετασχηματισμοί είναι βέβαιο πως επηρεάζουν τις μετρήσεις. Ας ξεκινήσουμε από ένα πιθανό ορισμό του χάρτη.

Ένας χάρτης είναι μια αναπαράσταση, συνήθως υπό κλίμακα και σε ένα επίπεδο μέσο, επιλεγμένων αντικειμένων ή αφαιρετικών χαρακτηριστικών, τα οποία βρίσκονται ή σχετίζονται με την επιφάνεια της γης, ή άλλου ουράνιου σώματος.

(ICA)

Παρόλο που μπορεί πάντα να υπάρχουν εξαιρέσεις, οι παρακάτω παράγοντες είναι κοινοί στη μεγαλύτερη πλειοψηφία των χρησιμοποιούμενων χαρτών και στον τρόπο που έχουν δημιουργηθεί:

- Ο χάρτης έχει τυπωθεί με λιθογραφία τύπου offset σε δυο ή περισσότερα χρώματα επάνω σε ένα φύλλο χαρτιού.
- Για να τυπωθεί σε περισσότερα από ένα χρώματα, κάθε φύλλο χαρτιού πρέπει να περάσει μέσα από τη διαδικασία εκτύπωσης περισσότερες από μια φορές. Επιπλέον, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ξεχωριστή εκτυπωτική πλάκα για την

εκτύπωση του κάθε χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι, πρέπει να κατασκευαστούν περισσότερα του ενός πρωτότυπα για να δημιουργηθούν οι εκτυπωτικές πλάκες.

- Κάθε χάρτης απεικονίζει μόνον ένα επιλεγμένο σύνολο χαρακτηριστικών της γήινης επιφάνειας. Οι διαδικασίες της γενίκευσης, επιλογή και απλοποίηση, είναι αναγκαίο να εφαρμοσθούν, για να επιτευχθεί ευκρίνεια και εποπτεία του χώρου στις μικρές κλίμακες.
- Οι λεπτομέρειες του χάρτη, οι γραμμές και τα σύμβολα που απεικονίζουν διάφορα χαρακτηριστικά του εδάφους, έχουν σχεδιαστεί από αεροφωτογραφίες, με εφαρμογή φωτογραμμετρικών μεθόδων, ή έχουν προκύψει από προϋπάρχοντες χάρτες. Στην καλλίτερη περίπτωση, οι πληροφορίες που εμφανίζονται στους χάρτες-πηγές έχουν επίσης σχεδιαστεί με φωτογραμμετρική απόδοση, εκτός και αν είναι πολύ παλαιοί και έχουν προκύψει με γεωδαιτικές αποτυπώσεις.
- Οι φωτογραμμετρικές μέθοδοι απόδοσης λεπτομερειών στηρίζονται, με τη σειρά τους, στην ύπαρξη τριγωνομετρικών και φωτοσταθερών σημείων.

5.2.2 Μετρητικοί και μη μετρητικοί χάρτες

Μια χρήσιμη για τη χαρτομετρία ταξινόμηση των χαρτών έχει εμφανισθεί πρόσφατα στη βιβλιογραφία, σύμφωνα με την οποία οι χάρτες χωρίζονται σε μετρητικούς και μη-μετρητικούς. Πολλοί χάρτες έχουν σκοπό τη μετάδοση πληροφοριών γενικού περιεχομένου, όπως είναι οι οδικοί χάρτες, οι εικονογραφικοί και ορισμένοι χάρτες ατλάντων. Μπορούν να ξεχωρίσουν γιατί δεν έχουν κανένα μαθηματικό πλαίσιο και η πληροφορία για την κλίμακά τους μπορεί και να μην αναφέρεται. Αυτοί οι χάρτες μπορούν να χαρακτηριστούν ως μη-μετρητικοί και να διαχωριστούν από όλους του άλλους που απεικονίζουν τον κάρναβο των συντεταγμένων και αξιόπιστα στοιχεία για την κλίμακά τους. Ένας απaráβατος κανόνας που ισχύει διατυπώνεται ως εξής: αν ένας χάρτης δεν περιέχει ενδείξεις για το μαθηματικό του πλαίσιο, δεν είναι κατάλληλος για να γίνουν μετρήσεις σ' αυτόν.

Το μαθηματικό πλαίσιο ενός χάρτη αποτελείται από το πλέγμα των γεωγραφικών συντεταγμένων, ή από έναν κάρναβο ορθογωνίων συντεταγμένων, ή και από τα δυο. Οι χάρτες μεγάλων αλλά και μεσαίων κλιμάκων, έως την κλίμακα 1:500.000, απεικονίζουν τον κάρναβο των ορθογωνίων συντεταγμένων, ανά 100m, 1km, 10km, ή και 100km, ανάλογα με την κλίμακα. Ο κάρναβος ή το πλέγμα του χάρτη χρησιμοποιείται για το γεωμετρικό έλεγχο όλων των μετρήσεων που γίνονται σ' αυτόν. Οι διαστάσεις του πλέγματος ή του κάρναβου μπορούν να υπολογιστούν γνωρίζοντας το σχήμα και το μέγεθος της γης, την κλίμακα και τις αναλυτικές σχέσεις που ορίζουν τη συγκεκριμένη προβολή του

χάρτη. Συσχετίζοντας τις θεωρητικές διαστάσεις, που υπολογίζονται από αυτά τα δεδομένα, με αυτές που μετρώνται στους χάρτες μπορεί να προσδιοριστεί το μέγεθος της παραμόρφωσης του συγκεκριμένου χαρτιού, ή να εκτιμηθεί η αναγωγή που πρέπει να προστεθεί στην κλίμακα σμίκρυνσης του χάρτη, ώστε να εφαρμοστούν οι διορθώσεις που οφείλονται στις παραμορφώσεις λόγω των προβολικών σχέσεων.

Στους μετρητικούς χάρτες οι αποστάσεις και τα εμβαδά μπορούν να μετρηθούν και να διορθωθούν με ακρίβεια, είτε σε ένα μόνο φύλλο χάρτη, ή σε σειρά φύλλων, η οποία ανήκει στο ίδιο προβολικό σύστημα και στην ίδια επιφάνεια αναφοράς. Οποιαδήποτε προσπάθεια να αναχθούν μετρήσεις από έναν μη-μετρητικό χάρτη σε οποιονδήποτε άλλο χάρτη, συναντά ουσιαστικές δυσκολίες.

5.3 Η γεωμετρία του μέσου μέτρησης

Η γεωμετρία του μέσου μέτρησης έχει μεγάλη σημασία για τη χαρτομετρία. Με βάση τη γεωμετρία του μέσου μέτρησης προσδιορίζονται οι αναγωγές που πρέπει να γίνουν στις μετρήσεις, ώστε να εξαλειφθούν τα σφάλματα που οφείλονται στον τρόπο δημιουργίας του. Έτσι, οι αναγωγές που γίνονται στις μετρήσεις των αεροφωτογραφιών είναι διαφορετικές από αυτές των δορυφορικών εικόνων και αυτές με τη σειρά τους, διαφορετικές από αυτές των χαρτών. Επομένως, οι θέσεις σημείων που εμφανίζονται σε μια αεροφωτογραφία διαφέρουν από τις αντίστοιχες στο χάρτη. Μια συνέπεια αυτής της διαφοράς είναι ότι σπάνια είναι εφικτό να δημιουργηθεί ένας χάρτης από την απλή γραφική αντιγραφή μιας αεροφωτογραφίας. Πρέπει να χρησιμοποιηθούν περισσότερο πολύπλοκες μέθοδοι, ακόμα και για τη μεταφορά ορισμένων μόνο σημείων ή γραμμών από την αεροφωτογραφία στο χάρτη. Αν και η μέτρηση αποστάσεων, εμβαδού ή διευθύνσεων μπορεί να γίνει με παρόμοια τεχνική πάνω σε μια αεροφωτογραφία, η μετατροπή των μετρήσεων σε πραγματικές μονάδες στο έδαφος είναι πολύπλοκη διαδικασία επεξεργασίας, λόγω των μετατοπίσεων και παραμορφώσεων που έχουν υποστεί τα γραφικά αντικείμενα στην εικόνα της αεροφωτογραφίας.

5.3.1 Το σχήμα της γης για τις ανάγκες της χαρτομετρίας

Κατά τη διαδικασία της αναγωγής των μετρήσεων είναι επιθυμητό το σχήμα της γης να απλουστευθεί σε επίπεδο που να είναι συμβατό με την ακρίβεια των μετρήσεων. Έτσι σχετικά απλές τοπογραφικές τεχνικές περιορισμένης έκτασης, οι οποίες χρησιμοποιούν μετροταινία για μέτρηση αποστάσεων ή πυξίδα για

μέτρηση γωνιών –για παράδειγμα εφαρμογές γηπεδομετρίας– αρκεί να αναφέρονται απλώς σε μία επίπεδη επιφάνεια. Σε ανάλογες περιπτώσεις η διαφοροποίηση της θέσης των μετρημένων στοιχείων, εάν τα δεδομένα επεξεργαστούν με αναφορά στην καμπύλη γήινη επιφάνεια, είναι μικρότερη από τα σφάλματα των μετρήσεων, τα οποία προκύπτουν από τα όργανα μέτρησης και τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει ο χάρτης. Στο αντίθετο άκρο, εκεί όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στον προσδιορισμό των θέσεων σημείων ή τη χαρτογράφηση ορίων, ειδικά σε μακρινές αποστάσεις από την αρχή της τοπογράφησης, όχι μόνον πρέπει τα όργανα και οι μέθοδοι τοπογράφησης να είναι ακριβείς, αλλά είναι αναγκαίο να υπολογιστούν οι θέσεις των σημείων με αναφορά σε ένα πιο σύνθετο μοντέλο της γης. Ένα σημαντικό παράδειγμα, είναι η ανάγκη εντοπισμού, με μεγάλη ακρίβεια, των θαλασσίων ορίων πετρελαιοπηγών, όπου οι αξίες των εργασιών είναι αφάνταστα υψηλές. Ο εντοπισμός αυτών των ορίων με επαρκή ακρίβεια, απαιτεί την εφαρμογή γεωδαιτικών μεθόδων με σκοπό τη συλλογή κατάλληλων παρατηρήσεων πεδίου και επεξεργασία των δεδομένων, χρησιμοποιώντας ένα ικανοποιητικό γεωειδές αναφοράς, ως βάση του υπολογισμού των θέσεων.

Οι μετρήσεις επιφανειών που γίνονται πάνω σε τοπογραφικό χάρτη μεγάλης ή μεσαίας κλίμακας δεν χρειάζεται να αναφέρονται σε σφαιρική ή σφαιροειδή γήινη επιφάνεια, επειδή η επίδραση της γήινης καμπυλότητας είναι μικρότερη από τα σφάλματα των διαδικασιών μέτρησης. Αντίθετα, η μέτρηση της επιφάνειας μιας μεγάλης χώρας ή μιας εκτεταμένης θαλάσσιας οντότητας από ένα χάρτη μικρής κλίμακας απαιτεί την αναγωγή των μετρούμενων ποσοτήτων με αναφορά σε σφαιρική ή σφαιροειδή γη, θεωρώντας τα γραφικά αντικείμενα ως σφαιρικά ή σφαιροειδή τμήματα.

5.3.2 Η γεωμετρία του χάρτη

Ο χάρτης είναι μια επίπεδη επιφάνεια. Οι παραμορφώσεις των γεωμετρικών μεγεθών επηρεάζουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Πιο συγκεκριμένα, όταν γίνεται χρήση της κλίμακας του χάρτη, γίνεται η υπόθεση ότι η κλίμακα είναι ενιαία σε όλη την έκταση του χάρτη. Όμως η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης, μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και γύρω από κάθε σημείο η μεταβολή της εξαρτάται από τη διεύθυνση, επομένως η υπόθεση της ενιαίας κλίμακας του χάρτη σε ολόκληρη την έκτασή του δεν ισχύει.

Μια δεύτερη υπόθεση που γίνεται κατά τη διαδικασία μέτρησης αποστάσεων είναι το ότι μια ευθεία γραμμή του χάρτη απεικονίζει μια ευθεία γραμμή στο έδαφος. Ούτε αυτή η υπόθεση όμως ισχύει, εξ αιτίας της γεωμετρίας του χάρτη. Μια ευθεία γραμμή στο έδαφος απεικονίζεται εν γένει με καμπύλη γραμμή στο χάρτη. Βέβαια, σε πολλές χαρτομετρικές εφαρμογές, οι ανωτέρω δύο

υποθέσεις μπορούν να ισχύουν. Οι μετρήσεις που γίνονται σε χάρτες ή διαγράμματα μεγάλων ή μεσαίων κλιμάκων αφορούν πολύ μικρά τμήματα της γήινης επιφάνειας. Επομένως, σε ανάλογους χάρτες η απόκλιση της κλίμακας λόγω παραμόρφωσης των μηκών είναι πολύ μικρή και δεν απαιτείται να εκτιμηθεί για να γίνουν οι απαραίτητες αναγωγές. Υπολογίσιμες μεταβολές της κλίμακας προκύπτουν όταν μια εκτεταμένη περιοχή της γήινης επιφάνειας απεικονίζεται σε ένα μόνο φύλλο χάρτη, δηλαδή σε χάρτη μικρής κλίμακας. Επειδή δε η φύση και το μέγεθος της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης, αλλά και των άλλων παραμορφώσεων, εξαρτώνται από το είδος της προβολής του χάρτη επιλέγεται εκείνος ο χάρτης που παρουσιάζει τις μικρότερες παραμορφώσεις για το είδος των μετρήσεων που πρόκειται να γίνουν. Η ανάπτυξη των ψηφιακών μεθόδων για την επεξεργασία των χαρτομετρικών μετρήσεων τείνει να απλοποιήσει σήμερα τέτοιου είδους προβλήματα.

Ένα άλλο στοιχείο της γεωμετρίας του χάρτη που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στις μετρήσεις είναι το ανάγλυφο. Παρόλο που οι μεταβολές του είναι μικρές σε σχέση με την καμπυλότητα της γης, εν τούτοις επηρεάζει την κλίμακα του χάρτη. Οι χάρτες αποτελούν ορθή προβολή της γήινης επιφάνειας στο επίπεδο. Κάθε απόσταση πάνω στην επιφάνεια της γης έχει προβληθεί στο οριζόντιο επίπεδο και αυτή η προβολή έχει απεικονιστεί στο χάρτη. Ως εκ τούτου για να μετρηθεί η κλίση μιας γραμμής από το χάρτη, μετράται η (οριζόντια) απόσταση της γραμμής και με βάση τα υψόμετρα των δυο άκρων της προκύπτει η κλίση της.

5.4 Μέθοδοι μέτρησης χαρτομετρίας

Οι μέθοδοι μέτρησης που εφαρμόζονται στη χαρτομετρία μπορούν να διακριθούν σε δυο κατηγορίες (Πίνακας 5.1):

- Στις κλασικές μεθόδους, που συνήθως βασίζονται στη χρήση ενός ειδικού οργάνου, το οποίο κάνει μια πλήρη μέτρηση ενός αντικειμένου.
- Στις πιθανολογικές μεθόδους μέτρησης, οι οποίες βασίζονται σε αρχές και μεθόδους στατιστικής δειγματοληψίας.

Όταν χρησιμοποιούμε τη διαδικασία της δειγματοληψίας εργαζόμαστε με όρους εκτίμησης, όχι ακριβούς μέτρησης, αλλά επαναλαμβάνοντας την υπολογιστική ή μετρητική διαδικασία μπορούμε να καταστήσουμε την εκτίμηση τόσο ακριβή όσο επιτρέπει η διακριτική ανάλυση της μετρητικής διαδικασίας. Από τις μεθόδους αυτές δεν είναι όλες στον ίδιο βαθμό κατάλληλες, ή εξίσου χρήσιμες για όλες τις περιπτώσεις. Από την αναλυτική περιγραφή τους προκύπτει ότι η κάθε μια είναι κατάλληλη για τη μέτρηση συγκεκριμένου είδους

χαρακτηριστικών, σε συγκεκριμένα είδη χαρτών. Επιπλέον, καμιά τεχνική δεν είναι εξίσου κατάλληλη για τη μέτρηση οποιασδήποτε γραμμής σε οποιαδήποτε κλίμακα.

Πίνακας 5.1 Συνοπτική παρουσίαση μεθόδων μέτρησης στη χαρτομετρία

ΚΛΑΣΙΚΕΣ	ΠΙΘΑΝΟΛΟΓΙΚΕΣ
<i>Μέτρηση μηκών</i>	
Με υποδεκάμετρο	
Με υποδιαίρεσεις ίσου βήματος	
Με υποδιαίρεσεις άνισου βήματος	
Με ψηφιοποιητή	
Με ροδάκι	
Με σχοινί	
<i>Μέτρηση εμβαδού</i>	
Με γεωμετρικά σχήματα	
Με συντεταγμένες	
Με σύγκριση σταθερών σχημάτων	
Με τετραγωνικό κάνναβο	
	Με τετραγωνικό κάνναβο και κουκίδες
	Με άμεση καταμέτρηση κουκίδων
	Με έμμεση καταμέτρηση κουκίδων
Με λουρίδες	
Με εμβαδόμετρο	

5.5 Μέτρηση μηκών

5.5.1 Μέτρηση ευθύγραμμου τμήματος

Ας υποτεθεί ότι το αντικείμενο μέτρησης είναι το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος περίπου 150mm, το οποίο απεικονίζεται σε ένα χάρτη. Χρησιμοποιώντας συμβατικές τεχνικές σχεδίασης και μέτρησης, αυτή η εργασία μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους:

1. Τοποθετείται ένα υποδεκάμετρο μεταξύ των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος. Η απόσταση μεταξύ τους μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαφορά

των αναγνώσεων των δυο άκρων, στο υποδεκάμετρο. Αυτή η απόσταση μετριέται στις μονάδες που είναι χαραγμένες πάνω στο υποδεκάμετρο, π.χ. σε mm.

2. Ένα διαστημόμετρο ανοίγεται έτσι ώστε τα δυο του άκρα να συμπίσουν με τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος. Το διαστημόμετρο μεταφέρεται στο υποδεκάμετρο και η απόσταση μετριέται με σύγκριση των θέσεων των δύο ακίδων του διαστημόμετρου με τις διαβαθμίσεις του υποδεκάμετρου.
3. Ένα διαστημόμετρο τοποθετείται σε συγκεκριμένο άνοιγμα (βήμα) 10mm ή 20mm. Αυτό το άνοιγμα τοποθετείται διαδοχικά κατά μήκος της γραμμής, με τρόπο ώστε το μεγαλύτερο μέρος της γραμμής να μετρηθεί από ίσα βήματα. Συνήθως το μήκος της γραμμής δεν είναι πολλαπλάσιο του αρχικού βήματος και επομένως το τελευταίο τμήμα θα μετρηθεί ξεχωριστά.

Το επόμενο στάδιο αναφέρεται στη μετατροπή της μέτρηση σε μονάδες ανηγμένες στο έδαφος, με βάση την κλίμακα του χάρτη. Επομένως και οι τρεις μέθοδοι που περιγράφηκαν περιλαμβάνουν κατ' αρχήν, τη διαδικασία μέτρησης και κατόπιν, την αναγωγή της μέτρησης με υπολογισμό.

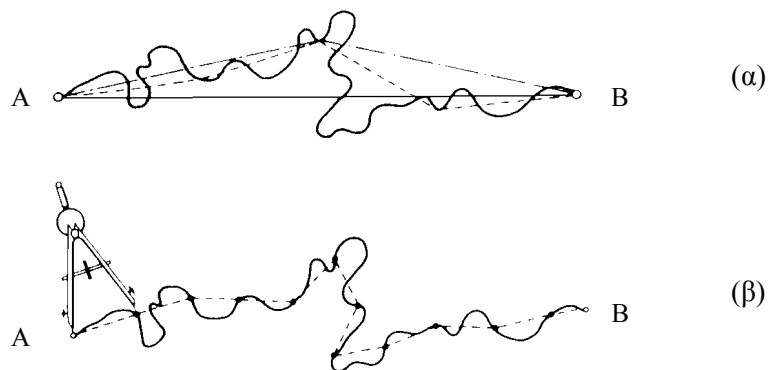
Υπάρχουν άλλοι τρεις τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η μέτρηση και η αναγωγή χωρίς υπολογισμούς.

4. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της πρώτης από τις προαναφερθείσες μεθόδους, η οποία εφαρμόζεται από μηχανικούς που χρησιμοποιούν μεγάλης κλίμακας χάρτες και διαγράμματα. Η μέτρηση γίνεται με ειδικό κλιμακόμετρο, με το οποίο εφ' όσον η κλίμακα υποδιαίρεσης συμπίπτει με την κλίμακα του χάρτη, η απόσταση στο έδαφος μετριέται άμεσα.
5. Η μέθοδος αυτή αντιστοιχεί στη δεύτερη από τις προαναφερθείσες μεθόδους, με τη διαφορά ότι οι ακίδες του διαστημόμετρου τοποθετούνται στο κλιμακόμετρο που χρησιμοποιήθηκε στη μέθοδο (4), ή στη γραφική κλίμακα που είναι τυπωμένη στο περιθώριο του χάρτη.
6. Αυτή η μέθοδος αντιστοιχεί στην (3), με τη διαφορά ότι με το διαστημόμετρο επαναλαμβάνεται ο αριθμός των βημάτων πάνω στη γραφική κλίμακα του χάρτη για την μετατροπή της απόστασης σε μονάδες στο έδαφος.

Στις μεθόδους (5) και (6) υπάρχουν δύο στάδια μέτρησης. Η μέθοδος (4) είναι η μόνη κατά την οποία ολοκληρώνεται όλη η διαδικασία, σε ένα στάδιο. Συνήθως βέβαια, η γραμμή είναι πιο πολύπλοκη από ένα απλό ευθύγραμμο τμήμα και πρέπει να εφαρμοστεί μια από τις κλασικές μεθόδους που αναπτύσσονται παρακάτω.

5.5.2 Μέτρηση με υποδιαιρέσεις ίσου βήματος

Πολλές από τις κλασικές μεθόδους μέτρησης αποστάσεων, βασίζονται στη σύγκριση της γραμμής με μια κατάλληλη κλίμακα, με τη βοήθεια ενός διαστημόμετρου. Χρησιμοποιώντας το διαστημόμετρο υποθέτουμε ότι η γραμμή έχει χωριστεί σε μια ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων και ότι το μήκος της είναι το άθροισμα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων. Είναι προφανές ότι η διαδικασία αυτή δίνει αποτελέσματα που είναι πάντα μικρότερα από το πραγματικό μήκος. Το Σχήμα 5.1α δείχνει ότι εάν μια ακανόνιστη γραμμή AB μετρηθεί σε δυο τμήματα, το μήκος της είναι μεγαλύτερο από την ευθεία γραμμή που ενώνει τα άκρα της A και B. Η αιτιολόγηση είναι προφανής γιατί τα δυο μετρημένα τμήματα αποτελούν δυο πλευρές του τριγώνου που σχηματίζεται, του οποίου το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η τρίτη πλευρά. Ομοίως, η μέτρηση της ίδιας γραμμής χωρισμένης σε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα είναι μεγαλύτερη από αυτήν που προκύπτει με τη διαίρεσή της, σε ένα ή δυο τμήματα. Εφ' όσον μια αύξηση του αριθμού των τμημάτων είναι ισοδύναμη με μείωση του ανοίγματος του διαστημόμετρου, μπορούμε να εκφράσουμε ως κανόνα, το ότι: **το μετρημένο μήκος αυξάνει όσο το άνοιγμα του διαστημόμετρου μικραίνει**. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 5.1β, όπου τα ευθύγραμμα τμήματα είναι το 1/12 του μήκους της γραμμής.



Σχήμα 5.1 Μέτρηση μήκους με διαστημόμετρο

Παρ' όλα αυτά το πραγματικό μήκος της γραμμής είναι μεγαλύτερο από το μήκος που μετριέται, γιατί εξακολουθούν να χάνονται κάποια τμήματα που έχουν ανωμαλίες. Η τελευταία διαπίστωση δημιουργεί αντιρρήσεις για τη μέτρηση γραμμών με υποδιαίρεση, σε πολλούς χρήστες χαρτών. Για όσους θεωρούν ότι η μέτρηση με υποδιαίρεση είναι ανακριβής, μια εναλλακτική λύση

είναι να μετρήσουν με ειδικό όργανο, το ροδάκι, ή συγκρίνοντάς το με μια κλωστή.

Από τη σύγκριση των Σχημάτων 5.1α και 5.1β προκύπτει ότι όσο το άνοιγμα του διαστημόμετρου γίνεται μικρότερο, τόσο η τεθλασμένη γραμμή πλησιάζει την απεικονιζόμενη στο χάρτη. Εάν θεωρήσουμε ότι το άνοιγμα του διαστημόμετρου τείνει στο μηδέν, τότε οι δυο γραμμές, τεθλασμένη και πραγματική, θα είναι ίδιες. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ σημαντικό και υποχρεώνει τη θεωρία της εφαρμογής των μετρήσεων που βασίζονται στη διαδικασία των υποδιαιρέσεων να προσδιορίζει μια **οριακή απόσταση**. Η οριακή απόσταση κάθε ακανόνιστης γραμμής είναι στην πράξη, το μήκος της γραμμής που θα μπορούσε να προσδιοριστεί αν τη μετρούσαμε με υποδιαίρεση βήματος ίση με το μηδέν.

Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν πολλών ειδών διαστημόμετρα, διαφορετικών ακριβειών μέτρησης που εξαρτώνται από τη σταθερότητα που εξασφαλίζει ο μηχανισμός λειτουργίας τους καθώς και το μικρότερο άνοιγμα που μπορεί να επιτευχθεί.

5.5.3 Μέτρηση με υποδιαιρέσεις άνισου βήματος

Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, η προς μέτρηση γραμμή διαιρείται σε επί μέρους τμήματα τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκην ίσα. Προφανώς κάθε άνοιγμα του διαστημόμετρου πρέπει να συγκρίνεται με ένα κλιμακόμετρο και να καταγράφεται η μέτρηση. Το άθροισμα όλων των τμημάτων δίνει το ζητούμενο μήκος της γραμμής. Η μέθοδος απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο εφαρμογής, συγκρινόμενη με τη μέθοδο διαίρεσης σε ίσα τμήματα.

5.5.4 Μέτρηση αποστάσεων με ψηφιοποιητή

Μια ψηφιακή μέθοδος που είναι ανάλογη με τη μέθοδο μέτρησης με διαστημόμετρο άνισου βήματος, χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το μήκος μιας ακανόνιστης γραμμής από τις διαφορές συντεταγμένων μεταξύ των διαδοχικών σημείων κατά μήκος της. Οι αναγκαίες μετρήσεις γίνονται με ψηφιοποιητή, δια μέσου του οποίου οι συντεταγμένες των σημείων της γραμμής καταγράφονται είτε σημείο προς σημείο είτε σε ροή, σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Το μήκος της γραμμής προκύπτει από το άθροισμα των μηκών των επί μέρους τμημάτων, των οποίων καταγράφονται οι συντεταγμένες, με εφαρμογή της Ευκλείδειας απόστασης:

$$L = \sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} .$$

5.5.5 Κλασικές μέθοδοι συνεχούς μέτρησης

Μια εναλλακτική μέθοδος σύγκρισης μηκών μεταξύ χάρτη και υποδεκάμετρου είναι η μέτρηση αποστάσεων με μια κλωστή, ή με το ροδάκι. Η χρήση της κλωστής δημιουργεί πολλά πρακτικά προβλήματα στην τοποθέτησή της με τρόπο που να ακολουθεί με ακρίβεια τη γραμμή, καθώς και στη σύμπτωση των δύο άκρων της γραμμής με τα δυο άκρα της κλωστής.



Σχήμα 5.2 Το ροδάκι

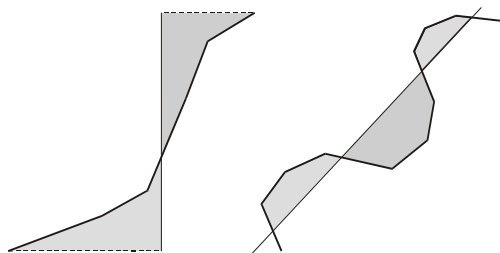
Το ροδάκι (Σχήμα 5.2) είναι ένα μηχανικό όργανο ειδικά κατασκευασμένο για μέτρηση αποστάσεων κατά μήκος ακανόνιστων γραμμών. Έχει ένα μετρητικό τροχό διαμέτρου 10-12mm, ο οποίος στερεώνεται σε ένα διαβαθμισμένο κύκλο, έτσι ώστε κάθε πλήρης περιστροφή του τροχού να μετακινεί μίαν ακίδα πάνω στον κύκλο κατά μία υποδιαίρεση. Όταν ο τροχός διατρέχει μια γραμμή καταγράφονται οι πλήρεις περιστροφές του κύκλου και με βάση το ανάπτυγμα της περιφέρειας του τροχού, υπολογίζεται το μήκος της γραμμής.

5.6 Μέθοδοι μέτρησης εμβαδού επιφανειών

Πριν αναλυθούν οι μέθοδοι μέτρησης του εμβαδού επιφανειών, θεωρείται αναγκαίο να δοθούν οι ορισμοί που χαρακτηρίζουν τις επιφάνειες στις διάφορες εφαρμογές της χαρτομετρίας. Μια επιφάνεια είναι μια κλειστή περιοχή, της οποίας το εμβαδόν είναι γνωστό, ή ζητείται. Στο κτηματολόγιο χρησιμοποιείται ο όρος γεωτεμάχιο, για το χαρακτηρισμό μιας διακριτής επιφανειακής μονάδας, η

οποία έχει κάποια ταυτότητα. Το πολύγωνο είναι ένα γεωμετρικό αρχέτυπο που περιγράφει τα όρια μιας κλειστής περιοχής.

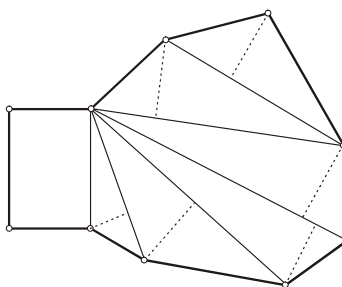
Η «ισεμβαδική ευθεία» είναι μια ευθεία γραμμή που επιλέγεται να αντικαταστήσει το ακανόνιστο τμήμα του περιγράμματος μιας επιφάνειας, η οποία έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα εκατέρωθεν σχηματιζόμενα πολύγωνα μεταξύ αυτής και του περιγράμματος της επιφάνειας να είναι ισοδύναμα (Σχήμα 5.3).



Σχήμα 5.3 Η «ισεμβαδική ευθεία»

5.6.1 Μετρήσεις απλών γεωμετρικών σχημάτων

Η μέθοδος βασίζεται σε μετρήσεις πλευρών επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, που προσομοιώνουν τη μορφή της επιφάνειας που μετρείται. Αυτό μπορεί να γίνει με μετρήσεις των πλευρών από το χάρτη και μετατροπή τους σύμφωνα με την κλίμακα, ή με μετρήσεις των πλευρών στο έδαφος. Οι τύποι υπολογισμού των γεωμετρικών σχημάτων που δημιουργούνται από το χωρισμό της υπό μέτρηση επιφάνειας, είναι γνωστοί από τη γεωμετρία. Στο Σχήμα 5.4 το εμβαδόν της επιφάνειας υπολογίζεται αθροίζοντας τα εμβαδά ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και έξι τριγώνων.



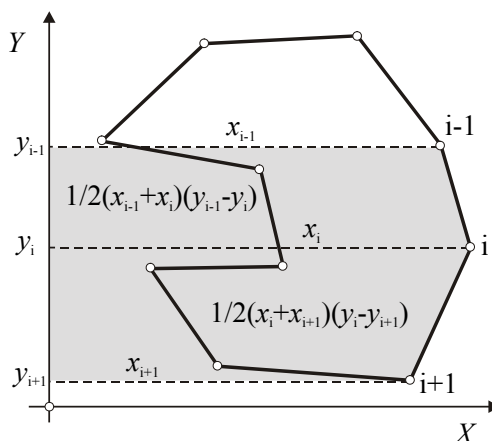
Σχήμα 5.4 Μέτρηση εμβαδού με απλά γεωμετρικά σχήματα

5.6.2 Υπολογισμός εμβαδού με συντεταγμένες

Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας από διαφορές συντεταγμένων μιας ακολουθίας σημείων της περιμέτρου της (Σχήμα 5.5), είναι μια εξέλιξη της μεθόδου των απλών γεωμετρικών μεθόδων. Η μέθοδος αποκτά ιδιαίτερη σημασία λόγω της εφαρμογής ψηφιακών τεχνικών, γιατί είναι δυνατό να μετρηθούν από χάρτες επιφάνειες εντελώς ακανόνιστης μορφής, με τη βοήθεια ψηφιοποιητή. Η μέθοδος είναι πολύ γρήγορη και αξιόπιστη. Η εφαρμογή της στηρίζεται στον τύπο υπολογισμού εμβαδών τραπεζίων. Έτσι, το εμβαδόν μιας κλειστής επιφάνειας θα είναι:

$$A = \frac{1}{2} \sum_1^k x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_1^k y_i (x_{i-1} - x_{i+1}).$$

Είναι επίσης δυνατόν, με αντίστοιχο τρόπο, να υπολογιστεί το εμβαδόν της κλειστής επιφάνειας όταν τα σημεία της περιμέτρου είναι εκφρασμένα σε πολικές συντεταγμένες.

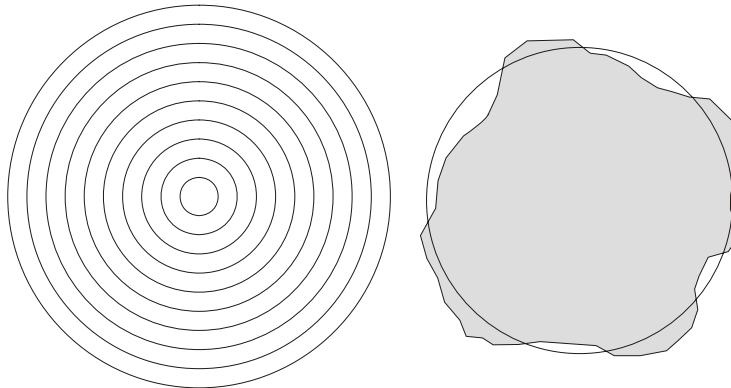


Σχήμα 5.5 Αναλυτικός υπολογισμός εμβαδού με συντεταγμένες

5.6.3 Μέτρηση επιφανειών συγκρίνοντας με σταθερά σχήματα

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη χρήση ενός ή περισσότερων κανονικών σχημάτων σταθερού μεγέθους ως εργαλείου μέτρησης του εμβαδού. Η επιλογή του σχήματος και του μεγέθους του γίνεται με κριτήριο το όσο το δυνατόν καλύτερο ταιρίασμά του με τη μετρούμενη επιφάνεια. Το μέγεθος του κανονικού σχήματος επιλέγεται να είναι μικρότερο από την έκταση της επιφάνειας και να γίνεται εκτίμηση του πόσες φορές χωράει για να την καλύψει. Συνήθως ως

κανονικό σχήμα επιλέγεται το τετράγωνο, το ορθογώνιο ή ο κύκλος, που αναπαράγονται σε μια διαφάνεια επίθεσης, έως ότου καλύψει την έκταση της μετρούμενης επιφάνειας (Σχήμα 5.6).



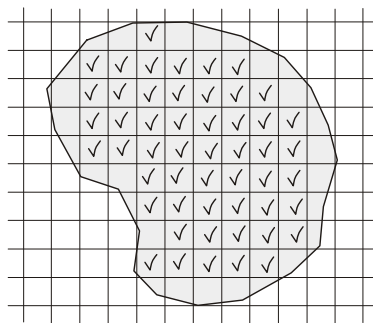
Σχήμα 5.6 Μέτρηση εμβαδού επιφάνειας συγκρίνοντας με κύκλο

Το ανθρώπινο μάτι έχει την ικανότητα να συγκρίνει δύο εκτάσεις ίδιου εμβαδού, ακόμα και αν η μια είναι κύκλος και η άλλη έχει ένα ακανόνιστο σχήμα. Έχουν μάλιστα περιγραφεί αρκετές συσκευές που εμφανίζουν βαθμωτούς κύκλους, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι σε συγκεκριμένες εφαρμογές της στερεολογίας, όπως π.χ. στην ιστολογία, γιατί πολλά από τα αντικείμενα μελέτης έχουν περίγραμμα που μοιάζει με κύκλο. Το κύριο μειονέκτημα στην εφαρμογή της μεθόδου αυτής είναι η προϋπόθεση της ομοιότητας της μορφής της μετρούμενης επιφάνειας με κάποιο γεωμετρικό πρότυπο (Σχήμα 5.6). Οι επιφάνειες που παρουσιάζουν ενδιαμέση μορφή δεν μπορούν να μετρηθούν, αλλά μόνο να εκτιμηθούν.

5.6.4 Μέθοδος τετραγωνικού καννάβου

Σύμφωνα τη μέθοδο αυτή, ένας τετραγωνικός κάνναβος τοποθετείται πάνω στην επιφάνεια που πρόκειται να μετρηθεί (Σχήμα 5.7). Η επιλογή του καννάβου γίνεται με την προϋπόθεση ότι η ισαποχή του τετραγωνικού κάνναβου είναι κατά πολύ μικρότερη από την έκταση της επιφάνειας. Αν η ισαποχή του καννάβου είναι: d , το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου του καννάβου θα είναι: d^2 . Εάν η επιφάνεια καλύπτεται από: n τέτοια τετράγωνα, τότε το εμβαδόν της θα είναι:

$$a = n d^2 .$$



Σχήμα 5.7 Μέτρηση εμβαδού με κάνναβο

Αυτή βέβαια είναι μια προσεγγιστική τιμή γιατί δεν έχει ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι η περίμετρος της μετρούμενης επιφάνειας διέρχεται μέσα από μια ακολουθία τετραγώνων περικλείοντας ένα διαφορετικό τμήμα από το καθένα από αυτά. Ως επακόλουθο προκύπτει ότι, ο υπολογισμός εκείνων μόνον των τετραγώνων τα οποία βρίσκονται ολόκληρα μέσα στην έκταση είναι μια υποεκτίμηση του εμβαδού. Υπάρχουν τρεις άλλες μέθοδοι με τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν τα μερικώς καλυμμένα τετράγωνα:

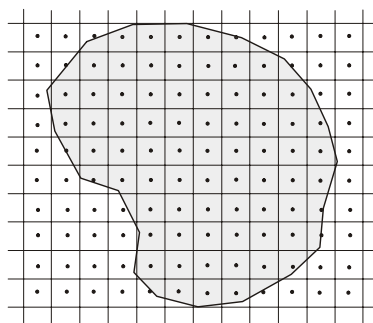
- Να συνυπολογιστούν όλα ως πλήρη τετράγωνα. Αυτό προφανώς οδηγεί σε μια υπερεκτίμηση του εμβαδού.
- Να εκτιμηθεί το τμήμα του κάθε μη πλήρους τετραγώνου από το οποίο περνά η περίμετρος της περιοχής και το άθροισμά τους να προστεθεί στην προσεγγιστική τιμή που έχει προκύψει από τα ολόκληρα τετράγωνα. Έτσι αν το άθροισμα των μη πλήρων τετραγώνων είναι: α' , το συνολικό εμβαδόν θα είναι: $A = a + \alpha'$.
- Υπολογίζονται τα μη πλήρη τετράγωνα, όμως, αντί να εκτιμηθεί το τμήμα του που ανήκει στην έκταση, γίνεται η υπόθεση ότι κατά μέσο όρο καλύπτεται η μισή επιφάνεια των περιθωριακών τετραγώνων. Έτσι αν είναι n' τα μη πλήρη τετράγωνα, τότε το πρόσθετο εμβαδόν θα είναι:

$$\alpha' = \frac{n' d^2}{2}.$$

Είναι προφανές ότι η δεύτερη μέθοδος είναι η πλέον ολοκληρωμένη για τον προσδιορισμό του εμβαδού και είναι αυτή που κάνει τη μέθοδο του τετραγωνικού καννάβου να διακρίνεται από τις άλλες μεθόδους. Εάν όμως το ποσοστό του κάθε τετραγώνου υπολογιστεί ξεχωριστά, χρειάζεται πολύς χρόνος για να ολοκληρωθεί η μέτρηση. Αυτός είναι και ο λόγος που συχνά προτιμάται η τρίτη περίπτωση.

5.6.5 Μέθοδοι τετραγωνικού καννάβου με κουκίδες

Υπάρχουν δύο διαφορετικές διαδικασίες μετρήσεων που βασίζονται στη καταμέτρηση σημείων. Στην ενότητα αυτή διακρίνονται ως άμεσες και έμμεσες μέθοδοι. Η καταμέτρηση των σημείων, με την άμεση μέθοδο, βασίζεται σε έναν τετραγωνικό καννάβο, στον οποίο σε κάθε κέντρο των σχηματιζόμενων τετραγώνων απεικονίζεται μία κουκίδα (Σχήμα 5.8). Ο καννάβος με τις κουκίδες τοποθετείται επάνω στο χάρτη και γίνεται καταμέτρηση του αριθμού των κουκίδων που βρίσκονται μέσα στο περίγραμμα της επιφάνειας. Το αποτέλεσμα της καταμέτρησης πολλαπλασιάζεται με το εμβαδόν του τετραγώνου και προσδιορίζεται το εμβαδόν της επιφάνειας. Με την έμμεση μέθοδο προσδιορίζεται το εμβαδόν μιας επιφάνειας που απεικονίζεται σε ένα χάρτη, από το λόγο των κουκίδων που περιέχονται μέσα στην έκταση της επιφάνειας, προς τις κουκίδες που κείνται έξω από αυτήν. Το εμβαδόν της επιφάνειας υπολογίζεται από το λόγο και το εμβαδόν ολόκληρης της έκτασης του χάρτη. Επειδή η έμμεση μέθοδος δεν εξαρτάται από τη διάταξη των κουκίδων, είναι περισσότερο αποτελεσματική. Έτσι, με την έμμεση μέθοδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα δίκτυο με τυχαία διάταξη κουκίδων. Η έμμεση μέθοδος είναι περισσότερο εύχρηστη όταν ζητείται να προσδιοριστεί το συνολικό εμβαδόν μικρών διάσπαρτων επιφανειακών εκτάσεων, για παράδειγμα δασικών εκτάσεων, που καλύπτουν ολόκληρη την περιοχή του χάρτη. Η χρήση της άμεσης μεθόδου θα επέβαλε τον ανεξάρτητο προσδιορισμό κάθε διακριτής επιφάνειας ξεχωριστά.



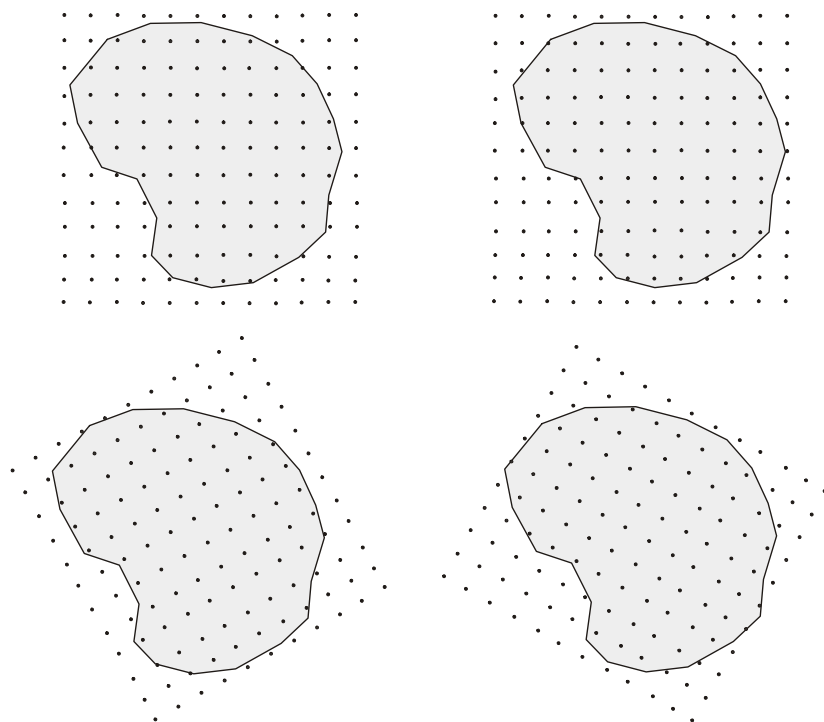
Σχήμα 5.8 Μέτρηση εμβαδού με καννάβο και κουκίδες

5.6.6 Άμεση μέθοδος μέτρησης με κουκίδες

Όπως και η άμεση μέθοδος του τετραγωνικού καννάβου με κουκίδες, έτσι και αυτή βασίζεται σε κανονικά διαταγμένες κουκίδες στις κορυφές ενός τετραγωνικού καννάβου (Σχήμα 5.9), με τη διαφορά ότι δεν είναι απαραίτητη στη μέθοδο αυτή η σχεδίαση του καννάβου. Κάθε κουκίδα αντιπροσωπεύει το κέντρο ενός ιδεατού τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν θεωρείται ως μοναδιαίο. Οι

διαταγμένες κουκίδες τοποθετούνται επάνω στο χάρτη και μετράται ο αριθμός των κουκίδων που βρίσκονται μέσα στην έκταση της επιφάνειας. Το εμβαδόν της επιφάνειας (A) προσδιορίζεται από τον πολλαπλασιασμό του αριθμού των κουκίδων (n) επί το εμβαδόν της μοναδιαίας επιφάνειας (d^2):

$$A = n d^2 .$$



Σχήμα 5.9 Μέτρηση εμβαδού με κουκίδες

Με τη μέθοδο αυτή δεν είναι δυνατή η εκτίμηση των μη πλήρων τετραγώνων, γιατί δεν σχεδιάζονται συνήθως οι γραμμές του καννάβου. Για να ξεπεραστεί αυτό το μειονέκτημα γίνονται πολλές ανεξάρτητες καταμετρήσεις, είτε μεταθέτοντας το δίκτυο των κουκίδων είτε στρέφοντάς το κατά αυθαίρετες γωνίες (Σχήμα 5.9). Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας έχουμε ανεξάρτητες εκτιμήσεις για τις καταμετρήσεις, και στον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας χρησιμοποιείται η μέση τιμή των καταμετρήσεων.

5.6.7 Έμμεση μέθοδος μέτρησης με κουκίδες

Με την έμμεση μέθοδο μέτρησης με κουκίδες η διάταξη των κουκίδων τοποθετείται πάνω σε ένα τμήμα του χάρτη, του οποίου το εμβαδόν (A_1) είναι ήδη

γνωστό από άλλη πηγή. Στη συνέχεια, μετρώνται όλες τις κουκίδες που κείνται μέσα σε αυτήν την περιοχή με το γνωστό εμβαδόν (n_1). Επίσης, μετρώνται όλες οι κουκίδες που βρίσκονται εντός του περιγράμματος της άγνωστης επιφάνειας (n). Το εμβαδόν της άγνωστης επιφάνειας (A) υπολογίζεται από το λόγο των δύο καταμετρήσεων επί το εμβαδόν της γνωστής:

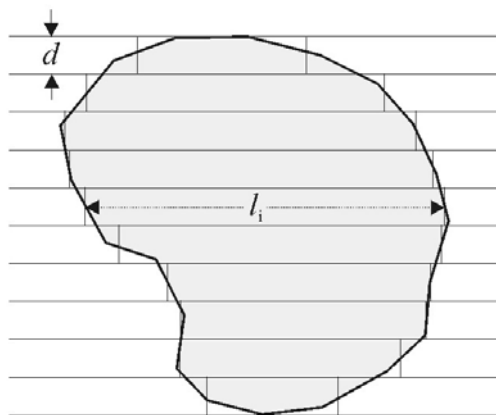
$$A = \frac{n}{n_1} A_1 .$$

5.6.8 Μέθοδος των λωρίδων

Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιείται μία δέσμη ισαπεχουσών παράλληλων γραμμών, η οποία τοποθετείται πάνω στο χάρτη. Στα σημεία που η περίμετρος της μετρούμενης έκτασης τέμνει τις παράλληλες γραμμές φέρονται κάθετες «ισεμβαδικές ευθείες» γραμμές (δες την ενότητα 5.6), έτσι ώστε να σχηματίζονται ορθογώνια παραλληλόγραμμα (Σχήμα 5.10). Μετρώνται οι αποστάσεις στις διευθύνσεις των παράλληλων γραμμών: l_i , μεταξύ των κάθετων γραμμών και το εμβαδόν της επιφανειακής έκτασης προκύπτει από τη σχέση:

$$A = d \sum_{i=1}^k l_i ,$$

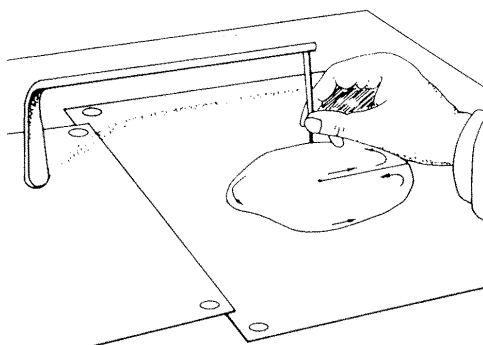
όπου: d η ισαποχή της παράλληλης δέσμης ευθειών.



Σχήμα 5.10 Μέτρηση εμβαδού με λωρίδες

5.6.9 Μέτρηση επιφανειών με εμβαδόμετρο

Η μέθοδος αυτή ανήκει στην κατηγορία των μηχανικών μεθόδων μέτρησης επιφανειών με χρήση ειδικού οργάνου, του εμβαδομέτρου (Σχήμα 5.11). Το μεγάλο προσόν της μεθόδου αυτής είναι η ταχύτητα με την οποία βρίσκεται το εμβαδόν ανεξάρτητα από τη μορφή των ορίων της επιφάνειας. Το εμβαδόμετρο που χρησιμοποιείται σε χαρτομετρικές εργασίες είναι συνήθως ένα πολικό εμβαδόμετρο. Περιγραφή του οργάνου και πρακτικές οδηγίες χρήσης του μπορεί να βρεθούν σε βιβλιογραφία σχετική με γεωδαιτικά όργανα.



Σχήμα 5.11 Το εμβαδόμετρο

5.7 Υπολογισμοί όγκων

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο της χαρτομετρίας, η διαδικασία υπολογισμού όγκων, αποτελεί μια παράγωγη διαδικασία των χαρτομετρικών εργασιών. Στηρίζεται αφενός στη άμεση μέτρηση του εμβαδού εκτάσεων και αφετέρου στην ερμηνεία των πληροφοριών που απεικονίζει ένας χάρτης για την υψομετρία της περιοχής. Έτσι, με δεδομένο ότι στους περισσότερους, αν όχι σε όλους τους μετρητικούς χάρτες, το ανάγλυφο αποδίδεται με υψομετρικές καμπύλες, η τρίτη διάσταση προκύπτει από την ερμηνεία τους.

Για τον υπολογισμό των όγκων ενός μορφολογικού σχηματισμού, αυτός χωρίζεται σε γεωμετρικά στερεά των οποίων ο όγκος υπολογίζεται με γνωστές σχέσεις της γεωμετρίας. Τα γεωμετρικά σώματα που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι πρίσματα, πυραμίδες και σφήνες (Σχήμα 5.12). Οι αντίστοιχοι τύποι υπολογισμού του όγκου (V) τους είναι:

Για το πρίσμα:

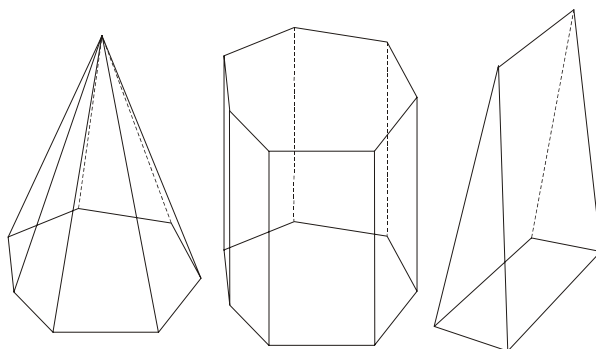
$V = A h$, όπου: A το εμβαδόν της βάσης και h το ύψος.

Για την πυραμίδα:

$$V = \frac{1}{3} A h, \text{ όπου: } A \text{ το εμβαδόν της βάσης και } h \text{ το ύψος.}$$

Για τη σφήνα:

$$V = \frac{1}{2} A h, \text{ όπου: } A \text{ το εμβαδόν της βάσης και } h \text{ το ύψος.}$$



Σχήμα 5.12 Τα στερεά σώματα (πυραμίδα, πρίσμα και σφήνα)

Στην περίπτωση που ο μορφολογικός σχηματισμός δεν μπορεί να προσομοιωθεί με γεωμετρικό σώμα, ο όγκος του (V) υπολογίζεται προσεγγιστικά από τα εμβαδά των παράλληλων βάσεων (A_1 και A_2) και την υψομετρική τους διαφορά (Δh), με βάση τη σχέση:

$$V = \frac{\Delta h}{2} (A_1 + A_2) .$$

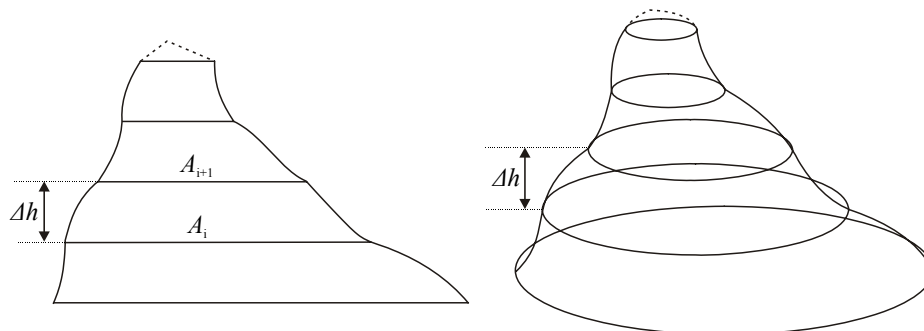
Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή στον υπολογισμό του όγκου μιας σειράς: n διαδοχικών υψομετρικών καμπύλων (Σχήμα 5.13), εμβαδού: $A_1, A_2, \dots, A_n$ ισοδιάστασης: Δh , προκύπτει η ακόλουθη:

$$V = \frac{\Delta h}{2} (A_1 + A_n) + \Delta h \sum_{i=2}^{n-1} A_i .$$

Στην ακραία περίπτωση υπολογισμού του όγκου ενός στερεού που έχει ως βάση κλειστή υψομετρική καμπύλη και ύψος συγκεκριμένο σημείο γνωστού υψομέτρου, χρησιμοποιείται ο τύπος υπολογισμού όγκου πυραμίδας.

Η διαδικασία υπολογισμού όγκων από τους χάρτες είναι αναγκαία σε σημαντικές εφαρμογές πολλών δραστηριοτήτων του μηχανικού και ως χαρακτηριστικά παραδείγματα αναφέρονται οι περιπτώσεις εκσκαφών στα έργα

οδοποιίας, οι υπολογισμοί όγκου σε εργασίες λατομείων, οι υπολογισμοί υδατικών όγκων λιμνών κα.



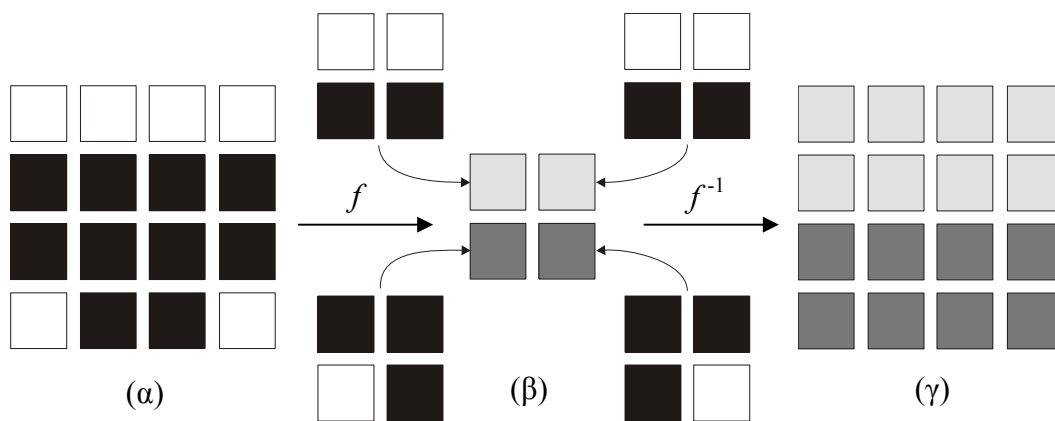
Σχήμα 5.13 Αρχή υπολογισμού του όγκου ενός μορφολογικού σχηματισμού

5.8 Σχέση μεταξύ μετρήσεων και κλίμακας

Τα χωρικά δεδομένα συλλέγονται σε συγκεκριμένη κλίμακα κάθε φορά. Η συλλογή δεδομένων σε απόλυτη αντιστοιχία ένα-προς-ένα με την πραγματικότητα είναι στην πράξη αδύνατη. Στην πραγματικότητα, κάθε χάρτης είναι το αποτέλεσμα της οπτικοποίησης των χωρικών δεδομένων και ουσιαστικά αποτελεί ένα αντίγραφο του πραγματικού κόσμου και όχι μια απόλυτα αυθεντική «εικόνα» του. Με αυτήν την έννοια η συλλογή των χωρικών δεδομένων αποτελεί μια λειτουργική συσχέτιση μεταξύ της πραγματικότητας και της ψηφιακής της αναπαράστασης παρά ένα μετασχηματισμό του ίδιου του πραγματικού κόσμου. Η συγκεκριμένη κλίμακα που έχει επιλεγεί για τη συλλογή των χωρικών δεδομένων θα πρέπει να αντανακλά τους αντικειμενικούς σκοπούς που έχουν προσδιοριστεί για το χάρτη. Η κλίμακα επιπλέον θα πρέπει να ταιριάζει με την ακρίβεια των οργάνων που χρησιμοποιούνται για τη συλλογή των δεδομένων. Άλλωστε, επειδή όλα τα όργανα χαρακτηρίζονται από πεπερασμένη δυνατότητα διακριτικής ανάλυσης, στην αναγνώριση των χωρικών οντοτήτων, είναι αδύνατη η συλλογή χωρικών δεδομένων σε λεπτομέρεια μεγαλύτερη από αυτήν που αντιστοιχεί στη διακριτική τους ανάλυση.

Όσο η κλίμακα μειώνεται, ανάλογα μειώνεται και το επίπεδο των λεπτομερειών των χωρικών οντοτήτων που καταγράφεται με τα δεδομένα. Εάν συρρικνώσουμε αρχικά την εικόνα ενός χάρτη και στη συνέχεια τη μεγεθύνουμε, δεν είναι δυνατό πάντα να πετύχουμε η αντίστροφη εικόνα να ταυτίζεται με την αρχική όταν η αναγωγή γίνεται πέρα από τη διακριτική ανάλυση του μέσου αποθήκευσης. Στο Σχήμα 5.14α παρουσιάζεται μια εικόνα που απαρτίζεται από δεκαέξι εικονοστοιχεία λευκά ή μαύρα. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι για την αναγωγή της εικόνας κάθε τέσσερα εικονοστοιχεία μετατρέπονται σε ένα που

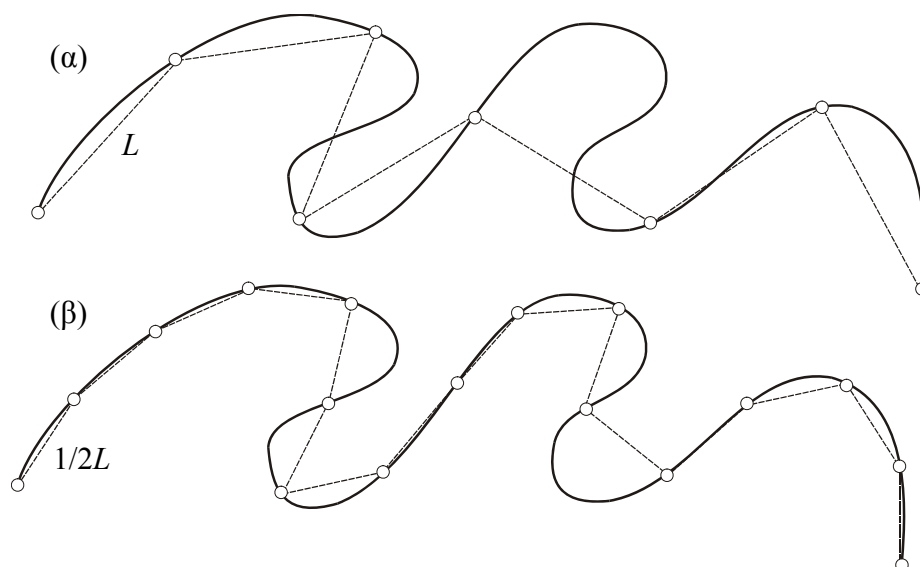
εκφράζει και τη διακριτική ανάλυση του οργάνου καταγραφής. Τα δεκαέξι εικονοστοιχεία της αρχικής εικόνας με την αναγωγή μετατρέπονται σε τέσσερα εικονοστοιχεία (Σχήμα 5.14β). Τα εικονοστοιχεία της παράγωγης εικόνας δεν είναι ούτε λευκά ή μαύρα αλλά έχουν τόνους του γκρι. Κάθε εικονοστοιχείο του Σχήματος 5.14β απεικονίζεται με τόνο του γκρι, που εξαρτάται από τον αριθμό των λευκών και μαύρων εικονοστοιχείων της αρχικής εικόνας που αντιπροσωπεύει. Αν αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό με σκοπό να ανασυνθέσουμε την αρχική εικόνα μεγεθύνοντας τη συρρικνωμένη, μπορούμε να επαναφέρουμε την εικόνα στο αρχικό της μέγεθος όμως δεν είναι δυνατό να ανακτηθεί το αρχικό επίπεδο λεπτομερειών. Δεν είναι εφικτό κατά τη διάρκεια της μεγέθυνσης να γνωρίζουμε πόσα και ποια από τα εικονοστοιχεία της αρχικής εικόνας ήταν λευκά ή μαύρα (Σχήμα 5.14γ).



Σχήμα 5.14 Απώλεια πληροφορίας σε μεταβολές της κλίμακας στα όρια της διακριτικής ανάλυσης εικονοστοιχείων

Έτσι, εάν τα περιγραφικά δεδομένα, που αναφέρονται σε ορισμένες χωρικές οντότητες έχουν συγχωνευθεί, δεν είναι δυνατό να επανέλθουν στην αρχική τους μορφή, εκτός αν διατηρηθούν τα αρχικά δεδομένα. Εάν, για παράδειγμα, γνωρίζουμε μόνον τη μέση ηλικία των κατοίκων μιας περιοχής, ποτέ δεν θα μπορούμε να εκτιμήσουμε την ηλικία κάθε ενός κατοίκου της. Κατά τη διάρκεια της χαρτογραφικής γενίκευσης και ανάλυσης, σε ψηφιακό περιβάλλον, οι μεταβολές της κλίμακας που αναφέρονται σε αφαίρεση λεπτομερειών (συγχώνευση) μπορούν εύκολα να αντιμετωπιστούν με τρόπο που να εξασφαλίζεται η ακεραιότητα των αρχικών δεδομένων. Από τη στιγμή που περιγραφικά και χωρικά δεδομένα έχουν καταχωρηθεί στη βάση δεδομένων, σε συγκεκριμένη κλίμακα, έχει θεσπιστεί η χωρική ανάλυση της βάσης δεδομένων και οποιαδήποτε λεπτομέρεια πέρα από το επίπεδο αυτό μπορεί να εισαχθεί μόνο με προσεγγιστική διαδικασία. Ένα πλεονέκτημα της διανυσματικής δομής δεδομένων σε σχέση με την κανονικοποιημένη, εστιάζεται στην εφαρμογή

συνεχόμενων τιμών μεταβολής της κλίμακας αντί διακριτών πολλαπλασίων. Πάντως ανεξάρτητα από το πόσο μεγθύνεται ένας χάρτης, δεν είναι δυνατό να αποδοθεί μεγαλύτερη λεπτομέρεια από την διακριτική ανάλυση που χαρακτηρίζει την αρχική βάση δεδομένων.



Σχήμα 5.15 Μεταβολή αναπτύγματος ως προς τη μεταβολή του διαστήματος δειγματοληψίας

5.8.1 Σχέση μεταξύ κλίμακας αναπτύγματος ακανόνιστων γραμμών

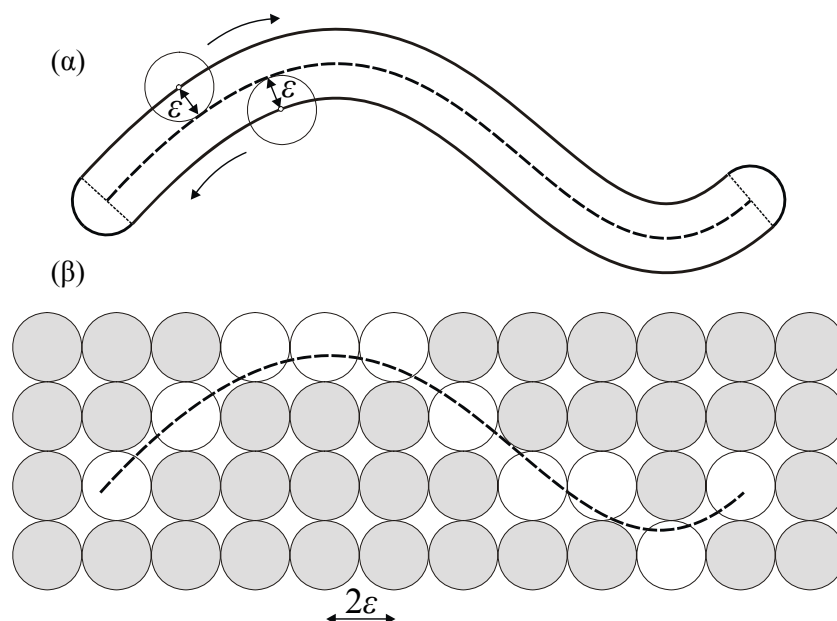
Οι μετρήσεις ιδιοτήτων χωρικών οντοτήτων από χάρτες, όπως είναι τα αναπτύγματα γραμμών, τα εμβαδά χωρίων κλπ., εξαρτώνται από την κλίμακα. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμή που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.15α αναπαρίσταται ψηφιακά από μια ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων ίσου μήκους L , τότε το ανάπτυγμα της γραμμής είναι ίσο με $7L$. Εάν η γραμμή αναπαρασταθεί από ευθύγραμμο τμήματα μειωμένα κατά το ήμισυ του αρχικού μήκους, δηλαδή $L/2$, τότε το ανάπτυγμα της γραμμής προκύπτει ίσο με $16(L/2)$ ή $8L$ (Σχήμα 5.15β). Δηλαδή, το μετρούμενο ανάπτυγμα μιας χαρτογραφικής γραμμικής οντότητας είναι συνάρτηση του διαστήματος δειγματοληψίας της συσκευής καταγραφής και της πολυπλοκότητας του σχήματος της γραμμής.

Καθώς το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος διαδοχικά υποδιαιρείται το ανάπτυγμα της γραμμής συνεχώς αυξάνεται χωρίς να συγκλίνει σε μια συγκεκριμένη τιμή. Όσο η διακριτική ανάλυση γίνεται μικρότερη, τόσο η γραμμή αποκτά περισσότερες λεπτομέρειες. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα, με το οποίο προσεγγίζεται η γραμμή, σε μικρότερες διακριτικές αναλύσεις αντικαθίσταται

από μικρά τμήματα γραμμής, με αποτέλεσμα το ανάπτυγμα να αυξάνει εξαρτώμενο από το όριο του οργάνου μέτρησης.

5.8.2 Η ε -κυκλική περιοχή και αναπτύγματα γραμμών

Ο Perkal επιχείρησε να μετρήσει το ανάπτυγμα γραμμής προσδιορίζοντας το εμβαδόν της ε -κυκλικής περιοχής της γραμμής. Η ε -κυκλική περιοχή της γραμμής δημιουργείται όταν ένας δίσκος ακτίνας ε κυλήσει κατά μήκος της γραμμής και προς τις δύο διευθύνσεις, τότε το περίγραμμά της ορίζεται από το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των διαδοχικών δίσκων που την περιβάλλουν σε κάθε της σημείο (Σχήμα 5.16α). Το ανάπτυγμα της γραμμής μπορεί να προκύψει από το εμβαδόν της ε -κυκλικής περιοχής αν αφαιρεθεί το εμβαδόν του δίσκου και το αποτέλεσμα διαιρεθεί με 2ε (Σχήμα 5.16α). Το εμβαδόν της ε -κυκλικής περιοχής μπορεί να εκτιμηθεί εμπειρικά με τη βοήθεια ενός συστήματος εφαπτόμενων κύκλων ακτίνας ε των οποίων τα κέντρα είναι τοποθετημένα στις κορυφές ενός τετραγωνικού καννάβου, ισαποχής 2ε (Σχήμα 5.16β). Το εμβαδόν της ε -κυκλικής περιοχής προσδιορίζεται μετρώντας τον αριθμό των κύκλων μέσα από του οποίους διέρχεται η γραμμή και πολλαπλασιάζοντάς τον επί το εμβαδόν του κύκλου.



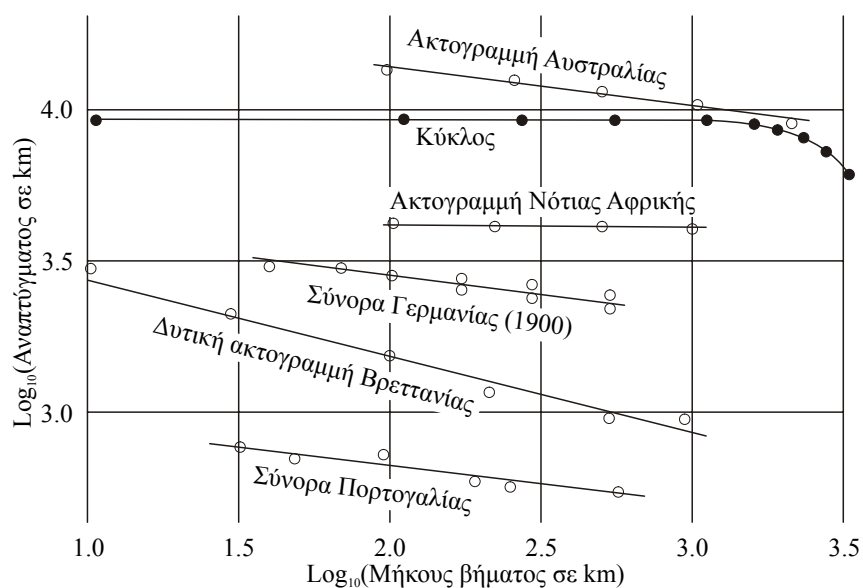
Σχήμα 5.16 Η ε -κυκλική περιοχή μιας γραμμής

5.8.3 Αναπτύγματα ακανόνιστων γραμμών και κλασματική γεωμετρία

Ο Richardson μελέτησε τη σχέση μεταξύ αναπτύγματος χαρτογραφικών γραμμών και κλίμακας μετρώντας τα αναπτύγματα ορισμένων ακτογραμμών ή συνόρων κρατών από χάρτες. Βασισμένος σε εμπειρική διερεύνηση, ο Richardson παρατήρησε, ότι η μορφή του διαγράμματος, με λογαριθμικούς άξονες, του αναπτύγματος των γραμμών ως προς το μήκος του βήματος μέτρησης πλησιάζει την ευθεία γραμμή (Σχήμα 5.17). Στη συνέχεια, στηριγμένος σε αυτήν την παρατήρηση απόδωσε τη σχέση μεταξύ του αναπτύγματος και του βήματος ως εξής:

$$L(x) = A x^{1-D}$$

όπου: $L(x)$ είναι το ανάπτυγμα της γραμμής,
 A είναι η σταθερά αναλογίας,
 x είναι το μήκος του βήματος μέτρησης και
 D είναι ο εκθέτης.



Σχήμα 5.17 Τα αποτελέσματα των αναπτυγμάτων που μελέτησε ο Richardson

Ο Mandelbrot ασχολήθηκε με το να ερμηνεύσει τη σημασία του εκθέτη D και παρατήρησε ότι λαμβάνει δεκαδικές τιμές. Σύμφωνα με τη θεωρία που ανέπτυξε, την **κλασματική γεωμετρία**, ο εκθέτης D αναπαριστά την **κλασματική διάσταση** των γεωμετρικών οντοτήτων. Η τοπολογική διάσταση σημείων, γραμμών και επιφανειών είναι αντίστοιχα μηδέν, ένα και δύο. Η μέτρηση του μεγέθους των γραφικών αντικειμένων, στα πλαίσια της ευκλείδειας

γεωμετρίας, υπολογίζεται πάντα ορίζοντας τη μονάδα μέτρησης. Έτσι το μέγεθος κάθε γραφικού αντικειμένου, προκύπτει ύστερα από σύγκριση με τη μονάδα μέτρησης και είναι πολλαπλάσιο της μονάδας μέτρησης υψωμένης σε δύναμη ίση με τη διάσταση του γραφικού αντικειμένου. Με αυτόν τον τρόπο το ανάπτυγμα μιας ευθείας γραμμής προσδιορίζεται από τον αριθμό των πολλαπλασίων της μονάδας μέτρησης υψωμένων στη μονάδα. Με ανάλογη θεώρηση, το εμβαδόν ενός χωρίου προσδιορίζεται από τον αριθμό των πολλαπλασίων της μονάδας μέτρησης υψωμένων στο τετράγωνο.

Με βάση την ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε φορά που η μονάδα μέτρησης υποδιπλασιάζεται, για να διατηρηθεί το ανάπτυγμα της γραμμής, διπλασιάζεται ο αριθμός των πολλαπλασίων της. Αντίστοιχα, για να διατηρηθεί το εμβαδόν ενός χωρίου τετραπλασιάζεται ο αριθμός των πολλαπλασίων της μονάδας μέτρησης.

Σύμφωνα με τον Mandelbrot η κλασματική διάσταση (D) μιας γραμμής μπορεί να μετρηθεί από τη σχέση:

$$D = \frac{\log\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right)}$$

όπου: n_1 είναι ο αριθμός των πολλαπλασίων του αναπτύγματος με το πρώτο βήμα μέτρησης,
 n_2 είναι ο αριθμός των πολλαπλασίων του αναπτύγματος με το δεύτερο βήμα μέτρησης,
 s_1 είναι το μήκος (μοναδιαίο) του πρώτου βήματος μέτρησης και
 s_2 είναι το μήκος (μοναδιαίο) του δεύτερου βήματος μέτρησης

Η κλασματική διάσταση ευθειών είναι ίση με τη μονάδα, δηλαδή ίση με την τοπολογική διάσταση της γραμμής. Εν γένει όμως, η κλασματική διάσταση των γραμμών είναι μεγαλύτερη της μονάδας και κυμαίνεται μεταξύ των τιμών ένα έως δύο. Όμοια, μία επίπεδη επιφάνεια έχει κλασματική διάσταση ίση με δύο, ενώ η κλασματική διάσταση μιας πτυχωμένης επιφάνειας κυμαίνεται μεταξύ των τιμών δύο έως τρία.

Η κλασματική διάσταση αποτελεί σημαντικό παράγοντα περιγραφής της πολυπλοκότητας των χαρτογραφικών οντοτήτων. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία των μελετών του Richardson, η τιμή της κλασματικής διάστασης μιας γραμμής μπορεί να προσδιοριστεί από την κλίση του διπλού λογαριθμικού διαγράμματος του αναπτύγματος της γραμμής ως προς το βήμα μέτρησης.

Θεμελιακή έννοια της κλασματικής γεωμετρίας είναι η ιδιότητα της **αυτό-ομοιότητας**. Σύμφωνα με αυτήν κάθε μέρος ενός γραφικού αντικειμένου είναι όμοιο προς το σύνολο είτε απόλυτα είτε με στατιστική διαδικασία. Από μελέτες

που έχουν γίνει, μετρώντας την κλασματική διάσταση γραμμών σε χάρτες μεγάλου εύρους κλιμάκων, προκύπτει ότι η τιμή της κλασματικής διάστασης των γραμμών δεν διατηρείται αμετάβλητη όταν η κλίμακα μεταβάλλεται κατά πολύ. Η διαφοροποίηση αυτή κυρίως οφείλεται στο γεγονός του υπερβολικού βαθμού γενίκευσης, λόγω της μεγάλης μεταβολής της κλίμακας, με αποτέλεσμα η μορφή των χαρτογραφικών γραμμών να αλλοιώνεται σε σημαντικό βαθμό. Επομένως, όταν διαχειριζόμαστε χαρτογραφικές γραμμές, σε χάρτες που διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς την κλίμακα, τα διαστήματα δειγματοληψίας θα εξαρτώνται από την κλίμακα και θα πρέπει να συσχετίζονται με την κλασματική διάσταση των γραμμών στην αντίστοιχη κλίμακα. Επιπλέον, το διάστημα δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι μικρότερο όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της κλασματικής διάστασης της γραμμής.

5.9 Στατιστικά δείγματα και χαρτομετρία

Στη στατιστική επεξεργασία ο όρος: **πληθυσμός** χρησιμοποιείται για κάθε συλλογή μεμονωμένων αντικειμένων ή τιμών μιας μεταβλητής. Ο πληθυσμός έχει δυο ουσιώδη χαρακτηριστικά. Πρώτον, τα μεμονωμένα αντικείμενα είναι του ίδιου είδους, για παράδειγμα μπορεί να είναι άνθρωποι ή αγελάδες, αλλά δεν μπορεί να είναι και άνθρωποι και αγελάδες, εκτός και αν ανήκουν σε ένα μεγαλύτερο πληθυσμό, των θηλαστικών. Δεύτερον, τα μεμονωμένα αντικείμενα ενός πληθυσμού διαφέρουν ως προς ένα τυπικό χαρακτηριστικό ή ιδιότητα, η οποία ονομάζεται: **μεταβλητή**. Μπορούν να διακριθούν δυο είδη πληθυσμού:

1. Πεπερασμένος πληθυσμός:

Αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό αντικειμένων, μονάδων ή μεμονωμένων αντικειμένων, όπως οι άνθρωποι ή οι αγελάδες. Η πλήρης απογραφή του πλήθους είναι εφικτή, παρόλο που μπορεί να απαιτεί πάρα πολύ χρόνο ή κόστος.

2. Μη πεπερασμένος πληθυσμός:

Ο πληθυσμός στην περίπτωση αυτή είναι προφανώς ακαθόριστα μεγάλος. Οι πιο πολλές φυσικές μετρήσεις ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Για παράδειγμα, ο πληθυσμός των μετρήσεων του μήκους μιας γραμμής είναι οι μη πεπερασμένες ξεχωριστές μετρήσεις που θα προκύψουν εάν η διαδικασία μέτρησης επαναλαμβανόταν συνεχώς, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Για να περιγραφούν τα χαρακτηριστικά μιας ομάδας αντικειμένων, ανεξάρτητα του αν αυτά ανήκουν σε πεπερασμένους, ή μη πεπερασμένους πληθυσμούς, γενικά είναι αδύνατο, ή πρακτικά δεν εφικτό να μετρηθεί κάθε στοιχείο του πληθυσμού. Αντί λοιπόν να επιχειρηθεί η εξέταση του συνόλου του

πληθυσμού, μελετάται ένα δείγμα από αυτόν. Επομένως, ένα δείγμα μπορεί να ορισθεί ως:

Ένα μέρος του πληθυσμού, ή ένα υποσύνολο ενός συνόλου μονάδων, που συνήθως επιλέγεται τυχαία, το οποίο προτίθεται να αντιπροσωπεύει ολόκληρο τον πληθυσμό.

Η έμφαση στον ορισμό βρίσκεται στη λέξη αντιπροσωπεύει.

Όλα τα μοντέλα δειγματοληψίας υποθέτουν ότι υπάρχουν οντότητες των οποίων τα ποσοστά ή τα μεγέθη μπορούν να αντιπροσωπευθούν σε διαφορετικό βαθμό ή επίπεδο εμπιστοσύνης μέσα στο υποσύνολο που επιλέγεται από ολόκληρο τον πληθυσμό. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση που υπολογίζονται, για παράδειγμα από ένα δείγμα μετρήσεων του μήκους μιας ακανόνιστης γραμμής, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι **εκτιμήσεις** της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης ολόκληρου του πληθυσμού. Τέλεια συμφωνία μεταξύ των εκτιμήσεων του δείγματος και των αληθινών τιμών του πληθυσμού δεν μπορεί να υπάρχει, επειδή οι εκτιμήσεις περιέχουν σφάλματα. Τα απόλυτα μεγέθη αυτών των σφαλμάτων δεν μπορούν να οριστούν εφόσον η αληθινή μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του πληθυσμού δεν είναι γνωστά, όπως ακριβώς συμβαίνει και στη μελέτη των σφαλμάτων των μετρήσεων. Επομένως είναι μόνο δυνατόν να εκτιμηθεί το μέγεθός τους με την έννοια της πιθανότητας, σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά της **κατανομής** του δείγματος. Αυτή είναι η κατανομή που μπορεί να δημιουργηθεί αν επιλεγεί ένας μεγάλος αριθμός ξεχωριστών δειγμάτων από τον ίδιο πληθυσμό και θεωρηθεί η μέση τιμή του κάθε δείγματος ως μια μεμονωμένη παρατήρηση της μέτρησης. Το αν από το δείγμα προκύπτουν αποτελέσματα που είναι αντιπροσωπευτικά του πληθυσμού ή όχι, εξαρτάται από το αν είναι ανεπηρέαστο και αν τα σφάλματα του δείγματος είναι μικρά. Για να μην είναι το δείγμα επηρεασμένο, η επιλογή θα πρέπει να ορίζεται από μια διαδικασία που δεν επηρεάζεται από την ποιότητα των αντικειμένων που μελετώνται και να είναι απαλλαγμένη από οποιοδήποτε στοιχείο προερχόμενο από τον παρατηρητή. Ένα επαρκές δείγμα έχει σχετικά μικρό εύρος σφαλμάτων εκτίμησης και επομένως αντιστοιχεί στην προηγούμενη περιγραφή ενός ακριβούς συνόλου μετρήσεων. Η κύρια απαίτηση οποιουδήποτε μοντέλου δείγματος είναι η ακρίβεια, η οποία αντιπροσωπεύει τη μη ύπαρξη επηρεασμού. Οι δυο στόχοι πρέπει να επιτευχθούν κατά τη χρήση της **δειγματοληπτικής στρατηγικής**, η οποία περιλαμβάνει την επιλογή των κατάλληλων μεθόδων δειγματοληψίας και μεγέθους δειγμάτων.

5.9.1 Οι ιδιότητες του στατιστικού δείγματος

Για τη δημιουργία ενός στατιστικά έγκυρου δείγματος πρέπει να εξασφαλίζονται δύο σημαντικές συνθήκες, ανεξάρτητες της φύσης του πληθυσμού ή του σχεδιασμού του μοντέλου δειγματοληψίας.

1. Κάθε μεμονωμένος πληθυσμός πρέπει να συνδέεται με μια γνωστή διαδικασία επιλογής. Αυτή η συνθήκη μπορεί να ικανοποιείται εάν ο πληθυσμός έχει διαιρεθεί σε ίσες μονάδες, όπως είναι οι επιφάνειες συγκεκριμένου μεγέθους, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χωρικές μονάδες δειγματοληψίας. Οι χωρικές μονάδες πρέπει να καλύπτουν ολόκληρο τον πληθυσμό, αλλά δεν πρέπει να επικαλύπτονται, δηλαδή κάθε στοιχείο του πληθυσμού να ανήκει σε μια και μόνο μια χωρική μονάδα.
2. Η μέθοδος επιλογής πρέπει να είναι συνεπής με την πρώτη συνθήκη –ότι δηλαδή, οι πιθανότητες να επιλεγεί κάθε χωρική μονάδα να είναι ίσες. Αυτό μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο με μια μέθοδο τυχαίας επιλογής των μονάδων δειγματοληψίας.

Οι σχέσεις που δίνουν τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του πληθυσμού και εκφράζουν την ακρίβεια του δείγματος βασίζονται στις δυο αυτές προϋποθέσεις. Εάν δεν εξασφαλίζεται το τυχαίο της επιλογής, οι εκτιμήσεις δεν μπορούν να θεωρούνται αξιόπιστες, γιατί δεν είναι δυνατό να καθορισθούν συγκεκριμένες τιμές ή όρια στην πιθανότητα ότι ένα γεγονός μπορεί να έχει συμβεί τυχαία. Τα προβλήματα αυτά εμφανίζονται στην εφαρμογή της **συστηματικής δειγματοληψίας**, στην οποία τα αποτελέσματα θεωρούνται ότι προέρχονται από χωρικές μονάδες που είχαν επιλεγεί τυχαία.

Εκτός από τους δυο στόχους: πρώτον να είναι το δείγμα ανεπηρέαστο και δεύτερο να προκύπτει από αυτό μια εκτίμηση με το δικό της σφάλμα, υπάρχει μια επιπρόσθετη απαίτηση. Για να είναι ένα δείγμα **αντιπροσωπευτικό**, θα πρέπει να έχει σχεδόν τα ίδια χαρακτηριστικά με ολόκληρο τον πληθυσμό. Αυτό δεν είναι αντιφατικό με την ανάγκη της τυχαίας επιλογής, αλλά συχνά σημαίνει, ειδικά στη χωρική δειγματοληψία, ότι η γνήσια τυχαία δειγματοληψία είναι λιγότερο επιτυχής από κάποια άλλη μορφή δειγματοληψίας, όπως για παράδειγμα, είναι η **τυχαία δειγματοληψία με διαστρωμάτωση**.

5.9.2 Ένα πείραμα δειγματοληψίας μετρήσεων

Οι θεωρητικές αρχές που αναφέρθηκαν παραπάνω εφαρμόζονται σε δειγματοληψία οποιουδήποτε είδους μεταβλητής. Όσες θεωρητικές αρχές εφαρμόζονται σε δείγματα μετρήσεων και επεξεργασίας των σφαλμάτων τους,

αντιπροσωπεύουν ένα υποσύνολο της θεωρίας της στατιστικής δειγματοληψίας, που όμως αποτελούν βασικό στοιχείο αναφοράς της χαρτομετρίας. Για το λόγο αυτό περιγράφεται στην ενότητα αυτήν ένα πείραμα μέσα από το οποίο εξηγείται και η θεωρία της διαχείρισης των σφαλμάτων.

Πίνακας 5.2 Αποτελέσματα 100 ανεξαρτήτων μετρήσεων ευθυγράμμου τμήματος

	165.9	165.7	165.7	165.7	165.7	165.8	165.7
	165.7	165.8	165.5	165.7	165.6	165.5	165.7
	165.6	165.6	165.7	165.6	165.7	165.6	165.6
	165.9	165.7	165.7	165.7	165.7	165.7	165.8
	165.7	165.7	165.5	165.7	165.7	165.6	165.8
$\bar{x}$	165.76	165.70	165.62	165.68	165.68	165.64	165.72
σ	± 0.13	0.07	± 0.11	± 0.05	± 0.05	± 0.11	± 0.08
	165.7	165.7	165.7	165.6	165.6	165.7	165.8
	165.5	165.6	165.7	165.7	165.6	165.6	165.7
	165.6	165.8	165.6	165.7	165.7	165.7	165.7
	165.8	165.8	165.8	165.6	165.7	165.7	165.7
	165.7	165.6	165.9	165.9	165.7	165.7	165.7
$\bar{x}$	165.66	165.70	165.74	165.66	165.68	165.68	165.72
σ	± 0.11	± 0.10	± 0.11	± 0.06	± 0.08	± 0.05	± 0.05
	165.7	165.6	165.5	165.7	165.7	165.7	
	165.8	165.5	165.7	165.6	165.7	165.8	
	165.7	165.8	165.6	165.6	165.6	165.7	
	165.7	165.8	165.7	165.8	165.7	165.7	
	165.6	165.6	165.7	165.6	165.6	165.8	
$\bar{x}$	165.70	165.66	165.66	165.66	165.66	165.74	
σ	± 0.07	± 0.13	± 0.11	± 0.09	± 0.06	± 0.06	

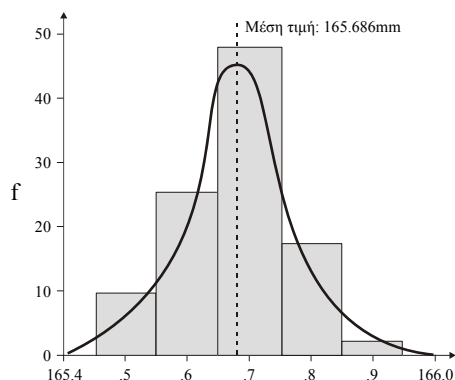
Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB είναι το αντικείμενο μέτρησης απόστασης, το οποίο έχει μήκος περίπου ίσο με το ήμισυ του υποδεκάμετρου που χρησιμοποιείται για τη μέτρησή του. Τα άκρα A και B σημειώνονται με δυο τρύπες με λεπτή βελόνα. Ο παρατηρητής τοποθετεί το υποδεκάμετρο κατά μήκος της γραμμής προσέχοντας να μην τοποθετήσει το μηδέν της κλίμακας σε κανένα άκρο της γραμμής. Ο παρατηρητής διαβάζει τις ενδείξεις του υποδεκάμετρου στα δυο άκρα του ευθυγράμμου τμήματος με τρόπο που η απόσταση να εκφράζεται πάντα από τη διαφορά μεταξύ των δυο ενδείξεων. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές, χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό τμήμα του υποδεκάμετρου κάθε φορά για να γίνει η κάθε μέτρηση. Η σειρά της μέτρησης πρέπει να αλλάζει. Για

παράδειγμα, οι πρώτες μετρήσεις μπορούν να γίνουν με ανάγνωση στο υποδεκάμετρο πρώτα στο σημείο Α και μετά στο σημείο Β. Οι επόμενες μετρήσεις μπορούν να γίνουν με ανάγνωση πρώτα στο Β και μετά στο Α κ.ο.κ. Ένα δείγμα μπορεί να μετρηθεί με τοποθέτηση του υποδεκάμετρου στη μια πλευρά του, το επόμενο με τοποθέτηση του υποδεκάμετρου στην άλλη πλευρά, έτσι ώστε η διεύθυνσή του να αντιστρέφεται περιοδικά. Επίσης μπορούν να συνδυαστούν μετρήσεις από δύο ή και περισσότερους παρατηρητές.

Οι διαφοροποιήσεις στη διαδικασία έχουν σκοπό να εισάγουν ένα μέτρο ανεξαρτησίας στις αναγνώσεις έτσι ώστε να μην έχει κάποια μέτρηση επιρροή σε άλλη. Οι μετρήσεις επαναλαμβάνονται N φορές, όπου: N είναι ένας μεγάλος αριθμός. Στο παράδειγμα που περιγράφεται εδώ, το μήκος της γραμμής είναι 165.7mm και έγιναν 100 μετρήσεις. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων περιέχονται στον Πίνακα 5.2, όπου είναι ομαδοποιημένες σε 20 χωριστά δείγματα των $n=5$ μετρήσεων το καθένα. Η συχνότητα των μετρήσεων, σε τάξη 0.1 mm δίνεται στο Πίνακα 5.3 και απεικονίζεται στο Σχήμα 5.18. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των 100 μετρήσεων είναι:

$$\bar{x} = 165.69\text{mm και}$$

$$\sigma = \pm 0.09\text{mm.}$$



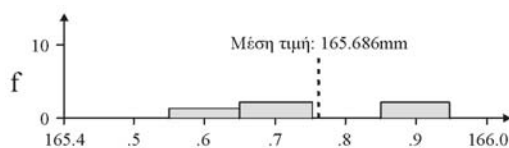
Πίνακας 5.3 Συχνότητες μετρήσεων

Μήκος (mm)	Συχνότητα
165.4	0
165.5	6
165.6	25
165.7	49
165.8	17
165.9	3
166.0	0

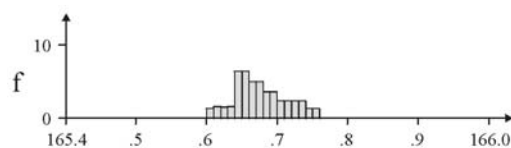
Σχήμα 5.18 Ιστόγραμμα κατανομής συχνοτήτων των 100 μετρήσεων

Το Σχήμα 5.18 παρουσιάζει μια επιτυχή προσέγγιση της κανονικής κατανομής που έχει θεωρηθεί ως η χαρακτηριστική των τυχαίων ή συμπτωματικών σφαλμάτων ανάλογων μετρήσεων. Η ομαλή καμπύλη που φαίνεται στο Σχήμα (5.18) είναι μια κανονική καμπύλη που υπολογίστηκε με τις συγκεκριμένες εκτιμήσεις της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης. Μετά από σύγκριση, το Σχήμα 5.19 απεικονίζει τη συχνότητα των πέντε μετρήσεων που αποτελούν το πρώτο δείγμα. Η μορφή του ιστογράμματος στο Σχήμα 5.19 δεν παρουσιάζει

καμιά ομοιότητα με τη μορφή της κανονικής καμπύλης. Υπολογίζονται τώρα οι μέσες τιμές καθενός από τα 20 υποσύνολα στα οποία έχουν διαιρεθεί οι μετρήσεις. Οι δειγματοληπτικές κατανομές που σχηματίζονται από τις 20 μέσες τιμές εμφανίζονται στο Σχήμα 5.20. Στο Σχήμα αυτό (5.20) παρουσιάζεται μια εικόνα που προσεγγίζει μια συμμετρική κατανομή, παρ' όλο που το σύνολο των 20 μόνων αποτελεσμάτων δεν είναι αρκετά μεγάλο για να δώσει κάτι περισσότερο από μία κατ' αρχήν εικόνα αυτής της ιδιότητας.



Σχήμα 5.19 Ιστόγραμμα κατανομής συχνοτήτων 5 μετρήσεων



Σχήμα 5.20 Ιστόγραμμα κατανομής συχνοτήτων των 20 μέσων τιμών

Οι ίδιες αρχές μπορούν να εφαρμοστούν σε μετρήσεις διαφορετικού είδους γραμμών (για παράδειγμα ακανόνιστων), που έχουν γίνει με άλλους τρόπους.

Οι Πίνακες (5.2 και 5.3) και τα Σχήματα (5.18, 5.19 και 5.20) δείχνουν ότι μπορεί να προκύψουν ορισμένες διαπιστώσεις σε σχέση με τη διαδικασία δειγματοληψίας.

1. Εάν μια σειρά δειγμάτων επιλεγεί τυχαία από έναν πληθυσμό, οι μέσες τιμές αυτών των δειγμάτων είναι κανονικά κατανεμημένες. Αυτό είναι σύμφωνο με το θεώρημα του κεντρικού ορίου, σύμφωνα με το οποίο, όταν ένα δείγμα αυξάνει, η μέση τιμή του δείγματος τείνει να έχει κανονική κατανομή, ακόμα και αν ο συνολικός πληθυσμός δεν είναι κανονικός. Αυτό δεν συμβαίνει στα μικρά δείγματα, των οποίων οι κατανομές ακολουθούν την κατανομή *Student's "t"*.
2. Εάν προσδιοριστεί ο αριθμητικός μέσος ενός δείγματος και από αυτόν προκύψουν τα υπόλοιπα, μπορεί να προσδιοριστεί η **διασπορά** των μετρήσεων μέσα στο δείγμα. Αυτή είναι ισοδύναμη με την τυπική απόκλιση η οποία έχει τάση να υπερεκτιμά την ακρίβεια ενός δείγματος μετρήσεων. Μια άλλη παράμετρος που χαρακτηρίζει τη δειγματοληψία είναι το **τυπικό σφάλμα μιας παρατήρησης** (*s*):

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1} - \frac{(\sum x)^2}{n(n-1)}}$$

όπου: *x* η μεταβλητή και *n* ο αριθμός των μετρήσεων.

3. Για έναν πεπερασμένο πληθυσμό, στον οποίο ο αριθμός των στοιχείων είναι γνωστός, λαμβάνεται υπόψη ο λόγος n/N . Ο λόγος αυτός δεν επηρεάζει τη μέση τιμή, αλλά έχει επίδραση στο τυπικό σφάλμα (s). Εάν ο συνολικός πληθυσμός είναι απεριόριστα μεγάλος, όπως είναι στις φυσικές μετρήσεις, η διόρθωση είναι πολύ μικρή και θεωρείται αμελητέα.
4. Εάν ο πληθυσμός έχει μέσον όρο: μ και μεταβλητότητα: σ^2 και ληφθεί ένας μεγάλος αριθμός τυχαίων δειγμάτων από αυτόν, η μέση τιμή αυτών των δειγμάτων θα έχει κατανομή με μεταβλητότητα: σ^2/n . Η μέση τιμή της κατανομής θα είναι επίσης: μ . Μπορεί να γίνει εκτίμηση της μέσης τιμής του πληθυσμού από το ένα δείγμα των n μετρήσεων και αυτή η εκτίμηση να είναι κοντά στη μέση τιμή του πληθυσμού, όπως φαίνεται από το **τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής**. Το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής (s_M) είναι η τετραγωνική ρίζα της μεταβλητότητας του δείγματος και δίνεται από τη σχέση:

$$s_M = \frac{s}{\sqrt{N}} .$$

Τέλος, επειδή το s_M είναι μια εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού, έχει το δικό της τυπικό σφάλμα (s_S) που μπορεί να προκύψει από τη σχέση:

$$s_S = \frac{s_M}{\sqrt{2n}} .$$

Η σχέση που δίνει το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι πολύ σημαντική γιατί δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η ακρίβεια ενός δείγματος ως προς το μέγεθός του, ή διαφορετικά, τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μεγαλώσει η ακρίβεια με την αύξηση του αριθμού των μετρήσεων. Αυτό το συμπέρασμα είναι σημαντικό στις περιπτώσεις που δεν είναι δυνατόν να αυξηθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων μέσα από τις πειραματικές τεχνικές. Στο παράδειγμα μέτρησης της γραμμής, αν το σύνολο των 100 μετρήσεων θεωρηθεί ως ένα δείγμα, το τυπικό σφάλμα μιας παρατήρησης θα είναι: $s=\pm 0.09\text{mm}$, ώστε το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι: $s_M=\pm(0.09/\sqrt{100})=\pm 0.01$, και επομένως θα έχουμε ως αποτέλεσμα:

$$\bar{x} = 165.70 \pm 0.01\text{mm} .$$

Ενώ αν ληφθεί υπόψη ένα δείγμα πέντε μετρήσεων για το οποίο $\bar{x}=165.70$ και $s=\pm 0.07$, το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι $s_M = \pm(0.07/\sqrt{5})=\pm 0.03\text{mm}$. Κανονικά αυτό είναι το μόνο αποτέλεσμα στη διάθεση του παρατηρητή, το οποίο εκφράζεται ως:

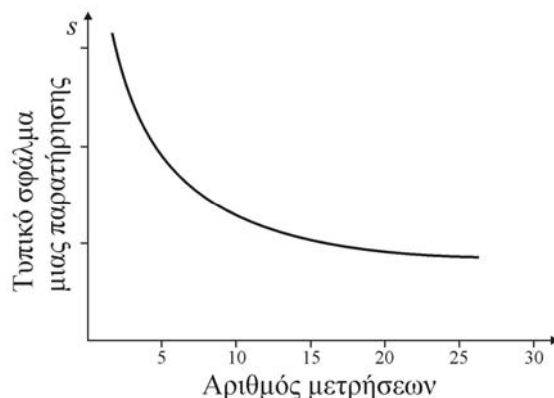
$$\bar{x} = 165.70 \pm 0.03 \text{ mm}.$$

Είναι προφανές ότι υπάρχει συμφωνία μεταξύ των δύο εκτιμήσεων της μέσης τιμής. Παρ' όλο που το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής τριπλασιάζεται, όταν το n μειώνεται από το 100 στο 5, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει τα mm που διαβάσθηκαν με γυμνό μάτι με ένα υποδεκάμετρο υποδιαίρεσης 1mm. Επομένως, τα τυπικά σφάλματα αντιπροσωπεύουν πολύ μικρότερες αποστάσεις από αυτές που μπορεί να αναγνωρισθούν, όταν τοποθετείται ένα υποδεκάμετρο κατά μήκος μιας γραμμής. Άρα στην πράξη, οι διαφορές που αναλύονται θα πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερες από τη διακριτική ανάλυση του υποδεκάμετρου, γιατί δεν πρόκειται να κερδίσει τίποτα ο παρατηρητής, αν κάνει 100 μετρήσεις που να είναι όλες ίδιες. Τα πειραματικά δεδομένα του Πίνακα 5.2 δείχνουν ότι το εύρος των διαφορών προσδιορίζεται από τη διακριτική ανάλυση του υποδεκάμετρου και όχι από τυχαίους παράγοντες. Η μέτρηση του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος με υποδεκάμετρο είναι η πιο ακριβής μέθοδος μέτρησης, επειδή τα σφάλματα περιορίζονται στα σφάλματα ανάγνωσης που προέρχονται από τη διακριτική του ανάλυση.

5.9.3 Το μέγεθος ενός στατιστικού δείγματος

Οι αρχές που αναπτύχθηκαν έως εδώ αναφέρονται σε δείγματα μεγάλου αριθμού μετρήσεων, παρόλο που πολύ συχνά ορισμένα χαρτομετρικά αποτελέσματα προκύπτουν και από μικρά δείγματα. Πιο είναι όμως το όριο χαρακτηρισμού του μεγέθους ενός δείγματος; Συχνά συνίσταται, ως εμπειρικός κανόνας, το μέγεθος ενός δείγματος να συνίσταται από 30 μετρήσεις. Από την πρακτική σκοπιά αυτό το όριο είναι πολύ μεγάλο. Στο Σχήμα 5.21 φαίνεται ο συσχετισμός του τυπικού σφάλματος μιας παρατήρησης ως προς το μέγεθος του δείγματος. Όπως βλέπουμε η αύξηση του μεγέθους του δείγματος συνοδεύεται πάντα από μείωση του τυπικού σφάλματος μιας παρατήρησης για δείγματα μεγαλύτερα από 15. Επίσης από το ίδιο σχήμα προκύπτει ότι όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρότερο από 10 μετρήσεις, το τυπικό σφάλμα αυξάνεται ραγδαία. Επομένως ως συμπέρασμα προκύπτει, ότι ένα δείγμα πρέπει να αποτελείται από περισσότερες από 15 μετρήσεις.

Κάθε δειγματοληψία εμπεριέχει ένα συμβιβασμό μεταξύ της ακρίβειας και της οικονομίας της όλης διαδικασίας. Όσο μικρότερο είναι το δείγμα, τόσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο σφάλματος στην όποια εκτίμηση έχει γίνει. Για να αποφεύγονται οι ακραίες καταστάσεις επιλογής, δηλαδή πολύ μικρά ή πολύ μεγάλα δείγματα, μπορεί να εφαρμοσθεί μια αναλυτική διαδικασία με εκτίμηση ενός επιθυμητού μεγέθους δείγματος. Αυτό γίνεται μέσα από ανακατάταξη της σχέσης που ορίζει το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής.



Σχήμα 5.21 Σχέση μεταξύ τυπικού σφάλματος και μεγέθους δείγματος

Προσδίδοντας ένα τυπικό σφάλμα για μια μέση τιμή, ουσιαστικά προσδιορίζεται το διάστημα στο οποίο μπορεί να διακυμαίνεται η μέση τιμή. Για να ελαττωθεί αυτό το διάστημα είναι αναγκαίο να γίνουν περισσότερες παρατηρήσεις. Για να ελαττωθεί το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής κατά ήμισυ, πρέπει να αυξηθούν οι παρατηρήσεις τέσσερις φορές. Επειδή συνήθως είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί μια μέση τιμή με συγκεκριμένο βαθμό ακρίβειας, ή να ανιχνευθούν διαφορές συγκεκριμένου μεγέθους, ο αριθμός των παρατηρήσεων που είναι αναγκαίος για αυτό πρέπει να είναι γνωστός.

Αυτό επιτυγχάνεται με προσδιορισμό της τυπικής απόκλισης. Η τυπική απόκλιση χρησιμεύει για να υπολογισθούν τα όρια ενός αυθαίρετου αριθμού παρατηρήσεων ως προς την απαιτούμενη ακρίβεια. Εδώ εισάγεται η έννοια του **επιτρεπόμενου σφάλματος** για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής. Για το επιτρεπόμενο σφάλμα (E), ισχύει η σχέση:

$$n = \frac{a^2 s^2}{E^2},$$

όπου: a είναι το ολοκλήρωμα της πιθανότητας και περιέχεται σε ειδικούς πίνακες και: n το μέγεθος του δείγματος.

Συνήθως στην πράξη επιλέγεται η πιθανότητα σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, οπότε το $a=1.96$, ενώ για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% το $a=2.58$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι ζητείται το μέγεθος του δείγματος που χρειάζεται να μετρηθεί ένα μήκος περίπου: 200mm, με ροδάκι ακρίβειας: $\pm 2.2\text{mm}$. Ας θεωρήσουμε επιπλέον ότι απαιτείται ακρίβεια μέτρησης: $\pm 1\text{ mm}$. Επειδή:

$$s_M = \pm \frac{2.2}{\sqrt{n}},$$

είμαστε 95% σίγουροι για ένα δείγμα n παρατηρήσεων η αληθινή μέση τιμή κείται μεταξύ: $1.96 \times 2.2 / \sqrt{n}$ της εκτιμώμενης μέσης τιμής. Επομένως, αν θέσουμε: $1.96 \times 2.2 / \sqrt{n} = 1$, μπορούμε να υπολογίσουμε το n :

$$n = \left(\frac{1.96 \times 2.2}{1.0} \right)^2 = 19 \text{ μετρήσεις.}$$

5.10 Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων

Τα αποτελέσματα συγκεκριμένων διαδικασιών μετρήσεων ή υπολογισμών εμπεριέχουν σφάλματα τα οποία προέρχονται από διάφορες αιτίες που σχετίζονται με τα στάδια εκπόνησης των σχετικών εργασιών. Εάν η εκτίμηση του μεγέθους των αβεβαιοτήτων κάθε ανεξάρτητης διαδικασίας μπορεί γίνει ξεχωριστά είναι αναγκαίο να εκτιμάται η συνολική αβεβαιότητα συναρτήσει αυτών.

Μια γενική έκφραση με τη βοήθεια της οποίας είναι δυνατό να εκτιμηθεί η συνολική αβεβαιότητα είναι ο **νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων**. Ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων προσδιορίζει την αβεβαιότητα (σ_y) μιας εξαρτημένης μεταβλητής (y) που είναι συνάρτηση διαφόρων **ανεξαρτήτων** μεταβλητών ($x_1, x_2, \dots, x_n$) και των εκτιμήσεων αβεβαιότητάς τους. Ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων έχει τη μορφή:

$$\sigma_y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \sigma_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \sigma_{x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \sigma_{x_n} \right)^2}.$$

Η γενική αυτή σχέση μπορεί να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις εκτίμησης των μεγεθών μηκών, εμβαδού και όγκου που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες και αποτελεί τη βάση της μελέτης των σφαλμάτων του υπολογισμού τους.

5.11 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου Α. Μ. *Θεωρία σφαλμάτων και συννορθώσεις Ι*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999, σελ. 218.
- Cromley, R. G. *Digital Cartography*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992, p. 317.

- I.C.A., *Multilingual Dictionary of Technical Terms in Cartography*, International Cartographic Association, Commission II, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, p. 573.
- Maling, D. H. *Measurements from Maps. Principles and Methods of Cartometry*. Pergamon Press, New York, 1989, p. 577.
- Mandelbrot, B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman & Co, New York, 1982, p. 468.
- Νάκος, Β. "Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών δεδομένων βασισμένη στη θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας". Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1990, σελ. 200.
- Perkal, J. "On the Length of Empirical Lines". Michigan Inter-University Community of Mathematical Geographers, Discussion Paper No. **10**, 1966.
- Richardson, L. F. "The Problem of Contiguity: An Appendix of Statistics of Deadly Quarrels". *General Systems Yearbook*, **6**, 1961, pp. 139-187.

Κεφάλαιο 6

6. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

6.1 Εισαγωγή

Συχνά χρησιμοποιούμε μαθηματικά εργαλεία προσπαθώντας να ανακατασκευάσουμε τη συνεχή μορφή των φαινομένων, από τη διακριτή πληροφορία που συλλέγουμε, για να εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά τους. Η ανάγκη προσαρμογής γραμμικών ή τρισδιάστατων χωρικών φαινομένων μέσω καμπύλων γραμμών και επιφανειών προκύπτει κυρίως από τη διαπίστωση ότι ενώ τα χωρικά φαινόμενα είναι συνεχή, οι μετρήσεις της καταγραφής τους είναι πάντα διακριτές. Η μαθηματική αυτή διαδικασία ονομάζεται **παρεμβολή**. Για να εφαρμόσουμε όμως μαθηματικές τεχνικές πρέπει να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τα φαινόμενα, ποσοτικά.

6.2 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να αναπαραστήσουμε χωρικά φαινόμενα όπως είναι: το βάθος ενός γεωλογικού στρώματος, η παραμόρφωση του πετρυγίου ενός αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της φόρτισης, η πυκνότητα του πληθυσμού μιας αστικής περιοχής, το ποσοστό μιας μειονότητας στο συνολικό πληθυσμό κ.ο.κ. Θεωρούμε ότι το μέγεθος του φαινομένου, εκφρασμένο μέσα από έναν αριθμό, εξαρτάται από κάποιες μεταβλητές, τις ανεξάρτητες μεταβλητές, στις οποίες μπορούν να δοθούν αριθμητικές τιμές.

Δεν μπορούν βέβαια, να λαμβάνονται υπόψη όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Κάποιες από αυτές μπορεί να μην είναι γνωστές. Για παράδειγμα, τα υψόμετρα της γήινης επιφάνειας, πάνω από κάποια επιφάνεια αναφοράς εξαρτώνται συνεχώς από το γεωγραφικό μήκος και πλάτος και ίσως από τη θέση του πλανήτη ως προς την τροχιά του και την κατάσταση των παλιρροιών. Για πολλούς σκοπούς όμως, είναι επαρκές να θεωρείται το ύψος ως “συνάρτηση” δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, του γεωγραφικού μήκους και του γεωγραφικού

πλάτους. Για να γίνουν πιο σαφείς οι έννοιες της “μεταβλητής” και της “συνάρτησης”, πρέπει να δοθούν κάποιοι ορισμοί.

Ας ξεκινήσουμε από τους ορισμούς των πραγματικών αριθμών. Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α είναι η μετρική της απόστασης του α από την αφετηρία μετρημένη επάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Επομένως, για δυο πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς: $|\alpha - \beta|$ αναπαριστά την απόσταση μεταξύ των δυο σημείων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Είναι επίσης αναγκαίο να δοθεί ο ακριβής τρόπος συμβολισμού των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών, δηλαδή, του συνόλου των πραγματικών αριθμών που περιλαμβάνονται σε ένα τμήμα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Το σύμβολο: $[a, \beta]$ με τους πραγματικούς αριθμούς: a, β που ικανοποιούν τη σχέση $a < \beta$, δηλώνει το σύνολο όλων των αριθμών, ας πούμε x , για τους οποίους ισχύει $a \leq x$ και $x \leq \beta$. Ένα τέτοιο σύνολο είναι ένα **κλειστό διάστημα**. Αντίθετα, το σύνολο όλων των αριθμών x , για τους οποίους $a < x$ και $x < \beta$, δεν περιέχει τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα άκρα του τμήματος, ονομάζεται **ανοιχτό διάστημα** και συμβολίζεται (a, β) .

Τα σύμβολα $[a, \beta)$ και $(a, \beta]$ δηλώνουν αριστερά-κλειστό και δεξιά-κλειστό διάστημα αντίστοιχα και το καθένα περιέχει ακριβώς ένα άκρο του τμήματος όπως δηλώνει και ο συμβολισμός του.

Για την ένταξη ενός αριθμού σε ένα σύνολο εισάγεται ένα σύμβολο, το οποίο σημαίνει “ανήκει σε” ή “είναι μέλος του”. Έτσι, εάν S είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τότε το $x \in S$ διαβάζεται “το x ανήκει στο σύνολο S ”. Για παράδειγμα, $x \in [1, 2]$ σημαίνει ότι το x είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ του 1 και 2 και πιθανόν το 1 ή το 2. Σε αυτήν την περίπτωση $S = [1, 2]$. Ομοίως, εάν S είναι το σύνολο όλων των γυναικών της Ελλάδας, τότε $x \in S$ σημαίνει ότι το x είναι μια γυναίκα στην Ελλάδα.

Αν S είναι ένα σύνολο και δίνεται ένας νόμος που ορίζει ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό για κάθε $x \in S$, τότε αυτός ο νόμος ονομάζεται **συνάρτηση** εντός του S . Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση δεν είναι ένας αριθμός αλλά καθορίζει αριθμητικές τιμές στα αντικείμενα στο S . Συνηθίζεται να χαρακτηρίζονται οι συναρτήσεις με γράμματα ή ομάδες γραμμάτων π.χ. f , g , $\cos$, $\exp$, ή $\log$. Εάν το $x \in S$, η τιμή που δίδεται στο x με μια συνάρτηση f γράφεται $f(x)$ και ονομάζεται η τιμή της f στο x . Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου θα γίνεται αναφορά σε σύνολα S που είναι διαστήματα ή σύνολα πραγματικών αριθμών ή σύνολα ζεύγους πραγματικών αριθμών. Οι ποσότητες στο S είναι τιμές της **ανεξάρτητης μεταβλητής**, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Εξετάζουμε κατ’ αρχήν συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στις οποίες το διάστημα S μπορεί να είναι ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Κανονικά, οι συναρτήσεις ορίζονται ξεκινώντας από το πώς επηρεάζουν

την ανεξάρτητη μεταβλητή x , π.χ. $f(x) = x+1$, ή $g(x) = \sqrt{x}$. Στην πρώτη συνάρτηση δεν χρειάζεται να οριστεί το πεδίο ορισμού S , εκτός εάν πρέπει να περιοριστεί το x για κάποιους ανεξάρτητους λόγους. Στη δεύτερη συνάρτηση όμως, το S δεν πρέπει να περιλαμβάνει αρνητικούς αριθμούς. Τα παραπάνω παραδείγματα είναι παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων, στις οποίες οι τιμές υπολογίζονται με αλγεβρικές πράξεις. Συνήθως γίνεται αναφορά στην **τάξη** των αλγεβρικών συναρτήσεων. Μπορούμε να ταξινομήσουμε τις συναρτήσεις στη βάση ορισμένων ιδιοτήτων και μετά να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις μιας τάξης για να λύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιηθούν ορισμένες τάξεις συναρτήσεων, χρήσιμες για τις ανάγκες της διαδικασίας της παρεμβολής. Στην προσαρμογή των καμπύλων γραμμών και επιφανειών, οι επιθυμητές ιδιότητες είναι η συνέχεια και η ομαλότητα. Επομένως θα χρησιμοποιηθούν τάξεις συναρτήσεων που στηρίζονται σε αυτές τις ιδιότητες. Μια τάξη συναρτήσεων γενικά έχει ένα κοινό πεδίο ορισμού S και συνήθως χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη συγκεκριμένοι συνδυασμοί παρόμοιων συναρτήσεων.

Κατ' αρχήν εάν f και g είναι συναρτήσεις εντός του ίδιου πεδίου ορισμού S , τότε το **άθροισμα** δύο συναρτήσεων είναι επίσης μια συνάρτηση, που συμβολίζεται με $f+g$ και η τιμή της για κάθε $x \in S$ ορίζεται από τη σχέση:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Ορίζεται επίσης, το **γινόμενο** συναρτήσεων, που συμβολίζεται με fg , στο S και δίνεται από γινόμενο των τιμών των συναρτήσεων:

$$(fg)(x) = f(x) g(x), \text{ για κάθε } x \in S.$$

Τέλος, εάν a είναι ένας πραγματικός αριθμός, ορίζεται μια συνάρτηση που συμβολίζεται με af στο S που ονομάζεται **πολλαπλάσιο** της f , και δίνεται από τη σχέση:

$$(af)(x) = a f(x), \text{ για κάθε } x \in S.$$

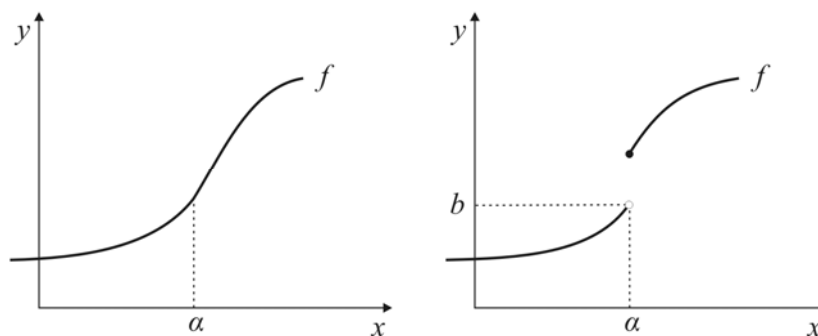
Όταν: $a=2$, το πολλαπλάσιο μιας συνάρτησης f ταυτίζεται με τη συνάρτηση άθροισμα: $f+f$, δηλαδή:

$$f+f = 2f.$$

6.3 Διαγράμματα και συνέχεια

Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής αποδίδεται με ένα διάγραμμα, στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, x και y . Το πεδίο ορισμού S της συνάρτησης αντιστοιχεί σε ένα σύνολο σημείων του άξονα των x . Το σύνολο όλων των σημείων $(x, f(x))$ όταν το x μεταβάλλεται στο S αποτελεί τη γραφική παράσταση της f . Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης συνήθως ομοιάζει με τη μορφή μιας καμπύλης. Για να είναι η γραφική παράσταση μια ομαλή καμπύλη, πρέπει το S να είναι ένα συνεχές διάστημα. Η ανάγκη προσδιορισμού της προσαρμογής μιας καμπύλης γραμμής προκύπτει όταν το S είναι ένα σύνολο διακριτών σημείων. Σχηματίζουμε ένα διάστημα, T , το οποίο περιέχει το S και αναζητούμε μια **αιτιοκρατική** συνάρτηση f ορισμένη στο T , η οποία να πλησιάζει με συγκεκριμένο τρόπο τα δεδομένα, όταν $x \in S$. Μια κατάλληλη αιτιοκρατική συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής ή/και ομαλή και επίσης θα πρέπει να αποδίδει τα χαρακτηριστικά του χωρικού φαινομένου που αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα.

Όταν το πεδίο ορισμού είναι ένα συνεχές διάστημα, η έννοια της **συνεχούς συνάρτησης** έχει τη σημασία της μαθηματικής ακρίβειας. Η συνεχής συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση στο χώρο του S και ας είναι $a \in S$. Τότε η f είναι συνεχής στο a εάν οι τιμές $f(x)$ προσεγγίζουν την τιμή $f(a)$ όταν το x προσεγγίζει το a και από τις δυο πλευρές του a .



Σχήμα 6.1 Συνεχής και ασυνεχής συνάρτηση

Στο Σχήμα 6.1 (αριστερά), η f είναι συνεχής στο a . Στο Σχήμα 6.1 (δεξιά) η f είναι ασυνεχής στο a , όπου η τιμή $f(a)$ αποδίδεται από τη συμπαγή κουκίδα και προσεγγίζεται από τις τιμές $f(x)$ όταν το x προσεγγίζει το a από δεξιά. Πάντως, καθώς το x προσεγγίζει το a από αριστερά, η $f(x)$ προσεγγίζει την τιμή $b \neq f(a)$, γιατί, το b δεν είναι μια τιμή της $f(x)$.

Μια πιο ακριβής περιγραφή της συνέχειας δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός: Ας θεωρήσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση στο χώρο S , όπου S είναι ένα διάστημα. Η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $a \in S$ εάν δοθεί οποιοσδήποτε αριθμός $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρός και υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$, ο οποίος εξαρτάται από τον ε , τέτοιος ώστε όταν το $x \in S$ και ικανοποιείται η σχέση: $|x-a| < \delta$, τότε η $f(x)$ ικανοποιεί τη σχέση: $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Ας σημειωθεί ότι η απόλυτη τιμή $|u-v|$ της διαφοράς των δυο αριθμών u και v είναι η απόστασή τους. Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό, η απόσταση μεταξύ $f(x)$ και $f(a)$ είναι μικρότερη από ε , όποτε το x είναι επαρκώς πλησίον του a (εντός του δ). Αυτός ο ορισμός συχνά δίνεται περιληπτικά με την εισαγωγή του όρου **όριο**, ως εξής:

Ορισμός: Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x εντός ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού S εάν το $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$ υπάρχει και είναι ίσο με $f(x)$.

Εάν το x είναι ένα ακραίο σημείο του διαστήματος S , ο προηγούμενος ορισμός υπονοεί ότι το όριο λαμβάνεται υπόψη μόνον από τη μια πλευρά. Έτσι, εάν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε τα όρια από κάθε πλευρά: $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, υπάρχουν και είναι ίσα με $f(a)$ και $f(b)$, αντίστοιχα.

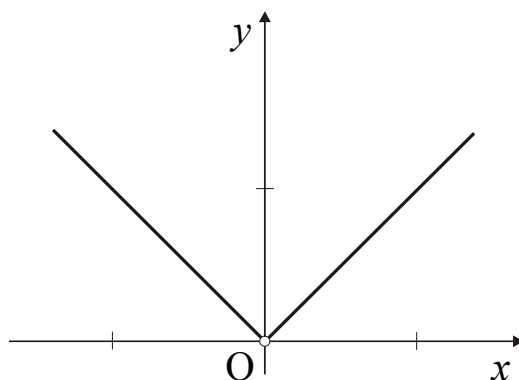
Για πρακτικούς λόγους, πρέπει να σημειωθεί ότι θα εμφανιστούν ασυνέχειες για έναν από τους δυο παρακάτω λόγους:

1. Όταν ο παρονομαστής ενός κλάσματος μηδενίζεται. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ δεν ορίζεται στο σημείο $x = 0$. Έχει μια ασυνέχεια στο σημείο αυτό.
2. Όταν η f ορίζεται διαφορετικά σε τμήματα του S . Για παράδειγμα: $f(x) = 0$ όταν $0 \leq x < 1$ και $f(x) = 1$ όταν $x = 1$. Αυτό έχει ως συνέπεια η f να είναι ασυνεχής στο σημείο $x=1$.

Η τεχνική που παρουσιάζεται στο δεύτερο παράδειγμα θα εφαρμοστεί με ευρύτητα στις διαδικασίες της παρεμβολής που πρόκειται να αναλυθούν σε αυτό το κεφάλαιο. Ένα διάστημα θα υποδιαιρείται σε διαδοχικά υποδιαστήματα και μια συνάρτηση θα δημιουργείται τμηματικά σε κάθε υποδιάστημα. Σε κάθε υποδιάστημα, η συνάρτηση θα ορίζεται από μια σχέση που θα έχει συγκεκριμένους **βαθμούς ελευθερίας** και θα συνορθώνεται, έτσι ώστε η συνολική συνάρτηση να είναι συνεχής στα σημεία σύνδεσης. Εάν f_1 είναι η συνάρτηση στο διάστημα S_1 και f_2 είναι η συνάρτηση στο διάστημα S_2 και εάν a είναι ένα σημείο στο οποίο τα διαστήματα S_1 και S_2 συναντώνται, απαιτείται να ισχύει: $f_1(a) = f_2(a)$, έτσι ώστε να αποφεύγεται η ασυνέχεια στο σημείο αυτό.

6.4 Παράγωγοι και ομαλότητα

Η απαίτηση να είναι μια συνάρτηση συνεχής, δεν είναι ικανή για να την κάνει και ομαλή. Για παράδειγμα, μια σημαντική συνάρτηση η f , που ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών από τη σχέση: $f(x)=|x|$ έχει τη γραφική αναπαράσταση που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.2. Πράγματι, είναι συνεχής για κάθε πραγματικό αριθμό a , αλλά δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως **ομαλή** στο σημείο $a=0$. Η μαθηματική έννοια της ομαλότητας περιλαμβάνει την έννοια της **παραγώγου** μιας συνάρτησης, όπως και της παραγώγου δεύτερης τάξης ή και μεγαλύτερων τάξεων παραγώγων.



Σχήμα 6.2 Η συνάρτηση $f(x)=|x|$

Ας θεωρήσουμε ότι το x είναι ένας αριθμός (σημείο) στο διάστημα S , το πεδίο ορισμού της f . Αν η γραφική παράσταση της f δεν έχει αιχμηρή κορυφή στη συντεταγμένη (θέση) x και η f είναι συνεχής στο x , τότε μπορεί να σχεδιασθεί η ενιαία εφαπτομένη στη θέση αυτή και να υπολογισθεί η κλίση της. Η κλίση εξαρτάται από το x , επομένως είναι συνάρτηση του x και ονομάζεται παράγωγος της f , ή f' . Αφού η παράγωγος f' είναι συνάρτηση, μπορεί με τη σειρά της να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια. Η παράγωγος f' θα είναι συνεχής, μόνον αν έχει παράγωγο (τη δεύτερη παράγωγο της f) σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, η οποία βέβαια θα είναι η κλίση της εφαπτομένης της f' .

Στα μαθηματικά, οι ομαλές καμπύλες ορίζονται από συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ολόκληρο το διάστημα του πεδίου ορισμού τους. Εξετάζοντας μια συνάρτηση ως προς το **ρυθμό μεταβολής** της, η παράγωγος συνάρτηση f' εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της f και η f'' το ρυθμό μεταβολής της f' . Ισχύει επίσης ότι η συνάρτηση είναι **αύξουσα** εκεί που η κλίση της εφαπτομένης είναι **θετική**, **φθίνουσα** εκεί όπου η κλίση της εφαπτομένης είναι **αρνητική** και παραμένει **αμετάβλητη** όταν η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με το **μηδέν**.

Η καμπυλότητα μιας γραμμής είναι μεγάλη σε ένα σημείο, εάν η διεύθυνση της εφαπτομένης της γραμμής πλησιάζοντας στο σημείο αυτό μεταβάλλεται με έντονο ρυθμό, ενώ η καμπυλότητα είναι μικρή σε ένα σημείο, εάν η διεύθυνση της εφαπτομένης της γραμμής πλησιάζοντας στο σημείο αυτό μεταβάλλεται με χαμηλό ρυθμό. Η καμπυλότητα είναι μηδέν εάν η γραφική παράσταση της γραμμής είναι ευθεία γραμμή.

6.5 Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Στη μελέτη της προσαρμογής καμπύλων και επιφανειών, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις κατέχουν μια ιδιαίτερα σημαντική θέση, γιατί είναι εύκολες στους υπολογισμούς. Θεωρώντας γνωστή από τα μαθηματικά τη θεωρία που διέπει τους υπολογισμούς αυτών των συναρτήσεων, αναφέρονται στη συνέχεια του κεφαλαίου ορισμένες ιδιότητες που διευκολύνουν το σχεδιασμό αλλά και την ερμηνεία των γραφικών τους παραστάσεων.

1. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνύμου πρώτου βαθμού είναι ευθεία γραμμή. Οι γραφικές παραστάσεις πολυωνύμων μηδενικού βαθμού είναι ευθείες γραμμές, παράλληλες στον άξονα x .
2. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνύμου δευτέρου βαθμού είναι μια παραβολή η οποία έχει κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Αν το πολυώνυμο είναι θετικό, η παραβολή είναι ανοικτή προς τα πάνω, ενώ αν το πολυώνυμο είναι αρνητικό τότε η παραβολή είναι ανοικτή προς τα κάτω.
3. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνύμου βαθμού N μπορεί να τέμνει τον άξονα x το πολύ N φορές.
4. Ένα πολυώνυμο βαθμού N συμπεριφέρεται σε μεγάλο βαθμό ανάλογα με τον όρο $a_N x^N$ όταν το x λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές (θετικές ή αρνητικές). Επομένως η τιμή των πολυωνύμων γίνεται πολύ μεγάλη, όταν το x έχει πολύ μεγάλη τιμή (θετική ή αρνητική).
5. Ένα πολυώνυμο $p(x)$ τέμνει τον άξονα των x στο $x=c$ μόνον εάν το $p(x)$ έχει μηδενικό συντελεστή περιττής τάξης στο c . Αν το πολυώνυμο $p(x)$ διαθέτει συντελεστή της μορφής $(x-c)$, τότε η γραφική παράσταση του $p(x)$ έχει οριζόντια εφαπτομένη στη θέση $x=c$, μόνον εάν το c είναι μηδενικό πολλαπλάσιο του $p(x)$.

6.6 Προσαρμογή καμπύλων με πολώνυμα

6.6.1 Πολυωνυμική παρεμβολή

Η πλέον πρωτογενής και σημαντική κατηγορία συναρτήσεων για τις ανάγκες της προσαρμογής καμπύλων γραμμών είναι αναμφισβήτητα η κατηγορία των πολυωνυμιακών συναρτήσεων. Συγχρόνως, η πλέον στοιχειώδης προσπάθεια προσαρμογής καμπύλης γίνεται μέσα από τη διαδικασία της παρεμβολής.

Στις διάφορες εφαρμογές, πολύ συχνά αντιμετωπίζουμε σύνολα δεδομένων, παράγωγα κάποιας συνάρτησης, η οποία συμπληρώνει τα κενά μεταξύ των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να διαθέτουμε ένα σύνολο τιμών, για παράδειγμα υψόμετρα σε ορισμένα σημεία, ή κλίσεις στα ίδια ή σε άλλα σημεία και να ζητείται να βρεθεί η «συνάρτηση» που «προσαρμόζεται» σε αυτά τα δεδομένα. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει διατυπωθεί με πληρότητα, πρώτα γιατί η σημασία του όρου «προσαρμόζεται» δεν έχει ορισθεί και δεύτερον γιατί ακόμα και αν γίνει αυτό, τότε η «συνάρτηση» πιθανόν να μην είναι μοναδική. Για να είναι συγκεκριμένη η απάντηση θα πρέπει:

1. να ορισθεί η έννοια της προσαρμογής και
2. να ορισθεί το είδος της συνάρτησης που θα χρησιμοποιηθεί για την προσαρμογή.

Στην περίπτωση της απλούστερης πολυωνυμικής παρεμβολής, τα δεδομένα αποτελούνται από διακριτές τιμές του x και αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης f , που μπορούν να συμβολιστούν με:

$$\{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \{f_0, f_1, \dots, f_N\}.$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η προσαρμογή τελεί υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $f(x)$ που εφαρμόζεται **παρεμβάλλεται**. Δηλαδή, ότι πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

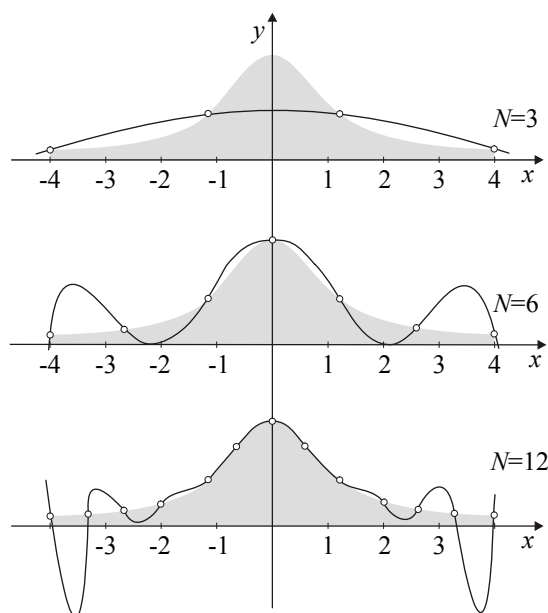
$$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ πρέπει να περνά από τα σημεία (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, N$ στο επίπεδο xy . Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτήν την προϋπόθεση είναι πολώνυμα βαθμού N ή μικρότερου. Ας επικαλεστούμε εδώ το θεώρημα των πολυωνύμων, σύμφωνα με το οποίο:

Θεώρημα: Εάν $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ είναι ένα σύνολο $N+1$ διακριτών αριθμών τότε, για οποιοδήποτε σύνολο αριθμών $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$ υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού N , για παράδειγμα το $p(x_i)$ τέτοιο ώστε: το $p(x_i)=f_i$, $i=0, 1, \dots, N$, του οποίου η γραφική παράσταση περνά από τα $N+1$ διακριτά σημεία (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, N$.

Ας σημειωθεί ότι το πολυώνυμο είναι N βαθμού ή μικρότερου, επομένως, εάν τα $N+1$ δεδομένα σημεία κείνται επάνω σε μία ευθεία γραμμή, το πολυώνυμο θα έχει τη μορφή:

$0x^N + 0x^{N-1} + \dots + 0x^2 + a_1x + a_0$, όπου: οι συντελεστές a_1 και a_0 έχουν κατάλληλες τιμές.



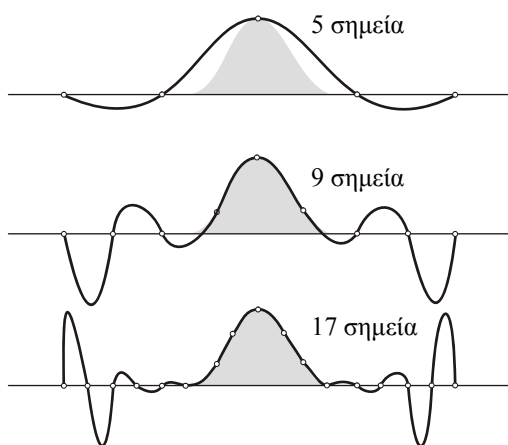
Σχήμα 6.3 Πολυωνυμική παρεμβολή

Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι το γενικό N -οστού βαθμού πολυώνυμο περιέχει $N+1$ σταθερές που πρέπει να βρεθούν και σύμφωνα με το θεώρημα, που διατυπώθηκε, οι $N+1$ συνθήκες παρεμβολής τις προσδιορίζουν μοναδικά.

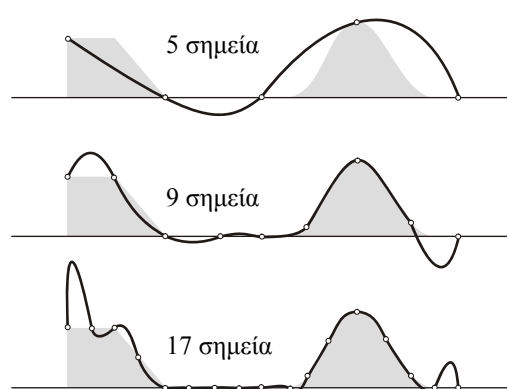
Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γεωμετρικά απλή περίπτωση που διαθέτουμε δυο σημεία. Αν $x_0=0$, $x_1=1$, $f_0=1$, $f_1=3$, επειδή διαθέτουμε δυο διακριτά σημεία ($N+1=2$), τότε το $N=1$, επομένως θα υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού το οποίο παρεμβάλλεται. Αν το πολυώνυμο αυτό είναι το $p(x)=a_1x+a_0$, τότε σύμφωνα με τις συνθήκες παρεμβολής θα ισχύουν οι δυο εξισώσεις: $a_0=1$ και $a_1+a_0=3$, οπότε προκύπτει:

$a_0=1$, $a_1=2$ και $p(x)=2x+1$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τους πολυωνυμικούς τελεστές παρεμβολής ως προσεγγίσεις της συνάρτησης: $1/(1+x^2)$ στο διάστημα $[-4,4]$. Για $N=3, 6, 12, \dots$ επιλέγουμε τις $N+1$ τετμημένες x_i να είναι ισαπέχοντα σημεία επάνω στο διάστημα $[-4,4]$, με $x_0=-4$ και $x_N=4$. Τότε για κάθε x_i προκύπτουν οι τιμές της συνάρτησης $f_i=1/(1+x_i^2)$. Οι τελεστές παρεμβολής του πολυωνύμου που προκύπτουν, βαθμού 3, 6, και 12 απεικονίζονται στο Σχήμα 6.3. Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε ότι όταν το N αυξάνει, η προσέγγιση πλησιάζει στο κέντρο του διαστήματος και αποκλίνει στα άκρα του.



Σχήμα 6.4 Πολυωνυμική παρεμβολή «μιμούμενη» υψώματα και κοιλάδες



Σχήμα 6.5 Πολυωνυμική παρεμβολή «μιμούμενη» συνεχή υψώματα

Ας δούμε τώρα, μέσα από παραδείγματα, τη σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων προσαρμογής καμπύλων. Τα δεδομένα των παραδειγμάτων προσαρμογής καμπύλων γραμμών αποτελούν δείγματα που προέρχονται από μαθηματικά εκφρασμένες συναρτήσεις, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ότι «μιμούνται» υψώματα και κοιλάδες ή συνεχή υψώματα. Στο Σχήμα 6.4, απεικονίζονται οι τελεστές παρεμβολής πολυωνύμων βαθμού: 4, 8, και 16 όταν οι τετμημένες είναι ισαπέχουσες «μιμούμενοι» υψώματα και κοιλάδες. Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί όταν οι τετμημένες δεν ισαπέχουν αλλά βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις. Η άνιση κατανομή των τετμημένων (σε τυχαίες θέσεις) αποτελεί την αντιπροσωπευτική περίπτωση πολλών πρακτικών εφαρμογών. Στο Σχήμα 6.5 για τις ίδιες τετμημένες (ισαπέχουσες) απεικονίζονται οι τελεστές «μιμούμενοι» συνεχή υψώματα.

6.6.2 Υπολογισμός πολωνωνμικών τελεστών παρεμβολής

Ο πιο τυπικός τρόπος προσδιορισμού της τιμής των τελεστών παρεμβολής ενός πολωνύμου $p(x)$ για μια αυθαίρετη τιμή x , είναι να βρεθούν οι συντελεστές του $a_0, a_1, \dots, a_N$. Για να προσδιοριστούν οι συντελεστές του $p(x)$ έχουμε $N+1$ συνθήκες: $p(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, N$, οι οποίες εκφράζονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_N x_0^N &= f_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_N x_1^N &= f_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \dots + a_N x_N^N &= f_N. \end{aligned}$$

Για λόγους ευκολίας το παραπάνω σύστημα των $N+1$ εξισώσεων με τους $N+1$ αγνώστους, $a_0, a_1, \dots, a_N$ μπορεί να γραφούν με μορφή πινάκων:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{pmatrix},$$

(οι δυο τελευταίες είναι γνωστές ως στήλες διανυσμάτων) και το σύνολο των εξισώσεων μπορεί να γραφεί με συντομία ως: $\mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{f}$, όπου τα $\mathbf{V}$ και $\mathbf{f}$, είναι γνωστά και τα $\mathbf{a}$ οι άγνωστοι. Η διαδικασία υπολογισμού είναι γνωστή. Το γεγονός ότι οι τετμημένες είναι διακριτές σημαίνει ότι ο αντίστροφος πίνακας: $\mathbf{V}^{-1}$ υπάρχει και υπάρχει μια μοναδική λύση των εξισώσεων, που μπορεί να γραφεί ως: $\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{f}$. Ας σημειωθεί ότι όταν οι τετμημένες είναι πολύ κοντά, τότε οι τελεστές παρεμβολής, ακόμα και αν υπολογιστούν με ακρίβεια, θα είναι πολύ ευαίσθητοι σε σφάλματα ως προς αντίστοιχες τιμές των f_i .

Επομένως, αν και θεωρητικά είναι σημαντική, η τυπική διαδικασία εκτίμησης του p δεν είναι κατάλληλη για μεγάλης κλίμακας υπολογισμούς. Η μέθοδος παρεμβολής του Langrange έχει και θεωρητικό ενδιαφέρον, αλλά είναι και υπολογιστικά επιτυχής. Βέβαια, με αυστηρά κριτήρια και αυτή η μέθοδος δεν είναι η καλύτερη και η λύση δίνεται μέσα από κατάλληλους αλγόριθμους.

6.6.3 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η έννοια της προσαρμογής μιας καμπύλης, στην οποία στηρίζονται τα όσα αναφέρθηκαν έως εδώ, βασίζονταν στη διαδικασία της παρεμβολής. Ακολούθως, θα εξεταστεί μια διαφορετική αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος, που έχει επίσης επιτυχία στην προσαρμογή καμπύλων γραμμών. Τα δεδομένα αποτελούνται από $N+1$ διακριτές τετμημένες: $x_0, x_1, \dots, x_N$, στις οποίες αντιστοιχούν οι τεταγμένες: $f_0, f_1, \dots, f_N$. Οι συναρτήσεις που δεχόμαστε για να εφαρμόσουμε την προσαρμογή είναι οι: P_m , όπου: $m \leq N$. Θεωρούμε μια τυπική συνάρτηση $p \in P_m$ και ονομάζουμε **απόκλιση** της p από τα δεδομένα στα x_i τη διαφορά: $p(x_i) - f_i$. Εάν μια συνάρτηση παρεμβαλλόταν στα δεδομένα, τότε η απόκλιση σε κάθε θέση των δεδομένων θα ήταν μηδέν. Για να χρησιμοποιήσουμε μια απλή συνάρτηση p , ας γίνει η παραδοχή της ύπαρξης μη μηδενικών αποκλίσεων, για παράδειγμα ας γίνει η παραδοχή ότι το m θα είναι πολύ μικρότερο του N . Αυτή η εισαγωγή είναι εμπειρική και θα επανέλθουμε στη φιλοσοφία της αργότερα.

Για κάθε $p \in P_m$ θεωρούμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων:

$$E(p) = \sum_{i=0}^N (p(x_i) - f_i)^2.$$

Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων $E(p)$ ομοιάζει ως συμβολισμός με την αναπαράσταση των τιμών μιας συνάρτησης, αλλά όπως χρησιμοποιείται εδώ συμβολίζει την ίδια τη συνάρτηση, και όχι ένα σημείο κάποιου πεδίου ορισμού του διαστήματος S .

Η ιδέα της προσαρμογής τώρα μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Ζητείται να βρεθεί ένα πολυώνυμο $p \in P_m$, για το οποίο η συνάρτηση E ελαχιστοποιείται. Το πολυώνυμο p θα ορίζεται από $m+1$ συντελεστές: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$. Η συνάρτηση E μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση των $m+1$ συντελεστών του πολυωνύμου p . Για να διαμορφωθούν οι συνθήκες ελαχιστοποίησης της συνάρτησης E χρειάζεται να εφαρμοστεί λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Η μέθοδος προσαρμογής ονομάζεται μέθοδος των **ελαχίστων τετραγώνων**.

Οι απαραίτητες συνθήκες αναφέρονται στις μερικές παραγώγους $\partial E / \partial a_i$ για $i=0, 1, \dots, m$. Επειδή η συνάρτηση E θεωρείται συνάρτηση των $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$, από τις παράγωγες συνθήκες θα προκύψουν $m+1$ εξισώσεις για τους $m+1$ συντελεστές. Ας επιχειρήσουμε να διαμορφώσουμε τις εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψη ότι $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, για $j=0, 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial E}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^N 2(p(x_i) - f_i) \frac{\partial p(x_i)}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^N x_i^j (p(x_i) - f_i) \\
&= 2 \left(\sum_{i=0}^N x_i^j (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m) - \sum_{i=0}^N x_i^j f_i \right) \\
&= 2 \left(\left(\sum_{i=0}^N x_i^j \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^N x_i^{j+1} \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^N x_i^{j+2} \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^N x_i^{j+m} \right) a_m - \sum_{i=0}^N x_i^j f_i \right).
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμικές ως προς τα: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ και οι συντελεστές προσδιορίζονται με τη βοήθεια των δεδομένων. Θεωρώντας ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a , ισχύει: $a^0=1$, οι εξισώσεις λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=0}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^m &= \sum_{i=0}^N f_i, \\
a_0 \sum_{i=0}^N x_i + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^N x_i f_i, \\
a_0 \sum_{i=0}^N x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+2} &= \sum_{i=0}^N x_i^2 f_i, \\
&\dots \\
a_0 \sum_{i=0}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^N x_i^m f_i.
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως **κανονικές εξισώσεις**. Το αλγεβρικό αυτό σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει πάντα μοναδική λύση, η οποία και ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $E(p)$.

Θεώρημα: Εάν $x_0, x_1, \dots, x_N$ είναι ένα σύνολο $N+1$ διακριτών σημείων και $m \leq N$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $p(x) \in P_m$ για το οποίο η συνάρτηση $E(p)$ ελαχιστοποιείται και οι συντελεστές αυτού του πολυωνύμου δίδονται από τη λύση των κανονικών εξισώσεων.

Όταν $m=N$, ο αριθμός των συντελεστών είναι ίσος με τον αριθμό των δεδομένων σημείων και η ελάχιστη τιμή του $E(p)$ είναι ίση με το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το πολυώνυμο της ελαχιστοποίησης ταυτίζεται με τον πολυωνυμικό τελεστή παρεμβολής που προέρχεται από το P_N για το οποίο κάθε απόκλιση, στο άθροισμα των εξισώσεων $E(p)$, είναι ίση με μηδέν.

6.6.4 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων

Ας θεωρήσουμε την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής ($m=1$) στα δεδομένα του Πίνακα 6.1, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε $N=6$, $\sum x_i=42$, $\sum f_i=59.66$, $\sum x_i^2=364$ και $\sum x_i f_i=448.42$. Οι κανονικές εξισώσεις θα είναι:

$$\begin{aligned} 6a_0 + 42a_1 &= 59.66 \text{ και} \\ 42a_0 + 364a_1 &= 448.42, \end{aligned}$$

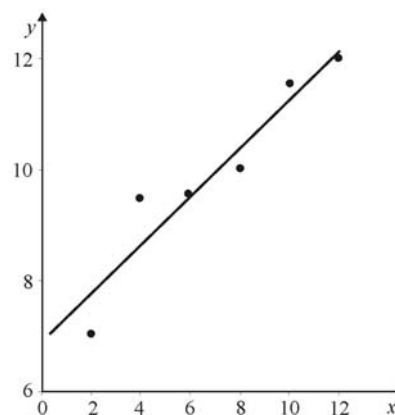
που δίνουν:

$$a_0 = 6.683 \text{ και } a_1 = 0.4400.$$

Η ευθεία γραμμή που ικανοποιεί τη συνθήκη των ελαχίστων τετραγώνων εκφράζεται από τη σχέση:

$$p(x) = 0.4400x + 6.683.$$

Πίνακας 6.1 Δεδομένα παραδείγματος		
i	x_i	f_i
0	2	6.91
1	4	9.62
2	6	9.74
3	8	10.01
4	10	11.48
5	12	11.90



Σχήμα 6.6 Προσαρμογή ευθείας με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Στο Σχήμα 6.6 απεικονίζεται η ευθεία που προσδιορίστηκε με τη συνθήκη των ελαχίστων τετραγώνων και τα δεδομένα.

6.7 Εξομάλυνση ή προσδιορισμός επιφάνειας τάσης;

Υπάρχει μια διαφορά στις έννοιες της εξομάλυνσης και του προσδιορισμού της επιφάνειας τάσης, που είναι και οι πλέον δόκιμοι και ευρέως χρησιμοποιούμενοι όροι.

Η έννοια της εξομάλυνσης στηρίζεται σε υφιστάμενες σχέσεις μεταξύ τετμημένων και τεταγμένων, που οφείλονται σε συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες δεν είναι εμφανείς από τα δεδομένα, λόγω της ύπαρξης σφαλμάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχουν στοιχεία για ένα χωρικό φαινόμενο που να αποδεικνύουν την ύπαρξη μιας πολύ μικρής κλίσης κατά τη διεύθυνση του άξονα x , ενώ η παρεμβολή στα υφιστάμενα δεδομένα να αποδίδει μια ακανόνιστη κλίση και επομένως να μην είναι αποδεκτή για την απόδοση του συγκεκριμένου χωρικού φαινομένου. Για να απεικονισθεί ορθά η κλίση, πιθανά να απαιτείται να γίνει εξομάλυνση των δεδομένων. Η διαδικασία της εξομάλυνσης μπορεί να βασίζεται σε μια εμπειρική διαδικασία ή να προτιμηθεί η εφαρμογή συγκεκριμένου θεωρητικού μαθηματικού μοντέλου (όπως είναι η μαθηματική διαδικασία της ολοκλήρωσης). Το θεωρητικό μαθηματικό υπόβαθρο συνήθως βασίζεται σε συγκεκριμένη υπόθεση που ικανοποιείται από τη προσομοίωση του φαινομένου και συγχρόνως παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της. Σε πολλές από τις εφαρμογές για λόγους απλοποίησης γίνεται η υπόθεση ότι οι συντεταγμένες: $x_0, x_1, \dots, x_N$, ισαπέχουν.

Η έννοια του προσδιορισμού της επιφάνειας τάσης ενός χωρικού φαινομένου διαφοροποιείται από την εξομάλυνση, παρόλο που η ακολουθούμενη διαδικασία της αριθμητικής εφαρμογής της συνήθως καταλήγει στην επίλυση ενός συστήματος κανονικών εξισώσεων. Στην περίπτωση του προσδιορισμού της επιφάνειας τάσης, τα δεδομένα δεν αντιμετωπίζονται με τρόπο που να υποθέτει ότι εμπεριέχουν σφάλματα, αλλά οι συντεταγμένες εκφράζονται από το άθροισμα δυο συνιστωσών. Η πρώτη συνιστώσα, η οποία μεταβάλλεται λιγότερο με την ανεξάρτητη μεταβλητή, περιγράφεται ως τάση του χωρικού φαινομένου και η δεύτερη ως το υπόλοιπο ή η απόκλιση από την τάση.

Η θεώρηση των συντεταγμένων ως άθροισμα δυο συνιστωσών, διευκολύνει τη διαδικασία προσομοίωσης του χωρικού φαινομένου, γιατί κάθε συνιστώσα μπορεί να είναι το αποτέλεσμα ανεξάρτητης φυσικής διαδικασίας ή κλίμακας. Επιπλέον, η θεώρηση αυτή διευκολύνει τη διαδικασία αριθμητικής εφαρμογής της μεθόδου. Για παράδειγμα, ο εντοπισμός και η απαλοιφή μιας τάσης μπορεί να υλοποιηθούν ταυτόχρονα στην υπολογιστική διαδικασία, χρησιμοποιώντας ως υπόλοιπο μια συγκεκριμένη ιδιότητα του χωρικού φαινομένου. Τέλος, αναφερόμενοι στη διαδικασία ανάλυσης των συχνοτήτων, η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για την απαλοιφή των ανεπιθύμητων συνιστωσών (συνήθως χαμηλής συχνότητας).

6.7 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου Α. Μ. *Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις Ι. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1999, σελ. 218.*
- Lancaster, P. and K. Salkauskas. *Curve and Surface Fitting. An Introduction.* Academic Press, London, 1986, p. 280.
- Mikhail, F.M. and F. Ackermann. *Observations and Least Squares.* T.Y. Crowell, New York, 1976, p. 497.

Κεφάλαιο 8

8. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΚΙΑΣΗΣ ΑΝΑΓΛΥΦΟΥ

8.1 Εισαγωγή

Η απεικόνιση του ανάγλυφου μιας γεωγραφικής περιοχής αποτελεί ένα από τα βασικότερα προβλήματα της χαρτογραφικής σύνθεσης. Τα κύρια χαρακτηριστικά του ανάγλυφου, δηλαδή ο τρισδιάστατος χαρακτήρας των δεδομένων που το αποδίδουν και ο χαρακτήρας της συνέχειάς του στο γεωγραφικό χώρο, καθιστούν την απεικόνισή του μια από τις δυσκολότερες χαρτογραφικές διαδικασίες. Λόγω του γεγονότος ότι η απεικόνιση του ανάγλυφου καλύπτει κατ' ανάγκην ολόκληρη την έκταση της χαρτογραφούμενης περιοχής διαπιστώνεται ότι λειτουργεί ουσιαστικά ως υπόβαθρο του χάρτη. Δηλαδή, η απεικόνιση του ανάγλυφου αλληλεπιδρά με τα σύμβολα των υπολοίπων πληροφοριών του χάρτη και θα πρέπει πάντα να εξασφαλίζεται μια ποιοτική και εύληπτη γραφική σύνθεση.

Οι δύο συνηθέστερες μέθοδοι αναπαράστασης του ανάγλυφου στους χάρτες είναι οι **ισοϋψείς καμπύλες** και η **χρωματική απόδοση διακριτών υψομετρικών ζωνών**. Με την πρώτη αποδίδεται με ακρίβεια η μορφολογία του ανάγλυφου και εξασφαλίζεται η συνέχεια του χαρακτήρα του. Ενώ με τη δεύτερη επιδιώκεται μια περισσότερο φιλική προσέγγιση του χρήστη με το χάρτη, αφού στη χρωματική κλίμακα χρησιμοποιούνται αποχρώσεις του εδάφους ή του πυθμένα των θαλασσών ανάλογα με το υψόμετρο ή το βάθος αντίστοιχα. Βέβαια, η χρήση και καθιέρωση και των δύο αυτών μεθόδων έγινε δυνατή με τη βελτίωση των τεχνικών αποτύπωσης του χώρου και των δυνατοτήτων των μέσων απόδοσης.

Η απεικόνιση της **σκίασης του ανάγλυφου** (hill shading) είναι μια πολύ παλιά μέθοδος απόδοσης του ανάγλυφου που στην πρωταρχική της μορφή εφαρμόστηκε δια μέσου της γραφικής τεχνικής της γραμμοσκίασης. Βασίζεται στην προσπάθεια προσομοίωσης του φυσικού οπτικού αποτελέσματος, της επίδρασης ενός ιδεατού φωτισμού στην επιφάνεια του εδάφους της απεικονιζόμενης περιοχής. Με τη χρήση της μεθόδου αυτής επιδιώκεται η άμεση και εύληπτη αντίληψη των μορφολογικών σχηματισμών του ανάγλυφου, ακόμα

και από μη ειδικευμένους με το αντικείμενο χρήστες χαρτών. Είναι ιδιαίτερα πλεονεκτική και αποτελεσματική όταν απαιτείται μια γρήγορη και εποπτική κατανόηση της τοπογραφίας της περιοχής, ενώ παρέχει μεγαλύτερες δυνατότητες στην επάλληλη απεικόνιση και άλλων πληροφοριών, ακόμα και σε θεματικούς χάρτες που καλύπτονται καθολικά με επιφανειακούς συμβολισμούς. Ένας λόγος που φέρνει τη μέθοδο αυτή ξανά στο προσκήνιο είναι οι ευκολίες που παρέχουν οι σύγχρονες ψηφιακές τεχνολογίες, με κυριότερη τη δυνατότητα του αντικειμενικού αναλυτικού υπολογισμού της εικόνας της σκίασης του ανάγλυφου μιας περιοχής.

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται αρχικά οι θεωρητικές αρχές του προσδιορισμού της σκίασης του ανάγλυφου, ξεκινώντας από τις σχέσεις της τρισδιάστατης γεωμετρίας και της οπτικής που περιγράφουν το πραγματικό-φυσικό φαινόμενο και περιγράφουν τις απαραίτητες απλουστεύσεις για την αναπαράστασή της σκιάς σε ψηφιακούς χάρτες. Στη συνέχεια, περιγράφονται ορισμένοι από τους αντιπροσωπευτικότερους αλγόριθμους αναλυτικού προσδιορισμού της σκιάς του ανάγλυφου καθώς επίσης και αυτοί που περιλαμβάνονται σε ολοκληρωμένα χαρτογραφικά πακέτα λογισμικού. Εξετάζονται οι παράμετροι των αλγορίθμων (κλίση και γωνία διεύθυνσης φωτεινής πηγής) και η επίδρασή τους στο αποτέλεσμα της εικόνας της σκίασης. Για διευκόλυνση της κατανόησης των αλγορίθμων παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής τους στην ίδια περιοχή. Επιπλέον, παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής των αλγορίθμων εξετάζοντας τη συνδυασμένη απεικόνιση της σκιάς του ανάγλυφου μαζί με την απόδοση άλλων πληροφοριών σε αντιπροσωπευτικές χαρτοσυνθέσεις.

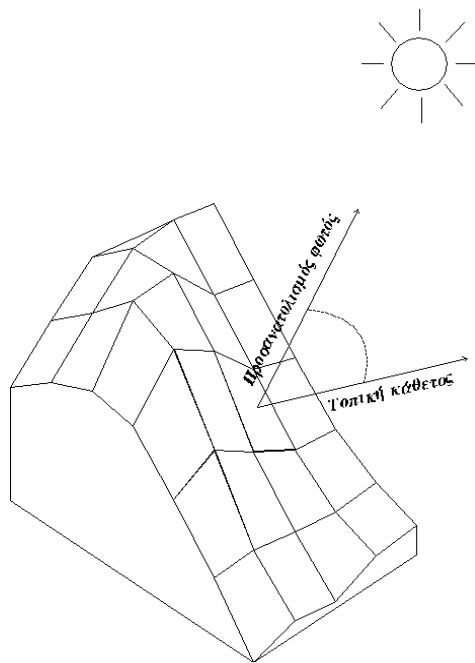
8.2 Βασικές αρχές απόδοσης της σκίασης του ανάγλυφου

Οι σκιές που απεικονίζονται στο χάρτη λόγω του ανάγλυφου μιας περιοχής αποτελούν τονικές παραλλαγές που οφείλονται στην επίδραση ενός ιδεατού φωτός (Σχήμα 8.1). Το φως που υποθετικά αντανάκλαται επάνω στην επιφάνεια του ανάγλυφου μεταβάλλεται κατά ένα ποσοστό που ποικίλει, από μηδενική αντανάκλαση ως 100% (καθολική), ανάλογα με τον προσανατολισμό της επιφάνειας του εδάφους, τη διεύθυνση του ιδεατού φωτός, αλλά και το μοντέλο φωτισμού που έχει υιοθετηθεί. Το τελικά καταγραφόμενο ποσοστό φωτεινότητας περιγράφεται από το μέγεθος της **φαινόμενης λαμπρότητας** ή **ανακλαστικότητας**: R .

Πιο αναλυτικά λοιπόν, οι τρεις βασικές παράμετροι που καθορίζουν τη συμπεριφορά ενός αλγορίθμου-μοντέλου σκίασης είναι οι παρακάτω:

- Ο τοπικός προσανατολισμός της επιφάνειας.

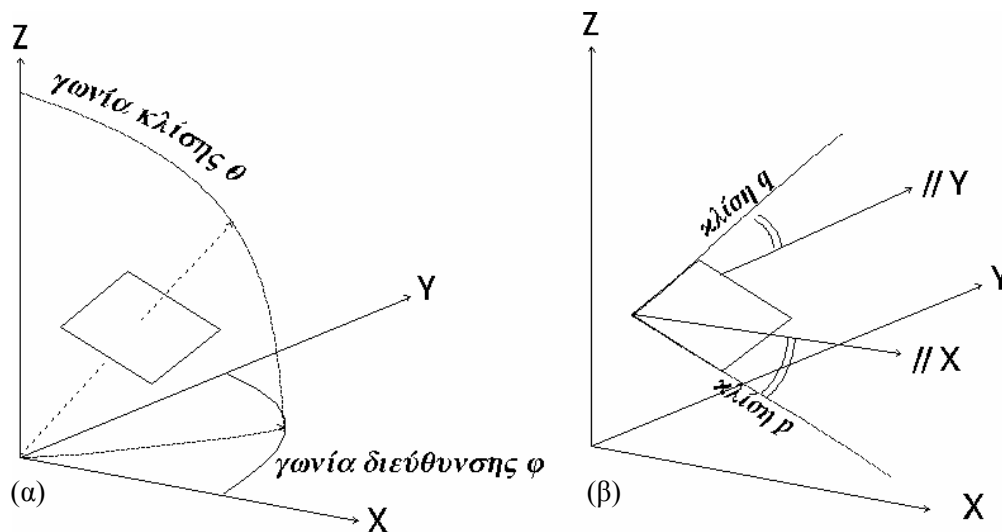
- Ο προσανατολισμός της φωτεινής πηγής.
- Το μοντέλο φωτισμού.



Σχήμα 8.1 Αρχή δημιουργίας των σκιών λόγω ανάγλυφου

Ο τοπικός προσανατολισμός υλοποιείται με το διάνυσμα της τοπικής καθέτου και μπορεί να εκφραστεί με δύο τρόπους. Με τον πρώτο τρόπο ο τοπικός προσανατολισμός εκφράζεται δια μέσου των γωνιών του διανύσματος προσανατολισμού της καθέτου, που είναι η γωνία αζιμουθίου: φ με αφετηρία το θετικό άξονα X και αριστερόστροφη φορά, και τη ζενίθια γωνία: θ (Σχήμα 8.2α). Με το δεύτερο τρόπο εκφράζεται δια μέσου των μερικών κλίσεων της επιφάνειας: p κατά το άξονα X με φορά από δύση προς ανατολή και: q κατά τον άξονα Y με φορά από νότο προς βορρά (Σχήμα 8.2β). Είναι επίσης εύκολο να βρεθούν οι τιμές των μεγεθών του ενός ζεύγους από τις τιμές του άλλου. Στην τυποποίηση προτιμάται πάντως η χρήση των μερικών κλίσεων για διευκόλυνση των υπολογισμών (αποφεύγονται υπολογισμοί με τριγωνομετρικές συναρτήσεις που είναι χρονοβόροι).

Ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής πηγής εκφράζεται από τα ανάλογα ζεύγη παραμέτρων ως προς τους δύο τρόπους προσανατολισμού που προαναφέρθηκαν (φ_0, θ_0 ή p_0, q_0). Με μόνη τη διαφορά ότι στην περίπτωση αυτή πρόκειται για το διάνυσμα θέσης της φωτεινής πηγής με τη βοήθεια του οποίου εκφράζεται ο προσανατολισμός της δέσμης των φωτεινών ακτινών.



Σχήμα 8.2 Τρόποι προσδιορισμού τοπικού προσανατολισμού μιας επιφάνειας

Το μοντέλο φωτισμού είναι ένα σύνολο φυσικών ιδιοτήτων που αναφέρονται στο ίδιο το φως και στις φωτιζόμενες επιφάνειες, αλλά και οπτικών φαινομένων που μεσολαβούν μεταξύ της αρχικά εκπεμπόμενης και της τελικά καταγραφόμενης ποσότητας φωτός κάθε στοιχειώδους επιφάνειας του εδάφους. Σε κάθε αλγόριθμο-μέθοδο σκίασης η υλοποίηση των παραπάνω παραγόντων γίνεται με τη βοήθεια αναλυτικών σχέσεων, οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα απλοποίησης του φυσικού προβλήματος.

Από την πραγματική εικόνα της σκιάς του ανάγλυφου μιας γεωγραφικής περιοχής μέχρι τη χαρτογραφική της αναπαράσταση, μεσολαβούν διάφορες απλουστευτικές συμβάσεις. Μια πρώτη βασική τέτοια σύμβαση αφορά την ίδια τη φυσική γεωμετρία του προβλήματος. Η πρακτικά άπειρη απόσταση στην οποία βρίσκεται η φωτεινή πηγή (ο ήλιος), επιτρέπει την παραδοχή ενός σταθερού προσανατολισμού των φωτεινών ακτίνων, ή αλλιώς μια σταθερή γωνία πρόσπτωσης του φωτισμού πάνω στην επιφάνεια του ανάγλυφου. Για λόγους όμως εύληπτης ερμηνείας της τελικής τεχνητά παραγόμενης εικόνας, αγνοείται και ένα άλλο κλασικό γνώρισμα του φαινομένου της φυσικής σκιάς: οι σκιές-είδωλα που παράγονται από τα υψηλότερα τμήματα της περιοχής στα χαμηλότερα, τα οποία δεν έχουν ορατότητα προς το φως. Οι σκιές¹ αυτές παραλείπονται με σκοπό να μην καλύψουν την απεικόνιση της μορφολογίας του

¹ Είναι διαφορετική η φυσική έννοια της σκιάς ως φαινομένου της οπτικής και της σκιάς λόγω ανάγλυφου που απεικονίζεται στους χάρτες με σκοπό να γίνει περισσότερο εύληπτη και αποτελεσματική η απόδοσή του. Γι' αυτόν το λόγο στο κεφάλαιο αυτό η διάκριση μεταξύ των δύο εννοιών γίνεται χρησιμοποιώντας τον όρο «σκιά» για τη φυσική σκιά και «σκίαση» για την υλοποίηση του φυσικού αυτού φαινομένου στους χάρτες.

ανάγλυφου σε αυτές τις περιοχές με έντονους τόνους του γκρι. Σκοπός άλλωστε της χαρτογραφικής αναπαράστασης του τοπογραφικού ανάγλυφου δεν είναι μόνον η ακριβής προσομοίωση της πραγματικότητας με τη μορφή μιας εικόνας, αλλά κυρίως η απεικόνισή του με τρόπο που να εξασφαλίζεται η εύληπτη κατανόησή του.

Η διαδικασία παραγωγής της εικόνας της σκίασης του ανάγλυφου μιας περιοχής, στο πλαίσιο ενός σύγχρονου ψηφιακού περιβάλλοντος, εστιάζεται σε δύο βασικά στοιχεία:

- στην ύπαρξη σε ψηφιακή μορφή του υψομετρικού υποβάθρου της περιοχής και
- σε ένα εργαλείο αναλυτικού υπολογισμού των τιμών των τόνων της σκίασης (αλγόριθμος-μοντέλο).

Ο πιο εύχρηστος και πλέον συνηθισμένος τρόπος οργάνωσης του υψομετρικού υποβάθρου μιας περιοχής, σε ψηφιακό περιβάλλον, υλοποιείται με τη δημιουργία ενός ψηφιακού μοντέλου υψομέτρων (ΨΜΥ). Ένα ΨΜΥ αποτελεί έναν πίνακα τιμών υψομέτρων που αναφέρεται σε σημεία κανονικά διατεταγμένα στο χώρο, συνήθως στις κορυφές ενός καννάβου. Οι τιμές των υψομέτρων στις κορυφές του καννάβου προσδιορίζονται με τη διαδικασία της δισδιάστατης παρεμβολής από δεδομένα που έχουν τυχαία χωρική διάταξη.

Σε κάθε αλγόριθμο προσδιορισμού της σκίασης είναι ενσωματωμένοι οι παράμετροι που καθορίζουν την ιδεατή φωτεινή πηγή και το μοντέλο φωτισμού. Οι τόνοι της σκίασης υπολογίζονται για κάθε στοιχειώδη επιφάνεια με τη βοήθεια του ΨΜΥ, των παραμέτρων της ιδεατής φωτεινής πηγής και του μοντέλου φωτισμού. Το ΨΜΥ χρησιμεύει για τον απαραίτητο προσδιορισμό των παραμέτρων του τοπικού προσανατολισμού (p, q ή φ, θ) κάθε στοιχειώδους επιφάνειας συσχετίζοντας κάθε σημείο με τα γειτονικά του. Ο πίνακας τιμών της σκίασης του ανάγλυφου, δηλαδή των ποσοστών αντανάκλασης του φωτός, συνήθως αποθηκεύεται σε κάποιο συμβατό τύπο αρχείου ψηφιακής εικόνας κλίμακας τόνων του γκρι (για παράδειγμα σε ένα αρχείο τύπου TIFF 256 τόνων).

8.3 Αλγόριθμοι αναλυτικού προσδιορισμού της σκίασης του ανάγλυφου

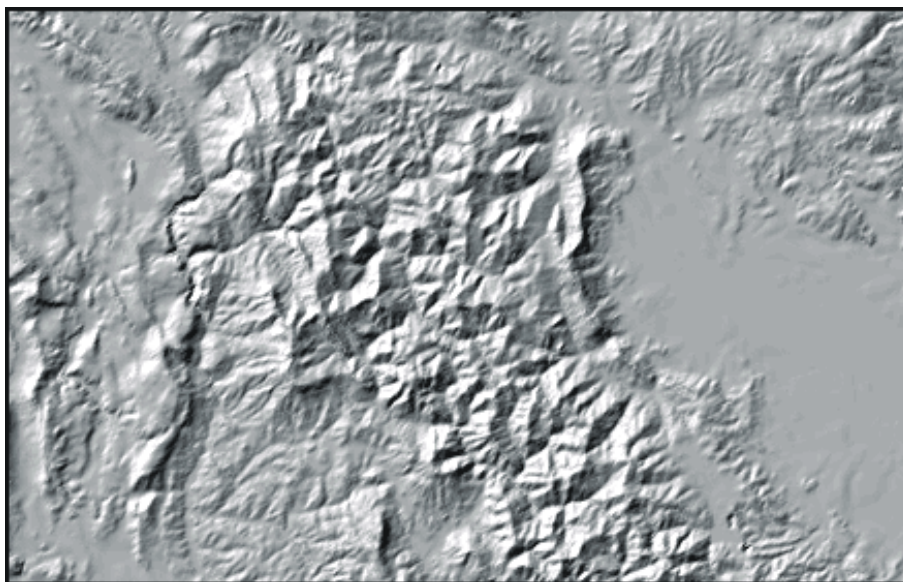
Οι διάφοροι αλγόριθμοι-μοντέλα προσδιορισμού της σκίασης του ανάγλυφου βασίζονται κυρίως σε θεωρητικές αρχές της οπτικής, οι οποίες περιγράφονται με τη βοήθεια σχέσεων τρισδιάστατης γεωμετρίας. Οι πιο σύνθετοι αλγόριθμοι εμπλουτίζονται σταδιακά με πρόσθετες θεωρήσεις που οδηγούν σε παραλλαγές με περισσότερες παραμέτρους. Ακόμα υπάρχουν αλγόριθμοι που βασίζονται σε

εμπειρικές πρακτικές, σχεδιαστικού χαρακτήρα, που εκφράζονται με τη μορφή μοντέλου αξιοποιώντας αναλυτικές σχέσεις.

8.3.1 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με τμηματική γραμμική προσέγγιση του Peucker

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι προσδιορισμού της σκίασης του ανάγλυφου, που χρησιμοποιούνται σε χαρτογραφικές εφαρμογές, υιοθετούν ένα μοντέλο φωτισμού που ανταποκρίνεται σε ιδεατές, ιδανικές επιφάνειες με ιδιότητες που έχουν ως αποτέλεσμα την τέλεια διάχυση του φωτός. Αυτό σημαίνει ότι οι θεωρούμενες επιφάνειες αντανάκλουν όλο το φως που δέχονται και δείχνουν επομένως το ίδιο λαμπερές από όλες τις πιθανές διευθύνσεις παρατήρησης (Σχήμα 8.3). Η ποσότητα φωτός που συλλέγεται από ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας εξαρτάται από την κλίση του σε σχέση με την προσπίπτουσα φωτεινή δέσμη. Συγκεκριμένα το ποσοστό του εμβαδού του στοιχείου που φαίνεται από τη φωτεινή πηγή -και άρα δέχεται και αντανάκλα το φως- ισούται με το γινόμενο του πραγματικού εμβαδού με το συνημίτονο της προσπίπτουσας γωνίας i . Επομένως η ανακλαστικότητα R θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \cos i = \frac{1 + p_0 p + q_0 q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}.$$



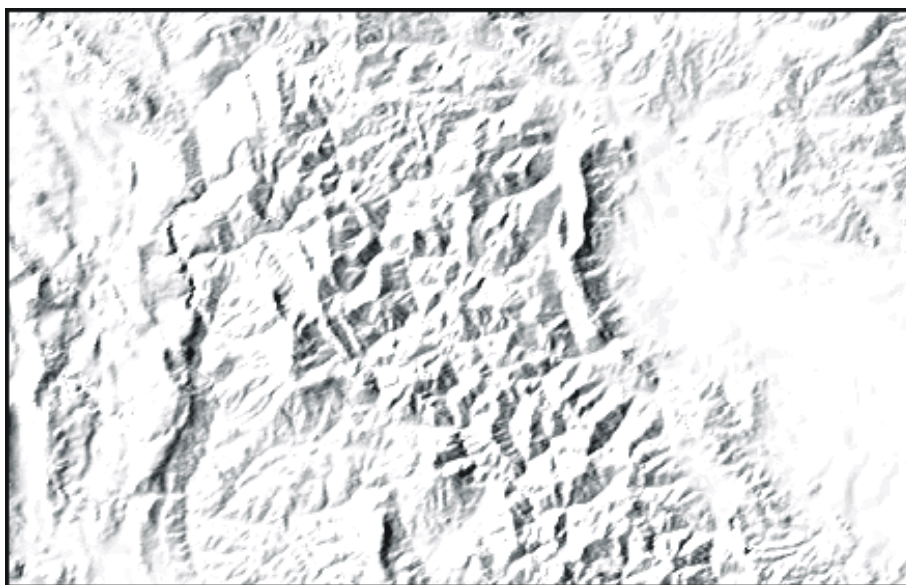
Σχήμα 8.3 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με τμηματική γραμμική προσέγγιση του Peucker

Η προσπίπτουσα γωνία i ορίζεται επάνω στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας μεταξύ του διανύσματος της τοπικής καθέτου και του διανύσματος προσανατολισμού των φωτεινών ακτινών και το μέγεθος της ανακλαστικότητας είναι ανάλογο του συνημιτόνου της. Μια τμηματικά γραμμική προσέγγιση της αρχικής σχέσης για την ανακλαστικότητα, με δεδομένη την τοποθέτηση της φωτεινής πηγής σε βορειοδυτική (ΒΔ) διεύθυνση, είναι η ακόλουθη:

$$R = 0.4285(p - q) - 0.0844|p + q| + 0.6599.$$

8.3.2 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με προσαρμογή της φωτεινής πηγής του Brassel

Με τον αλγόριθμο του Brassel επιχειρείται να επιλυθούν τα προβλήματα που εμφανίζονται όταν χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του Peucker. Δηλαδή όταν η ανακλαστικότητα προσδιορίζεται μόνον από τη γωνία πρόσπτωσης του φωτός.



Σχήμα 7.4 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με προσαρμογή της φωτεινής πηγής του Brassel

Με τον αλγόριθμο του Peucker είναι δυνατό να απεικονίζονται με ίδιο τόνο (ίδια προσπίπτουσα γωνία) οι εκατέρωθεν πλευρές μιας μισγάγγειας, ή οι εκατέρωθεν πλευρές μιας κορυφογραμμής, όταν ο προσανατολισμός τους είναι παράλληλος με τη διεύθυνση των φωτεινών ακτινών. Δηλαδή, ορισμένες διαφορετικές ως προς τη μορφολογία τους περιοχές αποδίδονται με τον ίδιο

ακριβώς τρόπο και είναι αδύνατη η οπτική τους διαφοροποίηση. Με τον αλγόριθμο του Brassel εφαρμόζονται διορθώσεις, τόσο στη διεύθυνση όσο και στην κλίση της φωτεινής δέσμης. Τα μεγέθη των προσθετικών αυτών διορθώσεων ($\delta\theta$, $\delta\varphi$) ρυθμίζονται από δύο συντελεστές: α και β , που αντιστοιχούν στις γωνίες προσανατολισμού: θ και φ :

$$\delta\theta = \alpha(\theta - \theta_0) \text{ και}$$

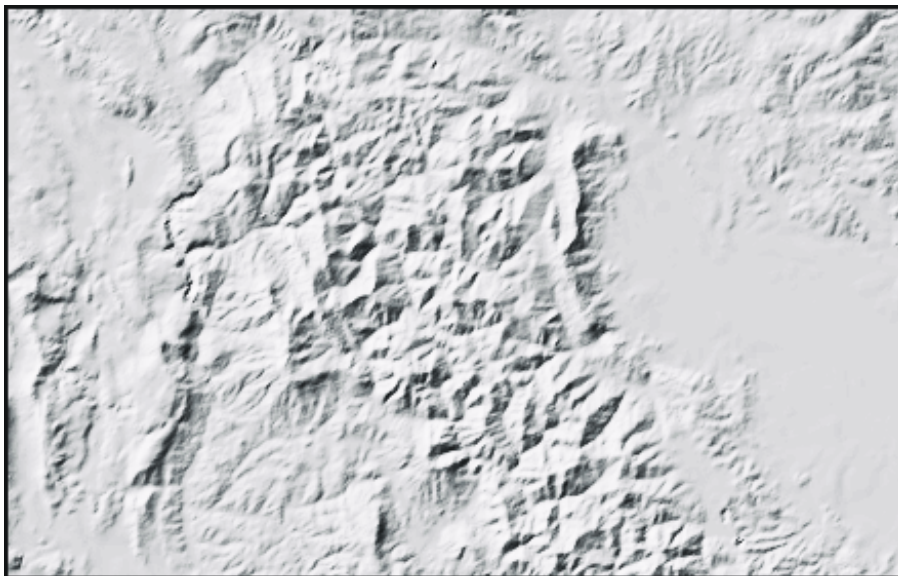
$$\delta\varphi = \arcsin\left(\frac{\beta}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0)\right).$$

Τα διορθωμένα στοιχεία προσανατολισμού τελικά εφαρμόζονται στην αρχική, γενική σχέση της ιδανικής αντανάκλασης. Στο Σχήμα 8.4 παρουσιάζεται η εικόνα εφαρμογής του αλγορίθμου του Brassel.

8.3.3 Μαθηματικό μοντέλο σκίασης

Το μαθηματικό μοντέλο δεν βασίζεται σε συγκεκριμένο είδος φωτισμού αλλά με κριτήριο το τελικό αποτέλεσμα χρησιμοποιεί ένα λογικό συνδυασμό παραμέτρων για τον υπολογισμό της ανακλαστικότητας:

$$R = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s' + \alpha}{\beta} \right),$$



Σχήμα 8.5 Μαθηματικό μοντέλο σκίασης

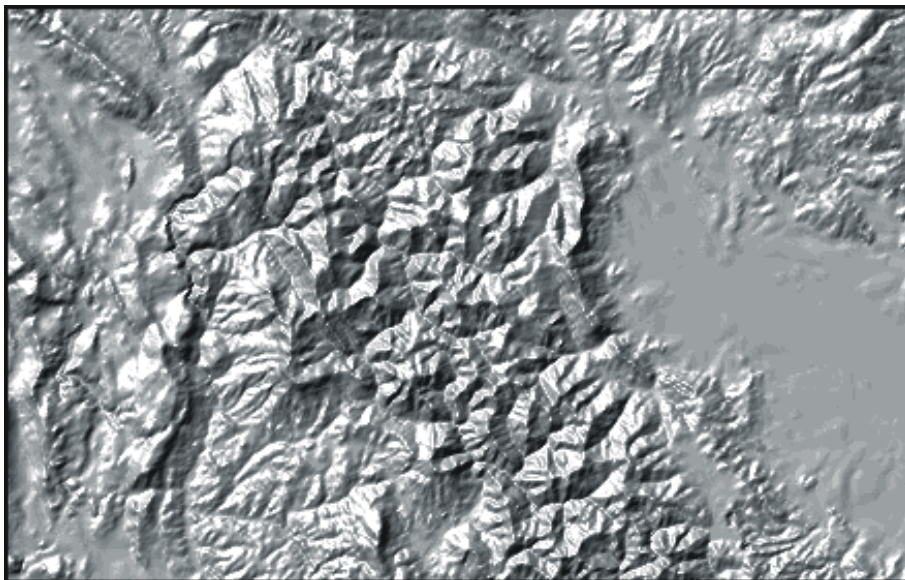
όπου: s' είναι η κλίση της επιφάνειας επάνω στη διεύθυνση των φωτεινών ακτινών, α και β παράμετροι που εκφράζουν αντίστοιχα το γκρίζο τόνο για τις οριζόντιες περιοχές και το ρυθμό μεταβολής των τόνων ως προς την κλίση.

Το αποτέλεσμα εφαρμογής του αλγόριθμου αυτού παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.5.

8.3.4 Αλγόριθμος κατοπτρικής αντανάκλασης

Μια μεγάλη σειρά μοντέλων κατοπτρικής αντανάκλασης εφαρμόζεται σε ρεαλιστικές αποδόσεις και σε εφαρμογές σχεδίασης γραφικών εικόνων σε περιβάλλον Η/Υ. Η μέθοδος βασίζεται σε ένα υποθετικό-ιδανικό οπτικό φαινόμενο, όπου οι φωτεινές ακτίνες ανακλώνται στη φωτιζόμενη επιφάνεια και αντικατοπτρίζονται επάνω στον παρατηρητή (Σχήμα 8.6). Έτσι, η θέση παρατήρησης αποκτά ενεργό ρόλο. Η σχέση της ανακλαστικότητας του αλγόριθμου της κατοπτρικής αντανάκλασης παρέχει περιθώρια επιλογής στο χρήστη για το ποσοστό συμμετοχής της κατοπτρικής: α ή της ιδανικής αντανάκλασης: $1-\alpha$, στο αποτέλεσμα:

$$R = ((1 - \alpha) + \alpha P) \frac{\cos i}{\cos \frac{\theta_0}{2}},$$



Σχήμα 8.6 Αλγόριθμος κατοπτρικής αντανάκλασης

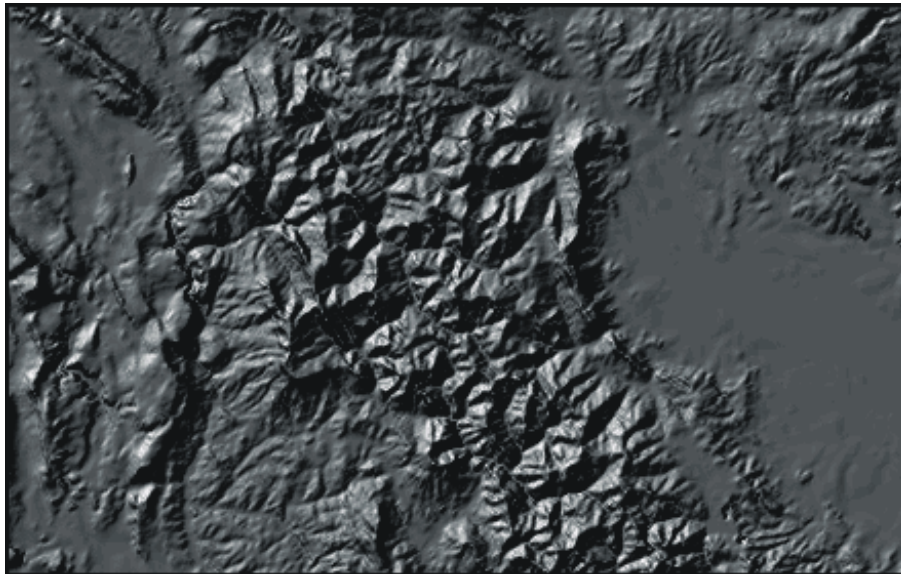
όπου: P είναι η κατανομή λαμπρότητας της επιφάνειας εξαρτώμενη από την υφή της, i η γωνία πρόσπτωσης και θ_0 η γωνία κλίσης του φωτός.

8.3.5 Αλγόριθμος κεκλιμένων καμπυλών του Tanaka

Μια επιφάνεια που καλύπτεται από παράλληλες διαδοχικές γραμμές πάχους: b και με ενδιάμεση απόσταση: w , έχει τιμή ανακλαστικότητας που εξαρτάται από τα μεγέθη αυτά καθώς και από τις αποχρώσεις των γραμμών και του μεταξύ τους χώρου στο χάρτη. Αν οι γραμμές είναι σχεδιασμένες με μαύρο χρώμα σε λευκό χαρτί, τότε η ανακλαστικότητα των γραμμών είναι μηδέν και του υπόλοιπου χώρου του χάρτη είναι 100 μονάδες. Η σχέση που προσδιορίζει την ανακλαστικότητα κάθε στοιχειώδους επιφάνειας του χάρτη είναι:

$$R = r_w - \frac{b}{w+b}(r_w - r_b),$$

όπου: r_b η ανακλαστικότητα των γραμμών και r_w η ανακλαστικότητα του υπόλοιπου χώρου του χάρτη.

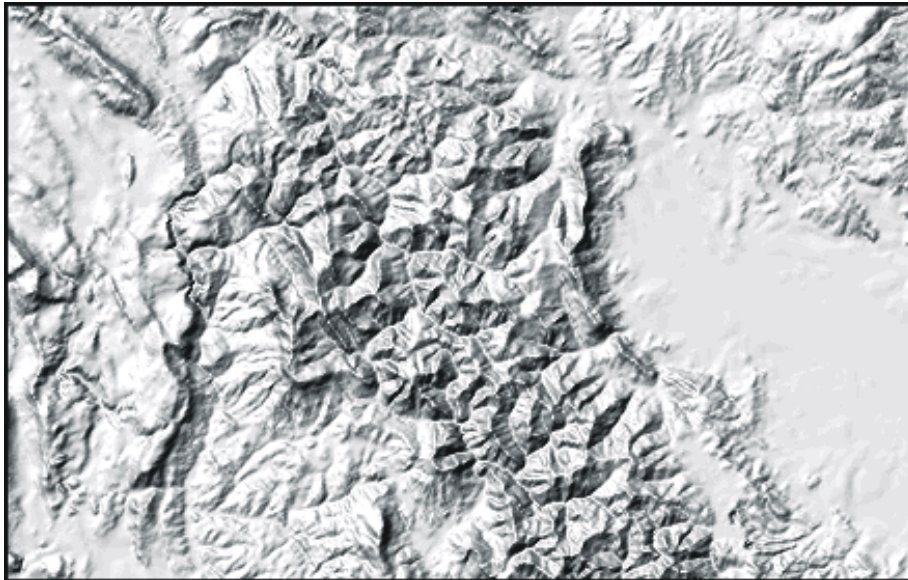


Σχήμα 8.7 Αλγόριθμος κεκλιμένων καμπυλών του Tanaka

Η αρχή αυτή εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που η επιφάνεια του χάρτη καλύπτεται από ισοϋψείς καμπύλες και έχει ως αποτέλεσμα μια εικόνα σκιάς που δίνει ισοδύναμη τονική εντύπωση (Σχήμα 8.7). Οι ισοϋψείς καμπύλες όμως είναι τομές οριζόντιων επιπέδων με την επιφάνεια του ανάγλυφου και έτσι η πυκνότητα

των γραμμών εξαρτάται μόνο από τη κλίση του εδάφους. Για να έχουμε μια διαβάθμιση ανακλαστικότητας που να εξαρτάται και από τη διεύθυνση της κλίσης του εδάφους, υποθέτουμε μια σειρά από διαδοχικές τομές της επιφάνειας με ισαπέχοντα κεκλιμένα επίπεδα, προσανατολισμένα κάθετα ως προς τις φωτεινές ακτίνες. Το μέγεθος της ισοδιάστασης: δ , το πάχος της γραμμής σχεδίασης της καμπύλης: b και η κλίμακα του χάρτη: k είναι μεταβλητά μεγέθη και καθορίζουν το τελικό αποτέλεσμα της ανακλαστικότητας κάθε στοιχειώδους επιφάνειας του ανάγλυφου, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$R = r_w - \frac{b}{kd} (r_w - r_b) \sqrt{\frac{(p - p_0)^2 + (q - q_0)^2}{p_0^2 + q_0^2 + 1}}.$$



Σχήμα 8.8 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του Wiechel

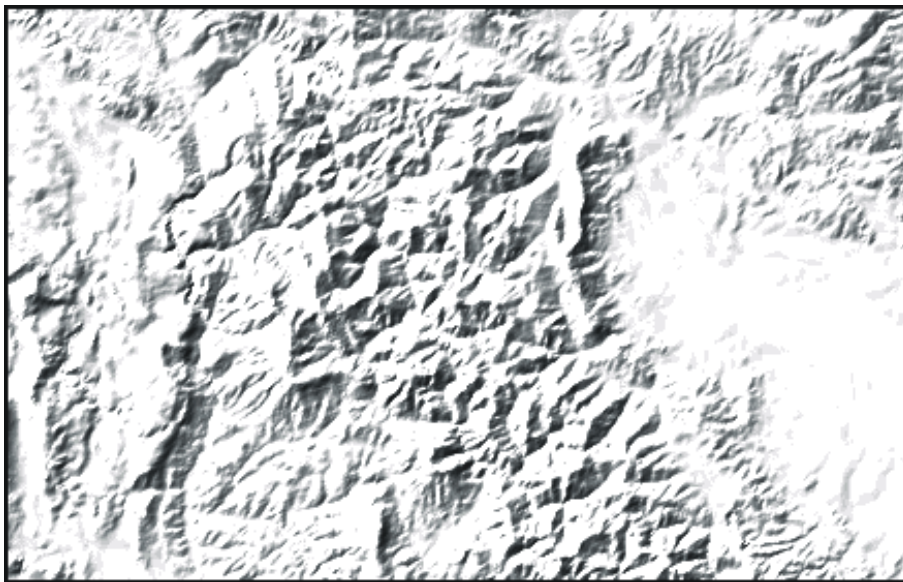
8.3.6 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του Wiechel

Η συμπεριφορά μιας επιφάνειας στο φωτισμό με τα πρότυπα της ιδανικής αντανάκλασης είναι βέβαια εντελώς φανταστική. Στην πραγματικότητα η αντανάκλαση μεταβάλλεται και η επιφάνεια δεν θα έπρεπε να φαίνεται το ίδιο λαμπερή από παντού. Πάνω σε αυτή τη λογική έχουν αναπτυχθεί διάφοροι αλγόριθμοι που εκτός της γωνίας πρόσπτωσης: i του φωτός έχουν συμπεριλάβει

και άλλες παραμέτρους. Μια ανάλογη παράμετρος είναι η γωνία μεταξύ τοπικής καθέτου και διανύσματος θέσης του παρατηρητή: e . Βέβαια για χαρτογραφικούς λόγους η θέση του παρατηρητή οφείλει να είναι πάντα στο ναδίρ ώστε να έχουμε εποπτική, κατακόρυφη παρατήρηση του χάρτη, οπότε η γωνία αυτή ταυτίζεται τελικά με τη γωνία κλίσης της στοιχειώδους επιφάνειας. Η ανακλαστικότητα για τον αλγόριθμο αυτό θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{\cos i \cos e}{\frac{1}{2}(1 + \cos e)}.$$

Στο Σχήμα 8.8 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Wiechel στο ίδιο πάντα αρχείο των δεδομένων.



Σχήμα 8.9 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης του Marsik

8.3.7 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με αυτόματη απόδοση της σκίασης του Marsik

Άλλες προσεγγίσεις στη συμπεριφορά μιας επιφάνειας που δεν αντανακλά ιδανικά το φως, μπορεί και να ξεφεύγουν εντελώς από τη βασική αρχή της ιδανικής αντανάκλασης και να στηριχθούν σε εντελώς διαφορετικές θεωρήσεις. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αξιοποιεί τη σχέση ανακλαστικότητας και πυκνότητας

εκτύπωσης, με την πυκνότητα να ισούται με το δεκαδικό λογάριθμο του αντιστρόφου της ανακλαστικότητας, και βασίζεται στον υπολογισμό της ανακλαστικότητας δια μέσου της κλίσης της επιφάνειας επάνω στη διεύθυνση φωτισμού. Η ανακλαστικότητα στον αλγόριθμο αυτό προσδιορίζεται από τη σχέση:

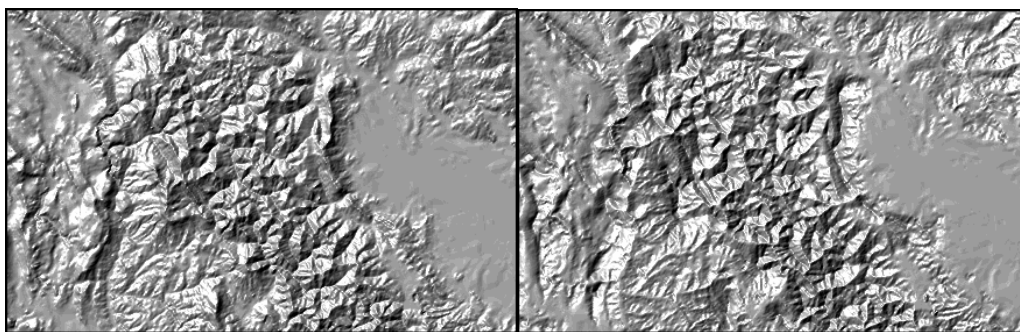
$$R = 10^{\frac{p_0 p + q_0 q}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}}$$

Στο Σχήμα 8.9 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγόριθμου του Marsik.

8.4 Διερεύνηση και σύγκριση αλγορίθμων

Η επίδραση του προσανατολισμού του υποθετικού φωτισμού και των άλλων ειδικότερων παραμέτρων που τυχόν διαθέτει κάθε μοντέλο-αλγόριθμος ποικίλουν ως προς το παραγόμενο τελικό αποτέλεσμα.

Η γωνία διεύθυνσης της ιδεατής φωτεινής δέσμης με την οποία αυτή προσπίπτει σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια του ανάγλυφου επηρεάζει την ερμηνεία του από το χρήστη. Για παράδειγμα, ο τυπικός προσανατολισμός που χρησιμοποιείται σε χαρτογραφικές εφαρμογές έχει βορειο-δυτική κατεύθυνση (Σχήμα 8.10- αριστερά). Με αυτόν τον προσανατολισμό ο χρήστης του χάρτη ερμηνεύει τις σκιάσεις με τρόπο που οι κοιλότητες και οι κορυφογραμμές του ανάγλυφου να αναγνωρίζονται σωστά. Αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό του φωτισμού, δηλαδή γίνει νοτιο-ανατολικός, τότε η ερμηνεία αντιστρέφει την πραγματικότητα (Σχήμα 8.10 – δεξιά).



Σχήμα 8.10 Η επίδραση της μεταβολής του φωτισμού στην ερμηνεία του ανάγλυφου.

Αποσκοπώντας στην ορθή ερμηνεία των μορφολογικών χαρακτηριστικών του ανάγλυφου ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής δέσμης πρέπει να

προσπίπτει από βόρειες έως δυτικές κατευθύνσεις. Εξετάζοντας την επίδραση που έχει ο προσανατολισμός της υποθετικής φωτεινής πηγής στο Σχήμα 8.11, παρουσιάζονται οι σκιάσεις του ίδιου αλγόριθμου με σχεδόν βόρειο (αριστερά), με βορειο-δυτικό (κέντρο) και σχεδόν δυτικό (δεξιά) προσανατολισμό.



Σχήμα 8.11 Η επίδραση της μεταβολής της διεύθυνσης φωτισμού

Η σύγκριση των τριών αυτών εικόνων επιβεβαιώνει την εμπειρική διαπίστωση ότι ο άνθρωπος ερμηνεύει ορθότερα τους μορφολογικούς σχηματισμούς του ανάγλυφου, όταν η σκιά δημιουργείται με βορειο-δυτικό φωτισμό. Βέβαια, ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής πηγής πρέπει να ρυθμίζεται γύρω από βορειο-δυτική κατεύθυνση ανάλογα με τις ευρύτερες τάσεις που επικρατούν στις διευθύνσεις των ορεινών όγκων της χαρτογραφούμενης περιοχής.

Η κλίση της υποθετικής φωτεινής πηγής επηρεάζει το μέγεθος της σκίασης του ανάγλυφου που σχηματίζεται επάνω στην επιφάνεια του χάρτη. Αυξάνοντας την κλίση μικραίνει το μέγεθος της παραγόμενης σκίασης. Στο Σχήμα 8.12 παρουσιάζεται η επίδραση της κλίσης της υποθετικής φωτεινής πηγής στον ίδιο αλγόριθμο-μοντέλο για τρεις χαρακτηριστικές τιμές: 30°, 45° και 60° (αντίστοιχα: αριστερά, κέντρο και δεξιά). Παρατηρώντας τις τρεις εικόνες του Σχήματος 8.12 επιβεβαιώνεται η μεταβολή της έντασης της σκιάς του ανάγλυφου από ανοικτές σε σκούρες τιμές με άμεσο αποτέλεσμα να επηρεάζεται και η τονική εντύπωση της συνολικής εικόνας της σκίασης του ανάγλυφου του χάρτη.

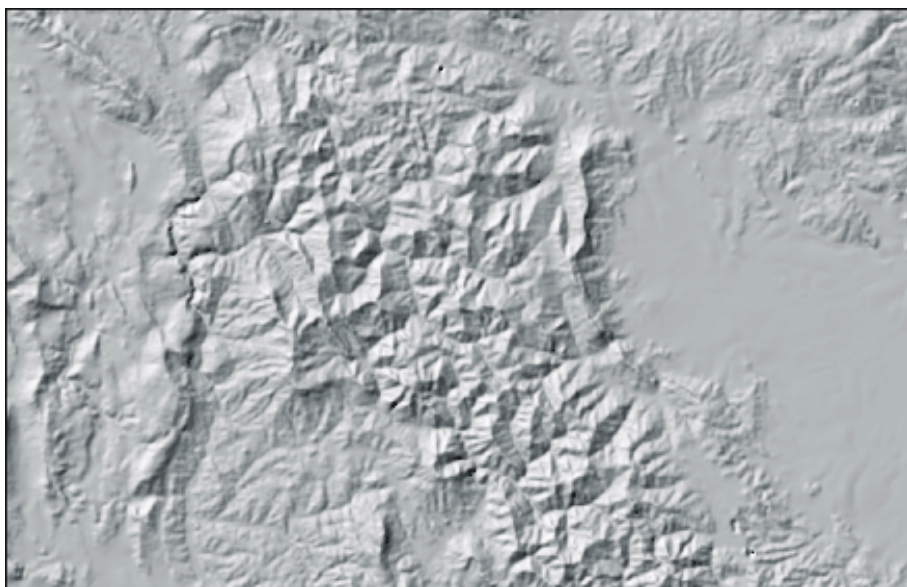


Σχήμα 8.12 Η επίδραση της κλίσης του φωτισμού

Η τονική εντύπωση που δημιουργείται στο χρήστη του χάρτη ενέχει μια βασική αντινομία. Όσο περισσότερο έντονη είναι η τονική εντύπωση που δημιουργείται με την παρουσίαση της σκίασης τόσο πιο σωστά και εύληπτα ο

χρήστης ερμηνεύει τα μορφολογικά χαρακτηριστικά (για παράδειγμα, συγκρίνατε τις τρεις εικόνες του Σχήματος 8.12). Η έντονη όμως τονική διαβάθμιση γεμίζει το χώρο που καταλαμβάνει ο χάρτης με μεγάλη ποσότητα πληροφορίας, αυξάνει δηλαδή δραστικά την πυκνότητα πληροφορίας, με αποτέλεσμα να μην αφήνει περιθώρια για την εύληπτη απεικόνιση των υπόλοιπων πληροφοριών που πρέπει να απεικονίζει ο χάρτης.

Οι αλγόριθμοι που βασίζονται σε συνθήκες φωτισμού ιδανικής αντανάκλασης κατά κανόνα χρησιμοποιούνται στη χαρτογραφία και στα περισσότερα γνωστά πακέτα ψηφιακής χαρτογραφικής σχεδίασης (π.χ. Arc/Info, Σχήμα 8.13). Το αποτέλεσμα είναι ομοιόμορφο, συμπαγές και γενικά πολύ φιλικό στο χρήστη. Αντιπαραθέτοντας αντίστοιχα παραδείγματα μοντέλων μη ιδανικής αντανάκλασης που είναι περισσότερο κοντά στη φυσική πραγματικότητα, οι τόνοι γίνονται πιο σκληροί και η αντίθεση άσπρου-μαύρου μεγαλώνει. Με τα μοντέλα της κατοπτρικής αντανάκλασης είναι χαρακτηριστική η προσπάθεια εντυπωσιασμού του χρήστη, όπως άλλωστε συμβαίνει και στις ρεαλιστικές αναπαραστάσεις που αποδίδονται δια μέσου λογισμικών πακέτων γραφικών (computer graphics). Ιδιαίτερες χαρτογραφικές δυνατότητες όμως προσφέρουν οι ειδικότερες παράμετροι που υπάρχουν στα διάφορα μοντέλα. Όταν μάλιστα είναι περισσότερες από μία, τότε οι συνδυασμοί τους παρέχουν ευρύτερες συσχετίσεις και οι αλληλεπιδράσεις των αποτελεσμάτων είναι διαφορετικές, οπότε ο χαρτογράφος έχει μεγάλο περιθώριο να πειραματιστεί για να πετύχει την καλύτερη αναπαράσταση της σκίασης στην εφαρμογή του.



Σχήμα 8.13 Η απόδοση της σκιάς του ανάγλυφου με τον αλγόριθμο του Arc/Info

Στον Πίνακα 8.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα χαρακτηριστικά των αλγορίθμων-μεθόδων που αναλύθηκαν σε σχέση με το μοντέλο, τις συνθήκες φωτισμού, τις παραμέτρους του φωτός και τις τυχόν ειδικές παραμέτρους που διαθέτει κάθε ένας από αυτούς.

Πίνακας 8.1 Συγκεντρωτική παρουσίαση χαρακτηριστικών αλγορίθμων σκίασης

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	ΜΟΝΤΕΛΟ	ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΦΩΤΙΣΜΟΥ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΦΩΤΟΣ	ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ
Τμηματικής γραμ. προσέγγισης <i>Peucker</i>	Θεωρία φωτισμού	Ιδανική αντανάκλαση		
Προσαρμογής φωτεινής δέσμης <i>Brassel</i>	Θεωρία φωτισμού	Ιδανική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	Συντελεστές προσαρμογών α , β
Μαθηματικό μοντέλο σκίασης	Μαθηματική σχέση		Διεύθυνση	Τόνος οριζόντιας κλίσης α Ρυθμός αλλαγής τόνων-κλίσεων β
Κατοπτρικής Αντανάκλασης	Θεωρία φωτισμού	Κατοπτρική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	Κατανομή λαμπρότητας P Συμπαγές φωτός n
Μεθόδου κεκλιμένων καμπυλών <i>Tanaka</i>	Ανακλαστικό- τητα διαγράμμισης		Διεύθυνση Κλίση	Πάχος γραμμής b Κλίμακα k Ισοδιάσταση δ
Μεταβαλλόμενης Λαμπρότητας <i>Wiechel</i>	Θεωρία φωτισμού	Μη ιδανική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	
Αυτόματης απόδοσης σκίασης του <i>Marsik</i>	Θεωρία φωτισμού	Μη ιδανική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	

8.5 Η σκίαση του ανάγλυφου σε χαρακτηριστικές χαρτογραφικές εφαρμογές

Για τη διερεύνηση των μεθόδων απόδοσης της σκίασης του ανάγλυφου στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ορισμένες ενδεικτικές χαρτογραφικές εφαρμογές. Στις εφαρμογές αυτές χρησιμοποιείται ένα ΨΜΥ, ανάλυσης 250m, μιας περιοχής ενός τμήματος στά νότια της οροσειράς της Πίνδου. Η έκταση και η θέση της περιοχής επιλέχθηκε ώστε να προσφέρει πλούσιο ανάγλυφο και μορφολογικούς σχηματισμούς με ποικίλο προσανατολισμό.

Ο χαρακτήρας των διαφόρων χαρτογραφικών εφαρμογών δεν καθορίζεται αποκλειστικά από το είδος των στοιχείων που απεικονίζονται αλλά και από τον τρόπο με τον οποίο απεικονίζονται, δηλαδή το συγκεκριμένο συμβολισμό που ακολουθείται. Σημαντικό ρόλο σε έγχρωμους χάρτες παίζει η χρήση των αποχρώσεων τόσο ως προς την επιλογή όσο και ως προς τη λαμπρότητα του κάθε συμβόλου. Κατά την αναπαράσταση της σκίασης του ανάγλυφου σε έγχρωμους χάρτες ο αλγόριθμος που θα εφαρμοσθεί έρχεται σε «αντιπαράθεση» με τις παραπάνω συνιστώσες του χάρτη.

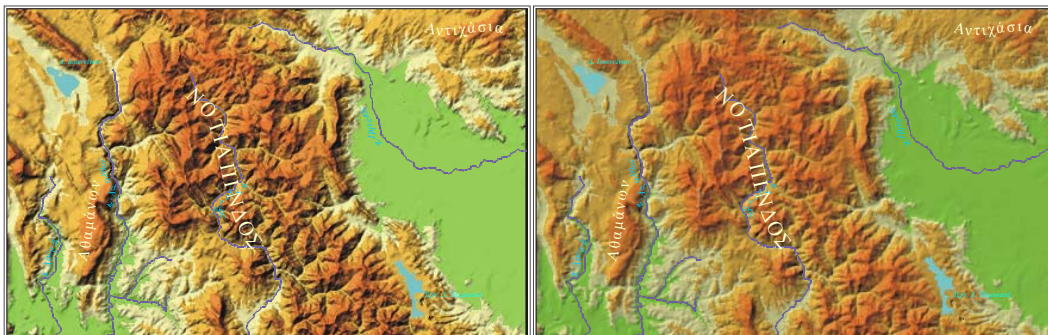
Τα υπόλοιπα απεικονιζόμενα στοιχεία του χάρτη (ονοματολογία, δίκτυα συγκοινωνιών, διοικητική διαίρεση, κλπ.) περιορίζουν την τονικότητα της εικόνας της σκίασης. Μια πρώτη προσέγγιση γίνεται με την αύξηση της κλίσης της φωτεινής δέσμης με αποτέλεσμα και την αύξηση όλων των τόνων (Σχήμα 8.14-αριστερά). Πέρα από αυτό, μπορεί να γίνει η απεικόνιση μόνον των τόνων της σκίασης των κλίσεων που δεν είναι ορατές από τη φωτεινή πηγή (Σχήμα 8.14-δεξιά). Σε έναν πολιτικό χάρτη, για παράδειγμα, όπου συνήθως εφαρμόζεται ο επιφανειακός συμβολισμός για την απεικόνιση των επιφανειών με αρκετά απαλές αποχρώσεις, η παραπάνω απλούστευση επιτρέπει τις αποχρώσεις των επιφανειακών συμβόλων του χάρτη να φαίνονται ακόμη καλύτερα και καθαρότερα.



Σχήμα 8.14 Εφαρμογή απεικόνισης της σκιάς του ανάγλυφου σε «πολιτικό» χάρτη

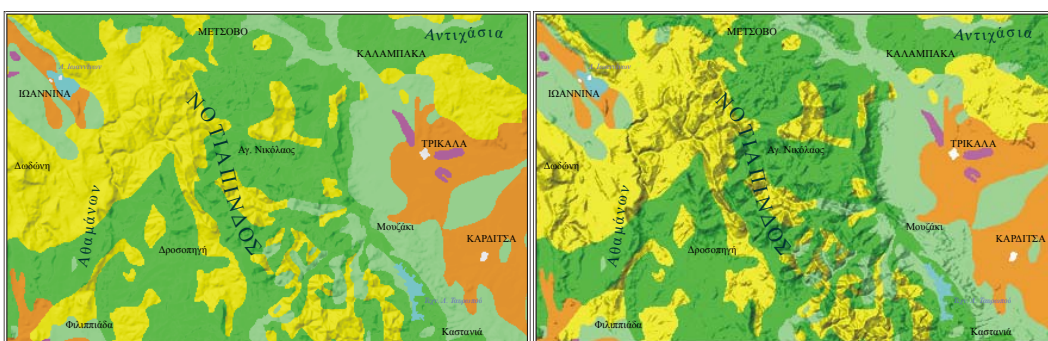
Σε ένα χάρτη με αποκλειστικό σκοπό την αναπαράσταση του ανάγλυφου, η απεικόνισή του μπορεί να γίνει με προοδευτική συνεχή αλλαγή της απόχρωσης συναρτήσει του υψομέτρου και με ταυτόχρονη χρήση μιας μεθόδου μη ιδανικής αντανάκλασης (Σχήμα 8.15-αριστερά). Η αντιπαράθεσή της με την υποθετική ιδανική αντανάκλαση στη σκίαση του ανάγλυφου (Σχήμα 8.15-δεξιά), κάνει άμεσα αντιληπτή τη διάθεση συμβιβασμού του χαρτογράφου, προκειμένου να πετύχει μια περισσότερο συμβατή με το μέσο χρήστη απεικόνιση. Βέβαια, είναι

εμφανής η πληρέστερη απεικόνιση των μορφολογικών σχηματισμών του ανάγλυφου της πρώτης σε σχέση με τη δεύτερη μέθοδο.



Σχήμα 8.15 Εφαρμογή απεικόνισης της σκιάς του ανάγλυφου σε «γεωφυσικό» χάρτη

Σε ένα θεματικό χάρτη όπως αυτός της απεικόνισης των χρήσεων γης μιας περιοχής, η πρώτη λύση είναι η αύξηση των τόνων με επέμβαση στη θέση της φωτεινής πηγής (Σχήμα 8.16-αριστερά). Επιπρόσθετα, η χρήση έντονων αποχρώσεων με μεγάλο κορεσμό δίνει το ερέθισμα για την εφαρμογή ενός αλγορίθμου κατοπτρικής αντανάκλασης. Το αποτέλεσμα αποδίδει τα έντονα χαρακτηριστικά της επιφάνειας του ανάγλυφου (γυαλάδα) σε πλήρη οπτική αρμονία με τη χρωματική σύνθεση του χάρτη (Σχήμα 8.16-δεξιά).



Σχήμα 8.16 Εφαρμογή απεικόνισης της σκιάς του ανάγλυφου σε χάρτη χρήσεων γης

8.6 Συμπεράσματα

Η αναπαράσταση της σκιάς του τοπογραφικού ανάγλυφου, με τα μέσα που παρέχονται σήμερα στο χαρτογράφο, είναι μια χαρτογραφική διεργασία που μπορεί εύκολα να αντιμετωπισθεί και να εμπλουτίσει τους παραγόμενους χάρτες. Επιπλέον, με την εφαρμογή «αιτιοκρατικών» αλγορίθμων έχουν ξεπεραστεί ορισμένα από τα μειονεκτήματα της «υποκειμενικής» απόδοσης της σκιάς που προέρχονταν από την εφαρμογή των αναλογικών μεθόδων στο παρελθόν.

Κάτω από τις νέες αυτές συνθήκες, δίνεται στο χαρτογράφο η δυνατότητα να διερευνήσει σε βάθος τις διαθέσιμες μεθόδους (αλγορίθμους) προσδιορισμού της σκίασης και να πειραματιστεί με τις παραμέτρους των ώστε να επιτύχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι ανάγκες κάθε ξεχωριστής χαρτογραφικής εφαρμογής είναι βέβαια διαφορετικές και γι' αυτό το λόγο ο ένας και μοναδικός αλγόριθμος που τυχόν διατίθεται από ένα χαρτογραφικό πακέτο, όσο καλός και αποδοτικός και αν είναι, είναι σίγουρα φτωχός σε σχέση με τις δυνατότητες που μπορεί να προσφέρει κάποιος άλλος που πιθανά είναι καταλληλότερος για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Με τις νέες αυτές δυνατότητες, επιτυγχάνεται μια οπτική αρμονία μεταξύ επιφανειακών συμβόλων και σκίασης καθώς επίσης και των υπολοίπων συμβόλων του χάρτη. Επιπλέον, παρέχεται η δυνατότητα στο χαρτογράφο να διερευνήσει πιθανούς εναλλακτικούς τρόπους απόδοσης της σκίασης του ανάγλυφου και να εφαρμόσει εκείνη τη μέθοδο που βελτιώνει δραστικά τη συνολική εικόνα του χάρτη.

8.7 Βιβλιογραφία

- Horn B.K.P. "Hill shading and the reflectance map", *Geo-Processing*. Vol. 2, 1982, pp. 65-133.
- Imhof E. *Cartographic Relief Presentation*. (ed. H.J. Steward). Walter de Gruyter, Berlin, 1982, p. 389.
- Νάκος Β. "Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών δεδομένων βασισμένη στη θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας". Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1990, σελ. 200.
- Νάκος Β. και Τζελέπης Ν. "Η σκιά του ανάγλυφου στους χάρτες", *Πυρφόρος*, 16, 1994, σελ. 44-48.
- Νάκος Β. και Φιλιππακοπούλου Β. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.

- Snyder M.W. "A comparison of four techniques for the calculation of slope and aspect from digital terrain matrices". M.Sc.Thesis, University of Illinois, 1980, p. 56.
- Tanaka K. "The orthographical relief method of representing hill features on a topographical map". *The Geographical Journal*, **79**, 1930, pp. 232-233.
- Τζελέπης Ν. "Διερεύνηση μεθοδολογιών αναπαράστασης της σκιάς του τοπογραφικού ανάγλυφου με ψηφιακές τεχνικές". Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1994, σελ. 135.
- Τζελέπης Ν. και Νάκος Β. "Διερεύνηση μεθόδων αναπαράστασης της σκιάς του ανάγλυφου στους χάρτες". Πρακτικά 2^{ου} Εθνικού Συνεδρίου Χαρτογραφίας, Χαρτογραφική Επιστημονική Εταιρία Ελλάδος, 1996, σελ. 275-283.

Κεφάλαιο 9

9. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

9.1 Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Ο Γερμανός μαθηματικός Klein όρισε ως γεωμετρία τη μελέτη των ιδιοτήτων ενός συνόλου σημείων που διατηρούνται αναλλοίωτες, όταν τα στοιχεία του συνόλου υφίστανται την επίδραση συγκεκριμένων ομάδων μετασχηματισμού. Οι χωρικές ιδιότητες των δεδομένων ενός χάρτη που διατηρούνται αναλλοίωτες διαφέρουν ανάλογα με το είδος των μετασχηματισμών που επιδρούν σε αυτά. Εάν σε ένα σύνολο σημείων εφαρμόσουμε διαδοχικά ένα μετασχηματισμό μετάθεσης και στη συνέχεια ένα μετασχηματισμό στροφής, τότε στην παράγωγη γεωμετρία οι διευθύνσεις, οι αποστάσεις και η ιδιότητα της συνδεσιμότητας θα παραμείνουν αναλλοίωτες. Η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού ομοιότητας σε γραφικά αντικείμενα, που περιλαμβάνει και μεταβολή της κλίμακας, δεν διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις όμως διατηρούνται αναλλοίωτες οι γωνίες και οι διευθύνσεις. Για αυτό το λόγο, η εφαρμογή του μετασχηματισμού ομοιότητας έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της μορφής των γραφικών αντικειμένων και αν αυτά αντιπροσωπεύουν χαρτογραφικά αντικείμενα η αναγνώρισή τους, είναι εύκολη μετά το μετασχηματισμό. Ένας περισσότερο σύνθετος μετασχηματισμός είναι ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός. Η εφαρμογή του σε γραφικά αντικείμενα ενώ δεν διατηρεί τις αποστάσεις και τις γωνίες, διατηρεί αναλλοίωτες τις ιδιότητες της παραλληλίας και της συνευθειακότητας. Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός έχει μεγάλη εφαρμογή στη χαρτογραφία στη διαδικασία της ψηφιοποίησης χαρτών, στη γεωμετρική αναγωγή δορυφορικών δεδομένων κα. Τέλος, ο προβολικός μετασχηματισμός δεν διατηρεί τις αποστάσεις, τις γωνίες και την ιδιότητα της παραλληλίας. Η εφαρμογή του προβολικού μετασχηματισμού παραμορφώνει το εμβαδόν και τη μορφή των γραφικών αντικειμένων. Η γεωμετρία του προβολικού μετασχηματισμού χρησιμοποιείται στις χαρτογραφικές προβολές για την απεικόνιση της επιφάνειας της σφαίρας ή του ελλειψοειδούς στο επίπεδο. Έτσι, λοιπόν εφαρμόζονται ισοδύναμες προβολές που διατηρούν αναλλοίωτο το εμβαδόν αλλά παραμορφώνουν σημαντικά τη

μορφή των γραφικών αντικειμένων ή σύμμορφες, που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή των γραφικών αντικειμένων αλλά παραμορφώνουν το εμβαδόν. Τέλος, ο προβολικός μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτη την ιδιότητα της συνδεσιμότητας των γραφικών αντικειμένων.

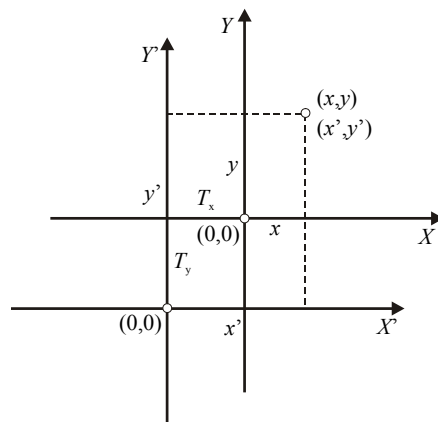
Ως **χαρτογραφική αντιστοιχία** ορίζεται η δυαδική αντιστοιχία, στην οποία κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού ενός χάρτη Α απεικονίζεται σε ένα ή περισσότερα στοιχεία του πεδίου τιμών ενός χάρτη Β και αντίστροφα. Ανάλογα, ως **χαρτογραφική συνάρτηση** ορίζεται η δυαδική αντιστοιχία, στην οποία κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού ενός χάρτη Α απεικονίζεται σε ένα στοιχείο του πεδίου τιμών ενός χάρτη Β. Τέλος, ως **χαρτογραφικός μετασχηματισμός** ορίζεται η δυαδική αντιστοιχία, στην οποία υπάρχει ένα-προς-ένα απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του πεδίου ορισμού ενός χάρτη Α και του πεδίου τιμών ενός χάρτη Β. Οι χαρτογραφικές συναρτήσεις δεν είναι τόσο ισχυροί μετασχηματισμοί όσο οι χαρτογραφικοί μετασχηματισμοί, γιατί δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει η αντίστροφη μιας χαρτογραφικής συνάρτησης. Με αυτήν την έννοια για παράδειγμα, η γενίκευση, ως χαρτογραφική διαδικασία, είναι μια χαρτογραφική συνάρτηση και όχι ένας χαρτογραφικός μετασχηματισμός γιατί πολλά στοιχεία του αρχικού χάρτη μπορεί να αντιστοιχούν πιθανά σε ένα μόνο στοιχείο του τελικού χάρτη.

9.1.1 Μετασχηματισμός μετάθεσης

Ο μετασχηματισμός μετάθεσης εφαρμόζεται σε γραφικά αντικείμενα με σκοπό τη μετακίνησή τους σε νέα θέση. Με το μετασχηματισμό μετάθεσης δημιουργείται ένα νέο σημείο (x', y') για κάθε αρχικό σημείο του γραφικού αντικειμένου (x, y) . Ο μετασχηματισμός μετάθεσης χρησιμοποιείται στην πράξη για να μετατεθεί η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων και ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Όταν η παράμετρος T_x του μετασχηματισμού είναι θετική, τότε η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων μετατίθεται προς τα αριστερά, ενώ όταν είναι αρνητική προς τα δεξιά (Σχήμα 9.1). Ανάλογα, όταν η παράμετρος T_y είναι θετική, τότε η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων μετατίθεται προς τα κάτω, ενώ όταν είναι αρνητική προς τα πάνω (Σχήμα 9.1). Ο μετασχηματισμός μετάθεσης διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις, τις διευθύνσεις και την ιδιότητα της συνδεσιμότητας μεταξύ των γραφικών αντικειμένων.

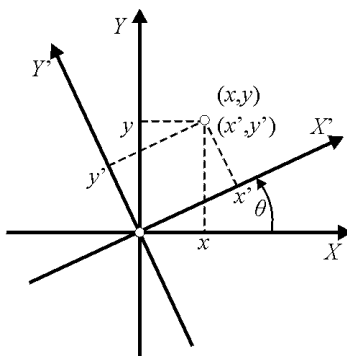


Σχήμα 9.1 Μετασχηματισμός μετάθεσης

9.1.2 Μετασχηματισμός στροφής

Ο μετασχηματισμός στροφής χρησιμοποιείται για να περιστραφούν οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων γύρω από την αφετηρία κατά ορισμένη γωνία θ . Η γωνία στροφής μετράται με αρχή τον άξονα- X και με αριστερόστροφη φορά (Σχήμα 9.2). Ο μετασχηματισμός στροφής δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



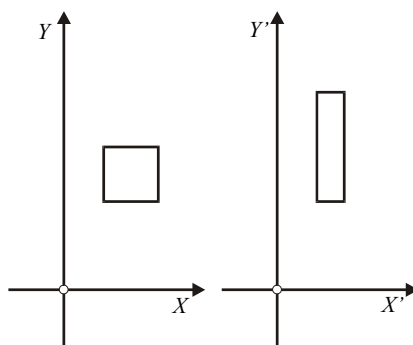
Σχήμα 9.2 Μετασχηματισμός στροφής

Ο μετασχηματισμός στροφής συνήθως χρησιμοποιείται σε εφαρμογές οπτικοποίησης τρισδιάστατων επιφανειών. Ο μετασχηματισμός αυτός διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις, τις γωνίες και την ιδιότητα της συνδεσιμότητας μεταξύ των γραφικών αντικειμένων.

9.1.3 Μετασχηματισμός κλίμακας

Όπως αναφέρθηκε και οι δύο προηγούμενοι μετασχηματισμοί διατηρούν αναλλοίωτες τις αποστάσεις μεταξύ γραφικών αντικειμένων. Ο μετασχηματισμός κλίμακας εφαρμόζεται για να μεταβληθεί η μονάδα μέτρησης των αποστάσεων του συστήματος συντεταγμένων και ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 9.3 Μετασχηματισμός κλίμακας

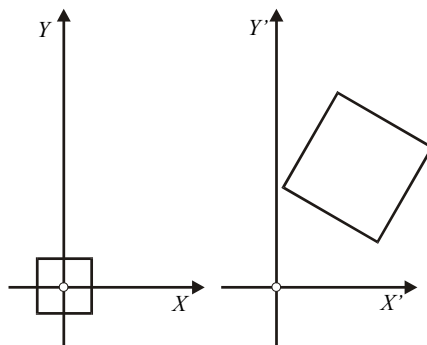
Η εφαρμογή του μετασχηματισμού κλίμακας έχει ως αποτέλεσμα τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση των γραφικών αντικειμένων ως προς το σύστημα συντεταγμένων. Όταν οι παράμετροι S_x και S_y του μετασχηματισμού (δηλαδή οι κλίμακες κατά τους άξονες X και Y) είναι μικρότεροι από τη μονάδα, τότε το γραφικό αντικείμενο σμικρύνεται, ενώ αντίθετα όταν είναι μεγαλύτεροι από τη μονάδα, τότε μεγεθύνεται. Όταν οι παράμετροι του μετασχηματισμού είναι μεταξύ τους ίσοι ($S_x = S_y$), τότε ο μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτες τις διευθύνσεις ως προς το σύστημα συντεταγμένων. Όταν οι παράμετροι έχουν άνισες τιμές ($S_x \neq S_y$), τότε το γραφικό αντικείμενο παραμορφώνεται στρεβλά ως προς τη μία διεύθυνση. Στο Σχήμα 9.3 έχει εφαρμοστεί σε ένα τετράγωνο μετασχηματισμός κλίμακας, όπου: $S_x = 0.5$ και $S_y = 2$.

9.1.4 Μετασχηματισμός ομοιότητας

Η σύνθεση των μετασχηματισμών μετάθεσης, στροφής και κλίμακας (ενιαίας κατά: x και y) αποτελεί το μετασχηματισμό ομοιότητας. Χαρακτηριστική ιδιότητα του μετασχηματισμού είναι η διατήρηση των σχημάτων των γραφικών αντικειμένων (Σχήμα 9.4). Ο μετασχηματισμός ομοιότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

όπου: T_x και T_y η μετάθεση, θ η στροφή – που μετράται από τον άξονα: x , αριστερόστροφα – και S η κλίμακα.



Σχήμα 9.4 Μετασχηματισμός ομοιότητας

Οι παράμετροι του μετασχηματισμού ομοιότητας είναι τέσσερις: δύο μεταθέσεις (μία κατά τον άξονα: X και μία κατά τον άξονα: Y), μία στροφή και μία κλίμακα. Επομένως, ο μετασχηματισμός συχνά χρησιμοποιείται με τις ακόλουθες γραμμικές σχέσεις:

$$x' = ax + by + c,$$

$$y' = -bx + ay + d.$$

Οι γεωμετρικές του παράμετροι (μετάθεση, στροφή και κλίμακα) συσχετίζονται με τους συντελεστές των γραμμικών σχέσεων (a , b , c και d) από τις ακόλουθες σχέσεις:

Μετάθεση: $T_x = c$ και $T_y = d$

Στροφή: $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Κλίμακα: $S = \sqrt{a^2 + b^2}$

9.1.5 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός

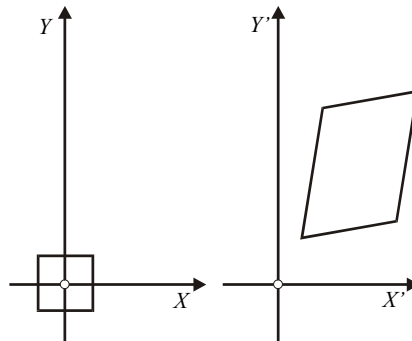
Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός (affine transformation) είναι ένας πλήρης γραμμικός μετασχηματισμός. Η ονομασία του έχει προέλθει από τους γνωστούς γεωμέτρους Moebius και Euler και ουσιαστικά υποδηλώνει ότι, σημεία που απέχουν άπειρη μεταξύ τους απόσταση εξακολουθούν και μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού να απέχουν πάλι άπειρη απόσταση. Με αυτήν την έννοια ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός διατηρεί τα πέρατα του χώρου στον οποίο εφαρμόζεται. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει ευρεία εφαρμογή και επιφέρει ομογενείς παραμορφώσεις στα γραφικά αντικείμενα που εφαρμόζεται (Σχήμα 9.5). Ο όρος ομογενείς παραμορφώσεις υποδηλώνει ότι οι συντελεστές του μετασχηματισμού είναι ανεξάρτητοι της θέσης στο χώρο που εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός. Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta_x & \sin \theta_y \\ -\sin \theta_x & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

όπου: T_x και T_y η μετάθεση,

θ_x και θ_y στροφές των αξόνων: X και Y , αντίστοιχα

S_x και S_y κλίμακες κατά τους άξονες: X και Y , αντίστοιχα.



Σχήμα 9.5 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός

Οι παράμετροι του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού είναι έξι: δύο μεταθέσεις, δύο στροφές και δύο κλίμακες (κατά τον άξονα: X και κατά τον άξονα: Y , αντίστοιχα). Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός συχνά χρησιμοποιείται με τις ακόλουθες γραμμικές σχέσεις:

$$x' = ax + by + c,$$

$$y' = dx + ey + f.$$

Οι γεωμετρικές του παράμετροι (μετάθεση, στροφές και κλίμακες) συσχετίζονται με τους συντελεστές των γραμμικών σχέσεων (a, b, c, d, e και f) από τις ακόλουθες σχέσεις:

Μετάθεση: $T_x=c$ και $T_y=f$

Στροφές: $\theta_x = \arctan\left(-\frac{d}{a}\right)$ και $\theta_y = \arctan\left(\frac{b}{e}\right)$

Κλίμακες: $S_x = \sqrt{a^2 + d^2}$ και $S_y = \sqrt{b^2 + e^2}$

Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός είναι από τους περισσότερο χρησιμοποιούμενους μετασχηματισμούς σε χαρτογραφικές εφαρμογές. Κυρίως εφαρμόζεται για τη γεωγραφική προσαρμογή δεδομένων που έχουν ψηφιοποιηθεί από υπάρχοντες αναλογικούς χάρτες.

9.1.6 Οδηγίες εφαρμογής γεωμετρικών μετασχηματισμών

Συνήθως η εφαρμογή των γεωμετρικών μετασχηματισμών γίνεται με σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι γνωστές και στα δύο συστήματα αναφοράς (πριν και μετά το μετασχηματισμό). Τότε η εφαρμογή του μετασχηματισμού επιβάλλει πρώτα τον προσδιορισμό των συντελεστών του. Εν γένει για κάθε γνωστό σημείο διαμορφώνονται δύο εξισώσεις και στις περισσότερες των περιπτώσεων έχουμε περισσότερες εξισώσεις διαθέσιμες από τον αριθμό των αγνώστων, δηλαδή τους συντελεστές του μετασχηματισμού. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι συντελεστές προσδιορίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Για λόγους βελτιστοποίησης των υπολογισμών, σε σχέση με το σφάλμα στρογγύλευσης, συνήθως οι συντεταγμένες των γνωστών σημείων ανάγονται ως προς το κέντρο βάρους τους.

Σε ορισμένες χαρτογραφικές εφαρμογές τα γραμμικά γεωμετρικά μοντέλα των μετασχηματισμών που αναλύθηκαν δεν επαρκούν για την επίλυση των προβλημάτων, τότε εφαρμόζονται πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί δευτέρου ή σπάνια τρίτου βαθμού και για την υλοποίησή τους ακολουθείται η ίδια ακριβώς διαδικασία.

9.2 Τομή ευθυγράμμων τμημάτων

Τα βασικότερα προβλήματα που σχετίζονται με τη διαχείριση των γραφικών αντικειμένων ανάγονται, στις περισσότερες περιπτώσεις, στον προσδιορισμό της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Υπάρχουν πολλές μαθηματικές εκφράσεις για

την αναλυτική αναπαράσταση της ευθείας γραμμής. Σε υπολογιστικά προβλήματα περισσότερο χρήσιμη είναι η γενικευμένη μαθηματική έκφραση της ευθείας με ομογενείς συντεταγμένες. Σύμφωνα με τη γενικευμένη μαθηματική της έκφραση μσε ομογενείς συντεταγμένες, ως ευθεία γραμμή ορίζεται το σύνολο όλων των σημείων ενός επιπέδου που ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$a x + b y + c = 0.$$

Οι συντελεστές a , b και c ορίζουν τις χωρικές ιδιότητες της ευθείας γραμμής. Έτσι, η κλίση της ευθείας, α , ορίζεται ως:

$$\alpha = -\frac{a}{b}.$$

Εάν δύο ευθείες γραμμές είναι παράλληλες, τότε έχουν την ίδια κλίση. Επιπλέον, κάθε ευθεία γραμμή τέμνει τον άξονα: Y στη θέση: β , η οποία δίνεται συναρτήσει των συντελεστών της από τη σχέση:

$$\beta = -\frac{c}{b}.$$

Η εξίσωση της ευθείας γραμμής συναρτήσει της κλίσης της δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y = \alpha x + \beta.$$

Για τις ανάγκες της αναλυτικής χαρτογραφίας προτιμάται η αξιοποίηση της γενικευμένης μαθηματικής έκφρασης με ομογενείς συντεταγμένες για την αναπαράσταση της ευθείας γραμμής, γιατί όταν ο συντελεστής b είναι ίσος με το μηδέν, τότε η κλίση της ευθείας δεν ορίζεται στη συμβατική της εξίσωση. Επιπλέον, η γενικευμένη σχέση της ευθείας επιτρέπει την έκφραση της φοράς κατά μήκος της γραμμής. Εάν μια ευθεία γραμμή διέρχεται από δύο σημεία $p(x_1, y_1)$ και $q(x_2, y_2)$, τότε οι συντελεστές (a , b και c) της γενικευμένης σχέσης της ευθείας ως προς τις συντεταγμένες των σημείων p και q δίνονται από τις σχέσεις:

$$a = y_1 - y_2,$$

$$b = x_2 - x_1 \text{ και}$$

$$c = y_2 x_1 - y_1 x_2.$$

Τα σημαντικότερα προβλήματα της αναλυτικής χαρτογραφίας σχετίζονται με προβλήματα που έχουν σχέση με ευθύγραμμα τμήματα και όχι ευθείες γραμμές. Από αυτά τα περισσότερα σχετίζονται με τον προσδιορισμό της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων τους. Εάν πράγματι, δύο ευθύγραμμα τμήματα, που ανήκουν σε ευθείες γραμμές με συντελεστές αντίστοιχα: a_1, b_1, c_1 και a_2, b_2, c_2 , τέμνονται τότε η τομή τους $\tau(\mu, \lambda)$ μπορεί να προκύψει από την επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} a_1 \mu + b_1 \lambda + c_1 &= 0 \text{ και} \\ a_2 \mu + b_2 \lambda + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

που είναι:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ και} \\ \lambda &= \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \text{ όπου: } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Όμως της επίλυσης χρειάζεται να προηγηθεί διερεύνηση με σκοπό να ελεγχθούν όλες οι ειδικές εκείνες περιπτώσεις που η τομή των ευθυγράμμων τμημάτων είτε δεν υφίσταται είτε είναι οριακή για να προσδιοριστεί σε υπολογιστικό περιβάλλον. Σε κάθε υπολογιστικό περιβάλλον όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με βάση το σφάλμα στρογγύλευσης. Το μέγεθος του σφάλματος στρογγύλευσης μπορεί να αποκτήσει γεωμετρική υπόσταση, και να θεωρηθεί ως ανοχή, σε γεωμετρικά προβλήματα που επιλύονται υπολογιστικά. Έτσι, ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία όταν η απόστασή του από αυτήν είναι μικρότερη από την ανοχή, ή δύο σημεία ταυτίζονται όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι μικρότερη της ανοχής κ.ο.κ.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την τομή δύο ευθυγράμμων τμημάτων Α και Β με άκρα τα σημεία 1, 2 και 3, 4 αντίστοιχα. Εξετάζοντας τις θέσεις των δύο άκρων (1 και 2) του πρώτου ευθυγράμμου τμήματος (Α) ως προς τα άκρα (3 και 4) του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος (Β) προκύπτουν οι ακόλουθες έξι περιπτώσεις διάταξής τους:

1. Τα άκρα 1 και 2 του Α βρίσκονται στην ίδια πλευρά του Β.
2. Το άκρο 1 βρίσκεται πάνω στην ευθεία του Β ενώ το 2 δεν βρίσκεται.
3. Τα άκρα 1 και 2 βρίσκονται πάνω στην ευθεία του Β.
4. Το άκρο 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία του Β ενώ το 1 δεν βρίσκεται.
5. Τα άκρα 1 και 2 βρίσκονται εκατέρωθεν του Β.

6. Τα άκρα του B (3 και 4) βρίσκονται τόσο κοντά μεταξύ τους ώστε δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί η αναλυτική εξίσωση της ευθείας (απέχουν τουλάχιστον όσο είναι η ανοχή).

	3&4 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Α	3 ΣΤΟ Α 4 ΟΧΙ	3&4 ΣΤΟ Α	4 ΣΤΟ Α 3 ΟΧΙ	3&4 ΕΚΑΤΕΡΩΘΕΝ ΤΟΥ Α	1&2 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ
1&2 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Β						
1 ΣΤΟ Β 2 ΟΧΙ						
1&2 ΣΤΟ Β						
2 ΣΤΟ Β 1 ΟΧΙ						
1&2 ΕΚΑΤΕΡΩΘΕΝ ΤΟΥ Β						
3&4 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ						

Σχήμα 9.6 Οι 36 ειδικές περιπτώσεις της θέσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων A και B

Ανάλογες έξι περιπτώσεις διάταξης προκύπτουν εάν εξετάσουμε τις θέσεις των δύο άκρων (3 και 4) του δεύτερου ευθυγράμμου τμήματος (B) ως προς τα άκρα (1 και 2) του πρώτου (A). Λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πιθανούς συνδυασμούς για τα δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουμε συνολικά 36 ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 9.6.

Στον Πίνακα 9.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα κάθε μιας από τις 36 (6x6) περιπτώσεις της ύπαρξης ή μη της τομής. Όπως φαίνεται από τον πίνακα 9.1 ορισμένοι συνδυασμοί των θέσεων των δύο ευθυγράμμων τμημάτων είτε

οδηγούν σε αβεβαιότητα ως προς την ύπαρξη της τομής, είτε φαίνονται αρχικά ως αδύνατοι και επισημαίνονται με ερωτηματικό (?).

Πίνακας 9.1 Η ύπαρξη ή μη της τομής για τις 36 ειδικές περιπτώσεις της θέσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων A και B

	3&4 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Α	3 ΣΤΟ Α 4 ΟΧΙ	3&4 ΣΤΟ Α	4 ΣΤΟ Α 3 ΟΧΙ	3&4 ΕΚΑΤ/ΘΕΝ ΤΟΥ Α	1&2 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ
1&2 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Β	1	1	1 (?)	1	1	1
1 ΣΤΟ Β 2 ΟΧΙ	1	$\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	$\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	$\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	$\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	$\mu=x_1$ $\lambda=y_1$
1&2 ΣΤΟ Β	1 (?)	2 (?) $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	4 επικ/ψη	2 (?) $\mu=x_4$ $\lambda=y_4$	2 (?) Μεσαίο 1&2	4 $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$
2 ΣΤΟ Β 1 ΟΧΙ	1 (?)	2 $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	2 (?) $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	2 $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	2 $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	2 (?) $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$
1&2 ΕΚΑΤ/ΘΕΝ ΤΟΥ Β	1 (?)	2 $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	2 (?) μεσαίο 3&4	2 $\mu=x_4$ $\lambda=y_4$	3 τυπική τομή	3 (?) μεσαίο 1&2
3&4 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ	1 (?)	2 (?) $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	2 $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	2 (?) $\mu=x_4$ $\lambda=y_4$	3 (?) Μεσαίο 3&4	2 $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$

- 1: Τα ευθύγραμμα τμήματα δεν τέμνονται μεταξύ των άκρων τους.
- 2: Το άκρο του ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκει στην ευθεία του άλλου ευθύγραμμου τμήματος.
- 3: Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται κανονικά.
- 4: Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ανήκουν στην ίδια ευθεία και επικαλύπτονται.

Όμως, η επεξεργασία προσδιορισμού της τομής γίνεται με πεπερασμένες αριθμητικές παραστάσεις και παρόλο που ορισμένες περιπτώσεις πιθανά να εμφανίζονται σπάνια θα πρέπει να αντιμετωπίζονται αλγοριθμικά. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν το άκρο 1 του Α να ανήκει την ευθεία που διέρχεται

από το B και το άκρο 2 να μην ανήκει σε αυτήν ενώ ταυτόχρονα τα άκρα 3 και 4 του B να ανήκουν στην ευθεία που διέρχεται από το A; Κάτι τέτοιο φαίνεται κατ' αρχήν ως αδύνατο και η απάντηση θα έπρεπε να είναι αρνητική. Όμως η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι τελικά καταφατική, αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς που προέρχονται από το σφάλμα στρογγύλευσης των υπολογισμών. Επιπλέον, ακόμα και εάν τα ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται ο προσδιορισμός της τομής δεν είναι πάντα εύκολος. Είναι πιθανόν οι κλίσεις των δύο ευθυγράμμων τμημάτων να είναι σχεδόν παρόμοιες οπότε ο αριθμητικός υπολογισμός των συντεταγμένων της τομής καθίσταται πρακτικά αδύνατος. Τέλος, η αλγοριθμική αντιμετώπιση του προβλήματος της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων, εκτός των άλλων παραγόντων που αναλύθηκαν διεξοδικά, θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη και την ταχύτητα της επεξεργασίας των υπολογισμών. Εν γένει, καταβάλλεται κάθε δυνατή προσπάθεια με σκοπό να μεγιστοποιηθεί η ταχύτητα των υπολογισμών.

Ο προσδιορισμός της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων, όπως αναλύθηκε, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του γεγονότος ότι η αλγοριθμική αντιμετώπιση εύκολων αναλυτικών προβλημάτων στην πραγματικότητα είναι μια σύνθετη και πολύπλοκη διαδικασία. Αν αναλογιστούμε ότι, σε ένα λογισμικό διαχείρισης χωρικών δεδομένων (ΣΓΠ), ο αντίστοιχος αλγόριθμος καταλαμβάνει κυρίαρχη θέση, τότε η αποτελεσματικότητα του λογισμικού ουσιαστικά κρίνεται από την πληρότητα της διερεύνησης και την ταχύτητα επίλυσης του συγκεκριμένου αριθμητικού προβλήματος.

9.3 Χωρικές ιδιότητες διακριτών σημείων

Στην ενότητα αυτή εξετάζονται τρεις χρήσιμες χωρικές ιδιότητες ενός συνόλου διακριτών σημείων. Οι ιδιότητες αυτές αναφέρονται στον προσδιορισμό του βαρύκεντρου και στην εκτίμηση της τυπικής απόστασης ενός συνόλου σημείων, στην ανίχνευση της θέσης ενός σημείου ως προς το εάν βρίσκεται εντός ή εκτός ενός κυρτού ή μη κυρτού πολυγώνου και στο διάγραμμα Voronoi (πολύγωνα Thiessen).

9.3.1 Βαρύκεντρο

Σε πολλές χαρτογραφικές εφαρμογές χρειάζεται να αντικατασταθεί ένα σύνολο σημείων, που αντιπροσωπεύουν μια σημειακή κατανομή χωρικών οντοτήτων, από ένα μόνο σημείο. Για παράδειγμα, ζητείται να αντικατασταθεί ο πληθυσμός όλων των πόλεων της χώρας, που εκφράζεται από τον αριθμό των κατοίκων και τη θέση της κάθε πόλης, από ένα αντιπροσωπευτικό σημείο στο οποίο

συγκεντρώνεται το σύνολο του πληθυσμού. Το καταλληλότερο σημείο είναι το **βαρύκεντρο** (κέντρο βάρους) των θέσεων όλων των πόλεων. Το βαρύκεντρο, ως θέση, προσδιορίζεται από τη μέση τιμή των συντεταγμένων του συνόλου των σημείων. Στον προσδιορισμό του βαρυκέντρου η τιμή του φαινομένου, στο παράδειγμα: ο πληθυσμός, συμμετέχει ως συνάρτηση βάρους. Έτσι, θεωρώντας ότι το χωρικό φαινόμενο εκφράζεται από n σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι (x_i, y_i) , για: $i=1, 2, \dots, n$ και η τιμή του χωρικού φαινομένου σε αυτά είναι: w_i , τότε το βαρύκεντρο προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Με το βαρύκεντρο, όπως προσδιορίζεται από την παραπάνω σχέση ως μέση τιμή των συντεταγμένων, ερμηνεύεται γεωμετρικά η συγχώνευση μιας σημειακής κατανομής χωρικών οντοτήτων σε ένα μόνο σημείο.

9.3.2 Τυπική απόσταση

Με το βαρύκεντρο γίνεται συγχώνευση μιας σημειακής κατανομής χωρικών οντοτήτων δια μέσου του προσδιορισμού της μέσης τιμής των συντεταγμένων των θέσεων. Με την ίδια λογική μπορεί να υπολογιστούν οι τυπικές αποκλίσεις των συντεταγμένων ως έκφραση της διασποράς των θέσεων. Οι τυπικές αποκλίσεις των συντεταγμένων (s_x και s_y) ενός συνόλου σημείων δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{και} \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}.$$

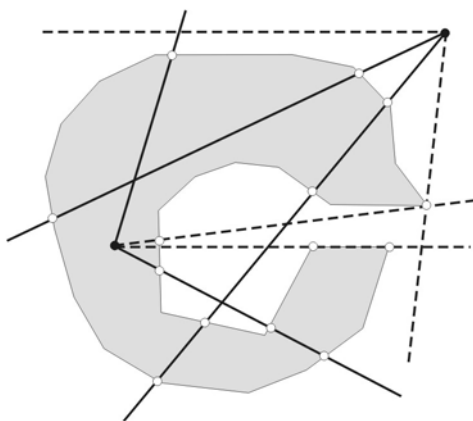
Στη συνέχεια, από τις τυπικές αποκλίσεις των θέσεων των σημείων μπορεί να προσδιοριστεί η **τυπική απόσταση** (d_s) μιας σημειακής κατανομής χωρικών οντοτήτων, με την ακόλουθη σχέση:

$$d_s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}.$$

Η τυπική απόσταση εκφράζει τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της διασποράς ενός συνόλου σημείων που αντιπροσωπεύουν τις θέσεις μιας χωρικής κατανομής σημειακών οντοτήτων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ποσοτικό κριτήριο της χωρικής τους προσέγγισης.

9.3.3 Ανίχνευση σημείου ως εντός/εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου

Μεγάλος αριθμός αναλυτικών προβλημάτων της χαρτογραφίας καταλήγει στην ανάγκη ανίχνευσης της σχετικής θέσης ενός σημείου ως προς ένα πολύγωνο (κυρτό ή μη-κυρτό). Το γεωμετρικό αυτό πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια αλγορίθμων, οι οποίοι βασίζονται στον προσδιορισμό της ιδιότητας του πολυγώνου να είναι περιγεγραμμένο (σημείο εκτός πολυγώνου) ή εγγεγραμμένο (σημείο εντός πολυγώνου) σε κύκλο. Οι αλγόριθμοι αυτοί έχουν περιορισμένες δυνατότητες εφαρμογής σε αναλυτικά χαρτογραφικά προβλήματα λόγω της πολύπλοκης μορφής των χωρικών οντοτήτων. Η καλύτερη αντιμετώπιση στο γεωμετρικό αυτό πρόβλημα επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός απλού αλγορίθμου, ο οποίος στηρίζεται στο θεώρημα του Jourdan. Σύμφωνα με το θεώρημα του Jourdan, μια ημιευθεία που διέρχεται από σημείο εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου τέμνει το πολύγωνο σε άρτιο αριθμό σημείων, ενώ μια ημιευθεία που διέρχεται από σημείο εντός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου τέμνει το πολύγωνο σε περιττό αριθμό σημείων (Σχήμα 9.7).



Σχήμα 9.7 Σημείο εντός/εκτός πολυγώνου

Το θεώρημα αυτό παρέχει τη δυνατότητα σχεδιασμού ενός σταθερού αλγορίθμου για την αντιμετώπιση του προβλήματος, με την εξαίρεση δύο μόνων περιπτώσεων. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο, να διέρχεται και από κορυφή του περιγράμματος του πολυγώνου, είτε να είναι παράλληλη προς μια πλευρά του. Οι εξαιρέσεις αυτές μπορούν να εντοπισθούν με ειδική διερεύνηση

και να αντιμετωπισθούν με ευκολία. Επιπλέον, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι από κάποιο σημείο και μετά, ο αλγόριθμος της ανίχνευσης ενός σημείου ως προς το εάν κείται εντός ή εκτός ενός πολυγώνου, ανάγεται στο πρόβλημα προσδιορισμού της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων, το οποίο αναλύθηκε στην ενότητα 9.2.

9.3.4 Διάγραμμα Voronoi

Το διάγραμμα Voronoi ενός συνόλου γραφικών αντικειμένων S , δηλαδή $S = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ όπου $n \geq 3$, που απαρτίζονται από σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα, διαμερίζει το επίπεδο με βάση το νόμο της **εγγύτερης απόστασης**. Σύμφωνα με το νόμο της εγγύτερης απόστασης σε κάθε στοιχείο του συνόλου των γραφικών αντικειμένων l_i , που ονομάζεται γενέτειρα του διαγράμματος Voronoi, αντιστοιχεί η εγγύτερη σε αυτό περιοχή. Ως **διάμεσος** B_{ij} , ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$B_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, l_i) = d(x, l_j)\},$$

όπου: d η απόσταση μεταξύ ενός σημείου του επιπέδου και ενός γραφικού αντικειμένου.

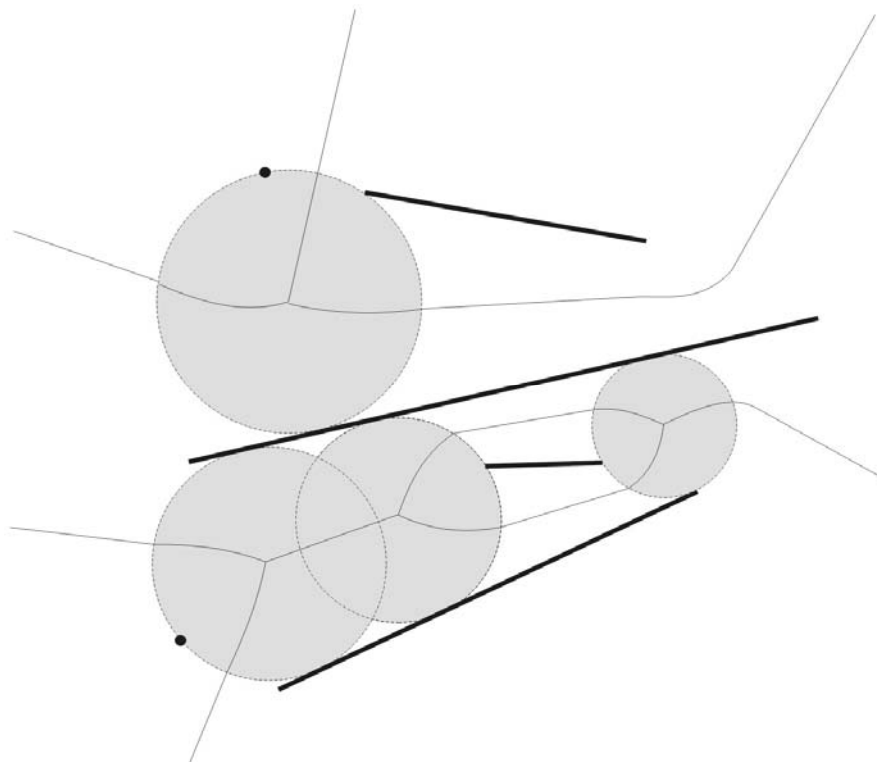
Η διάμεσος δύο γραφικών αντικειμένων l_i και l_j είναι μια παραγωγίσιμη καμπύλη και συντίθεται από ευθύγραμμα τμήματα και παραβολές. Η **περιοχή Voronoi** v_i μιας γενέτειρας l_i , ή αλλιώς το πολύγωνο Thiessen, ορίζεται ως:

$$v_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, l_i) \leq d(x, l_j) \forall j\}.$$

Οι κορυφές των περιοχών Voronoi, δηλαδή τα μη παραγωγίσιμα σημεία του περιγράμματος των περιοχών, ονομάζονται **σημεία Voronoi** και οι διάμεσοι **ακμές Voronoi**. Τέλος, το **διάγραμμα Voronoi** $V(S)$, συντίθεται από τα δημιουργούμενα πολύγωνα. Στο Σχήμα 9.8 απεικονίζεται το διάγραμμα Voronoi έξι γραφικών αντικειμένων, που απαρτίζονται από ευθύγραμμα τμήματα και σημεία.

Στα περισσότερα λογισμικά πακέτα διαχείρισης χωρικών δεδομένων (Σ.Γ.Π.), περιέχονται αλγόριθμοι υπολογισμού των πολυγώνων Voronoi. Έχει αποδειχθεί, ότι το διάγραμμα Voronoi μπορεί να αξιοποιηθεί ως εργαλείο αναπαράστασης και διατήρησης των τοπολογικών σχέσεων μεταξύ των γραφικών αντικειμένων ενός ψηφιακού χάρτη. Επιπλέον, με τη βοήθεια του διαγράμματος Voronoi απλοποιούνται ως προς την αντιμετώπιση ορισμένα από τα παραδοσιακά ερωτήματα (queries), που υποβάλλονται σε ένα σύστημα διαχείρισης χωρικών

δεδομένων. Τέλος, με τη βοήθεια του διαγράμματος Voronoi, αντιμετωπίζεται με αποτελεσματικό τρόπο το πρόβλημα της ποσοτικής έκφρασης του μέτρου της εγγύτητας (proximity) μεταξύ διακριτών γραφικών αντικειμένων.



Σχήμα 9.8 Διάγραμμα Voronoi

9.4 Τοπολογικές απεικονίσεις

Οι ανάγκες ανάπτυξης εύληπτων μεθόδων απόδοσης, ειδικότερα σε περιπτώσεις θεματικών χαρτών, οδήγησαν τους χαρτογράφους στην επινόηση εξειδικευμένων χαρτογραφικών απεικονίσεων με τις οποίες ο χώρος μετασχηματίζεται τοπολογικά με αναφορά το αποδιδόμενο μέγεθος μιας χωρικής οντότητας ή παραμορφώνεται με βάση ένα φυσικό νόμο. Στις περιπτώσεις αυτές ο γεωγραφικός χώρος παύει να έχει τη συμβατική του σημασία και ουσιαστικά «αντιπροσωπεύει» το ίδιο το χωρικό φαινόμενο.

Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί το χαρτόγραμμα, ειδική μέθοδος θεματικής απεικόνισης, όπου η έκταση των απεικονιζόμενων περιοχών δεν αντιστοιχεί με το πραγματικό τους εμβαδόν αλλά την τιμή του απεικονιζόμενου μεγέθους. Στην ίδια φιλοσοφία έχουν επινοηθεί απεικονίσεις με τις οποίες ο

χώρος μετασχηματίζεται με βάση ένα φυσικό μέγεθος ή ιδιότητα, για παράδειγμα το χρόνο μιας μετακίνησης, ή οικονομικά μεγέθη, όπως είναι το κόστος μιας μετακίνησης ή άλλων υπηρεσιών. Τέλος, με αφετηρία την ευκολία εφαρμογής αναλυτικών μετασχηματισμών δια μέσου της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών, έχουν αναπτυχθεί τρόποι παραμόρφωσης του γεωγραφικού χώρου με βάση φυσικούς νόμους –για παράδειγμα, με εφαρμογή λογαριθμικής κλίμακας-γύρω από ένα σημείο (εστιακές απεικονίσεις) ή γύρω από περισσότερα του ενός σημεία (πολυ-εστιακές απεικονίσεις). Οι εστιακές και πολυ-εστιακές απεικονίσεις παραμορφώνουν το χάρτη με τρόπο που ομοιάζει με την τοποθέτηση επάνω σε αυτόν ενός ή περισσότερων μεγεθυντικών φακών σε προεπιλεγμένες θέσεις, τα εστιακά σημεία. Μετά το μετασχηματισμό ο χώρος γύρω από τα προεπιλεγμένα σημεία, τα εστιακά σημεία, παρέχει τη δυνατότητα τοποθέτησης μεγάλου αριθμού επιπλέον συμβόλων.

9.4.1 Αξιμουθιακή ισόχρονη απεικόνιση

Στηριζόμενη στη συλλογιστική ενός τοπολογικά μετασχηματισμένου χώρου για τις ανάγκες της χαρτογραφικής απεικόνισης έχουν κατασκευαστεί χάρτες, βασισμένοι στην πλάγια αξιμουθιακή ισαπέχουσα απεικόνιση (Hatt), μετασχηματίζοντας το γεωγραφικό χώρο σε χρόνο. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **ισόχρονη αξιμουθιακή απεικόνιση** και ορίζεται από τις σχέσεις:

$$x' = t \sin \alpha \text{ και}$$

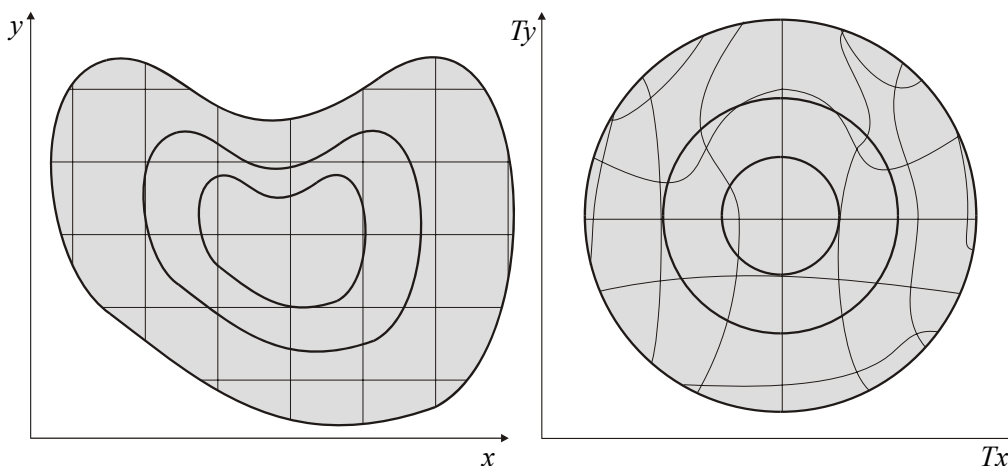
$$y' = t \cos \alpha,$$

όπου: (x', y') οι συντεταγμένες ενός σημείου (x, y) μετά το μετασχηματισμό, t η διάρκεια της μετακίνησης και α η γωνία διεύθυνσης που δίνεται από την ακόλουθη σχέση, ως προς τον πόλο (x_0, y_0) , δηλαδή της αφετηρία των μετακινήσεων που αποτελεί και το κέντρο της απεικόνισης:

$$\alpha = \arctan \frac{x - x_0}{y - y_0}.$$

Με την ισόχρονη αξιμουθιακή απεικόνιση οι κλασικές ισόχρονες καμπύλες (Σχήμα 9.9 – αριστερά) μετασχηματίζονται σε ομόκεντρους κύκλους (Σχήμα 9.9 – δεξιά) με κέντρο τον πόλο της απεικόνισης. Στην τοπολογική αυτή απεικόνιση ο γεωγραφικός χώρος δεν έχει τη συμβατική του σημασία, με εξαίρεση τις γωνίες διεύθυνσης που διατηρούνται αναλλοίωτες. Για παράδειγμα, η διεύθυνση του «βορρά» δεν έχει τη φυσική σημασία του γεωγραφικού βορρά σε όλες τις θέσεις. Παρ' όλα αυτά ο γεωγραφικός χώρος εύληπτα και αποτελεσματικά «αντικαθιστάται» από το χρόνο μιας μετακίνησης. Ως άμεση

συνέπεια της αρχής της απεικόνισης μπορεί δύο γεωγραφικά γειτονικές θέσεις να απεικονίζονται με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, λόγω διαφορετικής διάρκειας της μετακίνησης με τα διαθέσιμα μέσα μεταφοράς, ή και το αντίθετο. Έτσι, ο χρήστης ενός ανάλογου χάρτη μπορεί να αντλήσει εύκολα και γρήγορα πληροφορίες για τη διάρκεια των μετακινήσεων στο γεωγραφικό χώρο. Με ανάλογο τρόπο έχουν επινοηθεί μέθοδοι απόδοσης κατασκευάζοντας τοπολογικές απεικονίσεις ίσου-κόστους κοκ.



Σχήμα 9.9 Παράδειγμα μετασχηματισμού ισαριθμικής απεικόνισης σε ισόχρονη αζιμουθιακή απεικόνιση

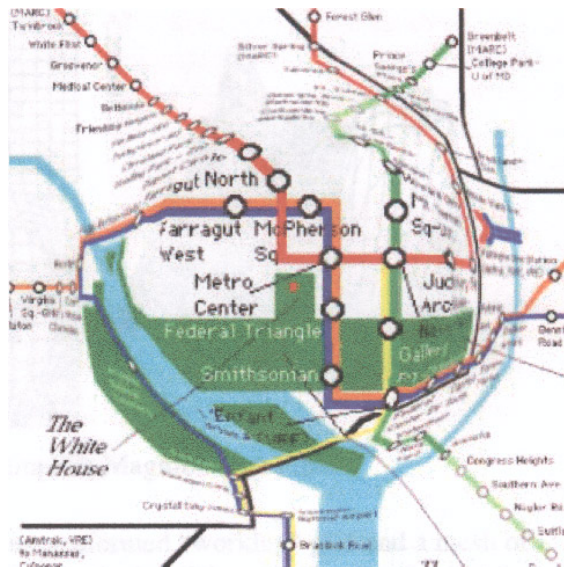
9.4.2 Εστιακές απεικονίσεις

Η ανάγκη για την επινόηση χαρτογραφικών αναπαραστάσεων που μεγεθύνουν τοπικά μια ιδιότητα του χάρτη, για παράδειγμα τη γραμμική κλίμακα, γύρω από ένα σημείο του γεωγραφικού χώρου, οδήγησε στη διαμόρφωση των **εστιακών απεικονίσεων**. Κλασικά παραδείγματα εστιακών απεικονίσεων αποτελούν εφαρμογές απεικονίσεων με λογαριθμική ή παραβολική μεταβολή της κλίμακας γύρω από ένα κεντρικό σημείο, το οποίο ονομάζεται **εστιακό σημείο**. Οι εστιακές απεικονίσεις χρησιμοποιούνται για την απόδοση μιας αστικής περιοχής αναπαριστώντας την περιοχή γύρω από το κέντρο της με μεγαλύτερη κλίμακα από αυτήν της περιφέρειας. Η εικόνα του γεωγραφικού χώρου με εφαρμογή αυτής της κατηγορίας των απεικονίσεων ομοιάζει με την παραμόρφωση που επιφέρουν υπερ-ευρυγώνιοι (fish-eye) φακοί (Σχήμα 9.10).

Ας θεωρήσουμε ότι S_0 είναι η γραμμική κλίμακα του χάρτη στο εστιακό σημείο, R η απόσταση ενός σημείου P του χάρτη από αυτό και $f(R)$ η συνάρτηση της απόστασης που περιγράφει την επίδραση της επιθυμητής παραμόρφωσης του

χάρτη γύρω από το εστιακό σημείο, τότε η γραμμική κλίμακας σε ακτινική διεύθυνση S , ως προς την απόσταση R , στην εστιακή απεικόνιση θα δίνεται από τη σχέση:

$$S = S_0 + S_0 f(R).$$



Σχήμα 9.10 Παράδειγμα θεματικού χάρτη σε εστιακή απεικόνιση

Για τη γραμμική κλίμακα S , θα πρέπει:

- Να μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση R .
- Να έχει πεπερασμένη τιμή και να διατηρεί τη συνέχεια της στο εστιακό σημείο, εκεί όπου $R=0$.

Έτσι, η συνάρτηση της απόστασης θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$f(R) = \frac{a}{b + c R^{(d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + e_1 u + e_2 u^2 + \dots)}},$$

όπου: τα a , b , c , d_i και e_i (για $i=0, 1, 2, \dots$) αποτελούν εμπειρικούς συντελεστές που αναπαριστούν τους παράγοντες επιρροής της ιδιότητας ή του φαινομένου με βάση το οποίο επιθυμούμε να μεταβάλλεται η γραμμική κλίμακα.

Επομένως, οι μεταβλητές t και u μπορούν να αναπαριστούν μεγέθη όπως είναι ο χρόνος ή το κόστος, αντίστοιχα. Ας περιοριστούμε όμως στη συνέχεια στην ανάπτυξη της εστιακής απεικόνισης με βάση μία μόνο μεταβλητή.

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με έναν από τους συντελεστές, για παράδειγμα τον εμπειρικό συντελεστή b , αυτή απλοποιείται στην ακόλουθη μορφή:

$$f(R) = \frac{A}{1 + C R^{(d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots)}}, \text{ όπου: } A = \frac{a}{b} \text{ και } C = \frac{c}{b}.$$

Ας επιχειρήσουμε, λοιπόν, να διαμορφώσουμε τις σχέσεις μιας εστιακής απεικόνισης, για την οποία η γραμμική κλίμακα να μεταβάλλεται με το τετράγωνο της απόστασης από το εστιακό σημείο, δηλαδή $d_0=2$ και $d_i=0$ (με $i=1, 2, \dots$). Ως αποτέλεσμα έχουμε μια συνάρτηση της απόστασης $f(R)$ με την ακόλουθη απλή μορφή:

$$f(R) = \frac{A}{1 + C R^2}.$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση της απόστασης ορίζεται πλήρως στο εστιακό σημείο, όπου $R=0$, δηλαδή με την εφαρμογή της δεν παρουσιάζονται προβλήματα ασυνέχειας. Θεωρώντας ότι, η τιμή της γραμμικής κλίμακας στο εστιακό σημείο είναι $S_0=1$ και με σκοπό την απλούστευση των υπολογισμών, με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης σε αυτήν που ορίζει τη γραμμική κλίμακα σε ακτινική διεύθυνση S , θα έχουμε:

$$S = 1 + \frac{A}{1 + C R^2}.$$

Με δεδομένο ότι, η γραμμική κλίμακα μεταβάλλεται με συνέχεια και ακτινικά ως προς το εστιακό σημείο της απεικόνισης, η ακτινική απόσταση μετά το μετασχηματισμό r θα συσχετίζεται με την αρχική απόσταση R από την ακόλουθη σχέση:

$$r = S R.$$

Επομένως, η ακτινική απόσταση μετά το μετασχηματισμό είναι συνάρτηση της αρχικής απόστασης και των συντελεστών του μετασχηματισμού:

$$r = R + \frac{A R}{1 + C R^2}.$$

Εάν εξετάσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τους εμπειρικούς συντελεστές της εστιακής απεικόνισης, ο A ουσιαστικά εκφράζει την “ισχύ” της επιρροής του

εστιακού σημείου σε αυτήν και ο C το ρυθμό της ακτινικής μεταβολής της γραμμικής κλίμακας.

Εάν (x_0, y_0) είναι οι συντεταγμένες του εστιακού σημείου στον αρχικό χάρτη η ακτινική απόσταση R ενός σημείου $P(x, y)$, ως προς αυτήν, δίνεται από τη σχέση:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Οι συντεταγμένες ενός σημείου $P(x, y)$, ως προς τις συντεταγμένες του εστιακού σημείου (x_0, y_0) , θα δίνονται από τη σχέση:

$$x = x_0 + R \sin \alpha = x_0 + dx \text{ και}$$

$$y = y_0 + R \cos \alpha = y_0 + dy,$$

όπου α η γωνία διεύθυνσης, δηλαδή:

$$\alpha = \arctan \frac{x - x_0}{y - y_0}.$$

Στη μετασχηματισμένη εστιακή απεικόνιση κάθε σημείο P απεικονίζεται σε νέα θέση P' ως προς τον αρχικό χάρτη, που οι συντεταγμένες (x', y') , λαμβάνοντας υπόψη τη μετασχηματισμένη ακτινική απόσταση r , θα είναι:

$$x' = x_0 + r \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = y_0 + r \cos \alpha.$$

Είναι προφανές ότι, στην εστιακή απεικόνιση είναι επιθυμητό οι γωνίες διεύθυνσης να διατηρούνται αναλλοίωτες. Με αντικατάσταση της σχέσης μεταξύ της μετασχηματισμένης r και της αρχικής ακτινικής απόστασης R , έχουμε:

$$x' = x_0 + \left(R + \frac{AR}{1 + CR^2} \right) \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = y_0 + \left(R + \frac{AR}{1 + CR^2} \right) \cos \alpha,$$

ή:

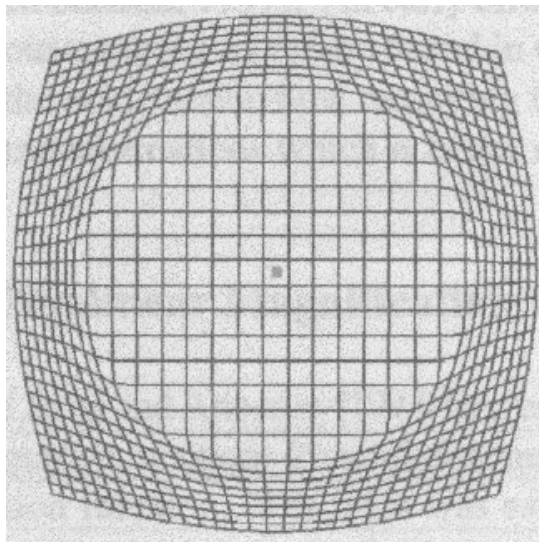
$$x' = x_0 + R \sin \alpha + \frac{AR}{1 + CR^2} \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = y_0 + R \cos \alpha + \frac{AR}{1 + CR^2} \cos \alpha,$$

Επειδή όμως ισχύει:

$$R \sin \alpha = x - x_0 = dx \text{ και}$$

$$R \cos \alpha = y - y_0 = dy.$$



Σχήμα 9.11 Παραμόρφωση κανάβου από εστιακή απεικόνιση

Με αντικαταστάσεις τελικά έχουμε τις σχέσεις που ορίζουν τη συγκεκριμένη εστιακή απεικόνιση:

$$x' = x + \frac{A dx}{1 + C R^2} = x + \Delta x \text{ και}$$

$$y' = y + \frac{A dy}{1 + C R^2} = y + \Delta y.$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού που αναπτύχθηκε, ολόκληρος ο αρχικός χάρτης μπορεί να απεικονιστεί γύρω από ένα εστιακό σημείο, με τρόπο τέτοιο ώστε η γραμμική κλίμακα να ακολουθεί έναν επιθυμητό νόμο. Στο Σχήμα 9.11 παρουσιάζεται η παραμόρφωση που επιφέρει σε ένα τετραγωνικό κάνναβο μια εστιακή απεικόνιση γύρω από το εστιακό σημείο.

9.4.3 Πολυ-εστιακές απεικονίσεις

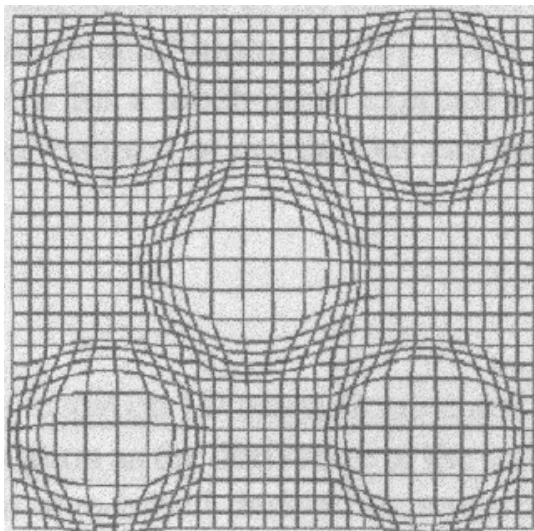
Οι πολυ-εστιακές απεικονίσεις προκύπτουν, ως γενίκευση της έννοιας των εστιακών απεικονίσεων, όταν ενδιαφερόμαστε να αποδώσουμε μια χωρική

κατανομή που επηρεάζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό εστιακών σημείων. Με τις πολυ-εστιακές απεικονίσεις γίνεται η παραδοχή ότι σε κάθε σημείο του χάρτη η τιμή της γραμμικής κλίμακας προέρχεται από το άθροισμα των επαγωγικών επιδράσεων κάθε εστίας ξεχωριστά.

Οι σχέσεις της εστιακής απεικόνισης που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα παρατηρείται ότι συντίθενται από τις συντεταγμένες (x, y) κάθε σημείου του αρχικού χάρτη και από μία επαύξηση $(\Delta x$ και $\Delta y)$, η οποία εξαρτάται από την ακτινική απόσταση από το εστιακό σημείο R και τους εμπειρικούς συντελεστές A και C του μετασχηματισμού. Επομένως, για n εστιακά σημεία θα έχουμε:

$$x' = x + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = x + \sum_{i=1}^n \Delta x_i \text{ και}$$

$$y' = y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_n = y + \sum_{i=1}^n \Delta y_i.$$



Σχήμα 9.12 Παραμόρφωση κανάβου από πολύ-εστιακή απεικόνιση

Αν θεωρήσουμε, λοιπόν, n εστιακά σημεία με συντεταγμένες (x_i, y_i) , με $i=1, 2, \dots, n$, και τους εμπειρικούς συντελεστές A_i και C_i , οι σχέσεις της πολυεστιακής απεικόνισης και οι ακτινικές αποστάσεις R_i από τα εστιακά σημεία θα έχουν ως ακολούθως:

$$x' = x + \sum_{i=1}^n \frac{A_i (x - x_i)}{1 + C_i R_i^2} \text{ και}$$

$$y' = y + \sum_{i=1}^n \frac{A_i (y - y_i)}{1 + C_i R_i^2},$$

όπου:

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Στο Σχήμα 9.12 απεικονίζεται η παραμόρφωση που επιφέρει σε ένα τετραγωνικό κάβναβο μια πολυ-εστιακή απεικόνιση με πέντε εστιακά σημεία.

9.5 Βιβλιογραφία

- Boutoura, Ch. "Logarithmic Urban Thematic Mapping in MIS Environment". *Cartographica*, Vol. **31**, No. **1**, 1994, pp. 41-53.
- Boutoura, Ch., E. Livieratos and P. Patias. "Focal Photomaps for Urban Use". *Proceedings of 19th International Cartographic Conference*, International Cartographic Association, Ottawa, 1999, pp. 1489-1496.
- Clarke, K. C. *Analytical and Computer Cartography*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990, p. 290.
- Cromley, R. G. *Digital Cartography*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992, p. 317.
- Douglas, D. "It makes me so CROSS". In: *Introductory Readings in geographic Information Systems*. (Eds. D. J. Peuquet and D. F. Marble), Taylor & Francis, London, 1990, pp. 303-307.
- Gold, Ch., P. R. Remmele and Th. Roos. "Voronoi Methods in GIS". In *Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems* (Eds. M. van Frevel, J. Nievergelt, Th. Roos and P. Widmayer). Springer-Verlag, Berlin, pp. 21-35.
- Kadmon, N. and E. Shlomi, "A Polyfocal Projection for Statistical Surfaces". *The Cartographic Journal*, Vol. **15**, No. **1**, 1978, pp. 36-41.
- Καρράς, Γ. "Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στην Φωτογραμμετρία". Εκπαιδευτικές Σημειώσεις. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1995, σελ. 30.
- Keahey, T. A. "Area-Normalized Thematic Views". *Proceedings of 19th International Cartographic Conference*, International Cartographic Association, Ottawa, 1999, pp. 859-868.

- Klein, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*. (Translated by E. R. Hedrick and C. A. Noble), Dover Pub., New York, 1939, p. 214.
- Νάκος, Β. και Β. Φιλιππακοπούλου. "Θεματική απεικόνιση τοπολογικά μετασχηματισμένου οδικού δικτύου με αυτόματη διαδικασία". Διήμερη Επιστημονική Συνάντηση: *Θεματικοί Χάρτες και Καταγραφές στην Οικιστική Ανάπτυξη*, Φωτογραμμετρική Εταιρία Ελλάδος, Αθήνα, 1982.
- Νάκος, Β. "Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών φαινομένων βασισμένη στη θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας". Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1990, σελ. 200.
- Snyder, J. P. "'Magnifying-Glass' Azimuthal Map Projections". *The American Cartographer*, Vol. 14, No. 1, 1987, pp. 61-68.

Κεφάλαιο 10

10. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

10.1 Εισαγωγή

Είναι γενικά αποδεκτή η διαπίστωση ότι η γενίκευση αποτελεί μια πολύπλοκη χαρτογραφική διεργασία με στόχους που ακόμα και σήμερα δεν έχουν οριστεί με ολοκληρωμένο και κατηγορηματικό τρόπο, λόγω των υποκειμενικών παραγόντων που την καθορίζουν. Οι χαρτογράφοι, στην προσπάθεια διεξοδικής αντιμετώπισης των ανοικτών προβλημάτων της γενίκευσης εκτός από τις αλγοριθμικές τεχνικές έχουν επιστρατεύσει μεθόδους που βασίζονται στην αναπαράσταση της γνώσης και στα συστήματα που υποστηρίζουν τη λήψη αποφάσεων.

Στην ενότητα αυτή γίνεται ανάλυση των αρχών που διέπουν τη γενίκευση χωρικών δεδομένων και των αλγορίθμων με τη βοήθεια των οποίων εφαρμόζεται η γενίκευση. Πρώτα εισάγονται οι αρχές και οι έννοιες που πλαισιώνουν τη γενίκευση. Στη συνέχεια, περιγράφονται οι σημαντικότεροι αλγόριθμοι απλοποίησης γραμμών και καταγράφονται τα κυριότερα προβλήματα των μεθόδων της γενίκευσης γραμμών. Τέλος, εξετάζονται δυνατοί τρόποι αντιμετώπισης των λειτουργικών μειονεκτημάτων που παρουσιάζουν ορισμένοι από τους χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους γενίκευσης.

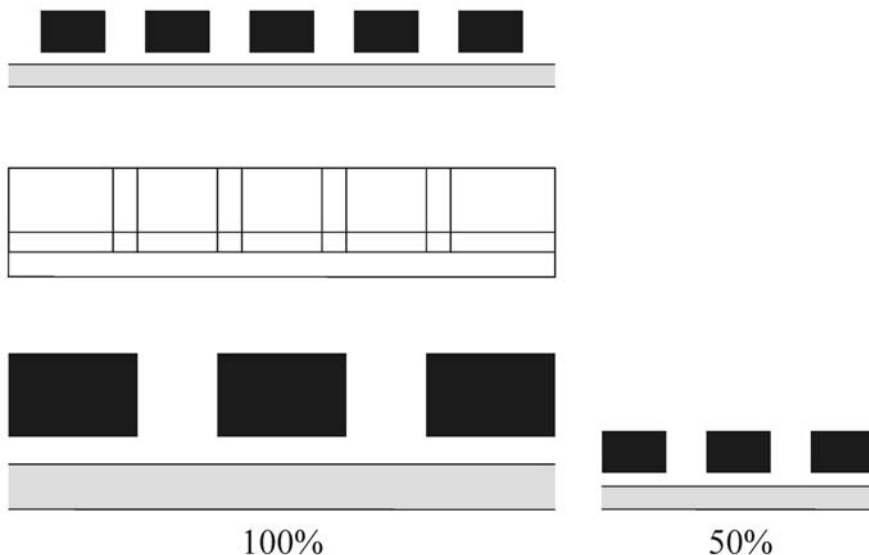
10.2 Βασικά στοιχεία της γενίκευσης

10.2.1 Το πρόβλημα αλλαγής της κλίμακας

Παραδοσιακά, τα χωρικά φαινόμενα απεικονίζονται σε χάρτες που διαφέρουν ως προς την κλίμακα και το σκοπό (για παράδειγμα, τοπογραφικοί, γεωλογικοί, τουριστικοί, οδικοί κα. χάρτες). Οι εθνικές σειρές των τοπογραφικών χαρτών της χώρας παράγονται σε ένα εκτεταμένο εύρος κλιμάκων, το οποίο περιλαμβάνει τις κλίμακες: 1:25.000, 1:50.000, 1:100.000, 1:250.000, 1:500.000 και 1:1.000.000.

Παρατηρώντας τις διάφορες κλίμακες, βλέπουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις οι αλλαγές είναι τέτοιες ώστε σε κάθε σειρά χαρτών η κλίμακα να είναι ίση με το ήμισυ της εκάστοτε προηγούμενης. Ταυτόχρονα, σε κάθε φύλλο χάρτη μιας σειράς απεικονίζεται έκταση ίση με το τετραπλάσιο της έκτασης του φύλλου της προηγούμενης σειράς. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στο γεγονός ότι η γενίκευση καλείται να αντιμετωπίσει, σε κάθε παράγωγη κλίμακα, την απεικόνιση ενός μέρους της πληροφορίας του αρχικού χάρτη στο ένα τέταρτο του χώρου.

Επιπρόσθετα καθώς η κλίμακα του χάρτη μειώνεται, ορισμένα από τα χαρτογραφικά σύμβολα με μικρό σχετικά μέγεθος πλησιάζουν τα όρια της οπτικής αντίληψης. Τα όρια της οπτικής αντίληψης, με τη σειρά τους, καθορίζουν τις ελάχιστες διαστάσεις των συμβόλων. Για παράδειγμα, ένα συμπαγές μαύρο τετράγωνο, που συμβολίζει τη χωρική οντότητα ενός κτιρίου, θα πρέπει να έχει διαστάσεις τουλάχιστον ίσες με 0.35mm στο χάρτη ή δύο παράλληλες γραμμές, που συμβολίζουν ένα δρόμο, θα πρέπει να απέχουν το πολύ 0.25mm στο χάρτη. Έτσι κάθε σύμβολο του παράγωγου χάρτη, του οποίου οι διαστάσεις προκύπτουν μικρότερες από αυτές που ορίζουν τα όρια της οπτικής αντίληψης και είναι απαραίτητο να αποδοθεί, θα πρέπει να μεγεθύνεται ώστε να είναι οπτικά αναγνώσιμο. Για παράδειγμα, σε ένα χάρτη κλίμακας 1:100.000, όλα τα κτίρια που έχουν πλευρές μικρότερες από 35m, σχεδόν το σύνολο των τυπικών κατοικιών, θα πρέπει να μεγεθυνθούν μέχρι αυτό το ελάχιστο μέγεθος. Το ίδιο πρόβλημα εμφανίζεται με την απόδοση της χωρικής οντότητας των δρόμων, θεωρώντας ότι οι περισσότεροι δρόμοι είναι στενότεροι από 25m.



Σχήμα 10.1 Η ανάγκη της μετάθεσης και μεγέθυνσης των συμβόλων στη γενίκευση

Συνοψίζοντας τις παραπάνω επισημάνσεις, προκύπτει ως συμπέρασμα ότι ο χαρτογράφος καλείται να αντιμετωπίσει δύο αλληλοεξαρτώμενα σημαντικά προβλήματα όταν μειώνεται η κλίμακα του χάρτη: τη μείωση του διαθέσιμου φυσικού χώρου του χάρτη και τη μεγέθυνση των φυσικών διαστάσεων των χωρικών οντοτήτων, ώστε να είναι αναγνώσιμα.

Στο Σχήμα 10.1 παρουσιάζονται, με συμβολικό τρόπο, τα δύο αυτά σημαντικά προβλήματα της γενίκευσης και υποδεικνύονται ορισμένοι τρόποι αντιμετώπισής τους. Πιο συγκεκριμένα, στον παράγωγο χάρτη απεικονίζεται ένα υποσύνολο των χωρικών οντοτήτων που εμφανίζονται στον αρχικό χάρτη και μάλιστα ορισμένες από αυτές μετατίθενται ώστε να μην προκύπτουν επικαλύψεις των συμβόλων στον παράγωγο χάρτη.

10.2.2 Ορισμοί της γενίκευσης

Στη χαρτογραφία, η διεργασία με την οποία ένας χάρτης μετατρέπεται σε έναν παράγωγο με μικρότερη κλίμακα από αυτήν του αρχικού, ονομάζεται **γενίκευση** (πολλές φορές χρησιμοποιούμε τους όρους χαρτογραφική γενίκευση ή γενίκευση χάρτη). Η γενίκευση περιγράφει τη μείωση της πολυπλοκότητας σε ένα χάρτη, αποδίδει με έμφαση τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του χώρου ενώ αντίθετα εξαφανίζει όσα από αυτά δεν είναι σημαντικά, διατηρεί τις λογικές και κατηγορηματικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων του χάρτη και τέλος, διατηρεί την αισθητική του ποιότητα. Η γενίκευση στοχεύει στη δημιουργία χαρτών με γραφική ενάργεια, με τρόπο που η εικόνα του χάρτη να είναι εύκολα αντιληπτή από το χρήστη και το μήνυμα που μεταφέρει ο χάρτης να καθίσταται κατανοητό. Η σύνθεση των χαρακτηριστικών της γενίκευσης εκφράζεται από τον ορισμό που της έχει αποδώσει η Διεθνής Χαρτογραφική Ένωση (International Cartographic Association – I.C.A.):

Γενίκευση είναι η επιλεγμένη και απλοποιημένη αναπαράσταση των λεπτομερειών που είναι κατάλληλες ως προς την κλίμακα ή και το σκοπό του χάρτη.

Ας σημειωθεί ότι η κλίμακα, σύμφωνα με τα παραπάνω, δεν αποτελεί το μοναδικό παράγοντα που επηρεάζει τη γενίκευση. Ο σκοπός του χάρτη καθορίζει εξ ίσου με την κλίμακα, ως παράγοντας, τη διεργασία της γενίκευσης. Ένας καλός χάρτης θα πρέπει να αποδίδει εκείνες τις χωρικές οντότητες που είναι απαραίτητες για τις ανάγκες των χρηστών του. Με το σκεπτικό αυτό ένας χάρτης που απευθύνεται σε ποδηλάτες δίνει έμφαση στην απεικόνιση διαφορετικών δρόμων από ένα χάρτη που απευθύνεται σε οδηγούς αυτοκινήτων. Άλλοι παράγοντες, που επηρεάζουν τη γενίκευση ενός χάρτη, είναι η ποιότητα των

δεδομένων, οι προδιαγραφές με τις οποίες σχεδιάζονται τα σύμβολα του χάρτη (για παράδειγμα, το πάχος και το χρώμα των γραμμικών συμβόλων που αναπαριστούν τους δρόμους, τα διοικητικά όρια κλπ.) και οι τεχνικές δυνατότητες αναπαραγωγής του. Οι παράγοντες που επηρεάζουν της διεργασία της γενίκευσης ονομάζονται **βαθμοί** της γενίκευσης.

Η ανάπτυξη των ψηφιακών μεθόδων στη χαρτογραφία διεύρυνε το νόημα και το περιεχόμενο της γενίκευσης. Η διαπίστωση αυτή με μια πρώτη ματιά φαίνεται παράδοξη. Θα μπορούσε κανείς να περιμένει ότι με τη μετάβαση από ένα στατικό αναλογικό χάρτη σε ψηφιακούς χάρτες που αποδίδονται στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή θα ξεπερνούταν η ανάγκη για γενίκευση. Και αυτό γιατί η αξιοποίηση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών παρέχει δυνατότητες επιλογής και σύνθεσης υποσυνόλων των χωρικών πληροφοριών δια μέσου ερωτοαποκρίσεων με ευελιξία, δυνατότητες μεγέθυνσης και διερεύνησης των χωρικών δεδομένων, σε οποιαδήποτε επιθυμητή κλίμακα. Όμως, η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική για δύο κυρίως λόγους. Πρώτα, γιατί τα χωρικά φαινόμενα και η χωρική επεξεργασία συνήθως εξαρτώνται από την κλίμακα. Τα χωρικά δεδομένα πρέπει να αναλύονται και να οπτικοποιούνται σε κλίμακες που έχει νόημα και είναι κατανοητή είτε η μοντελοποίηση των χωρικών φαινομένων, που αντιπροσωπεύουν, είτε η επεξεργασία τους. Ο δεύτερος λόγος αναφέρεται στον ίδιο το χαρακτήρα της γενίκευσης που συμπυκνώνει μια θεμελιακή διανοητική δραστηριότητα, η οποία συνδυάζει στοιχεία ευρύτερων επιστημονικών θεωρήσεων και στοιχεία καθημερινής πρακτικής εξάσκησης και λήψης αποφάσεων. Χωρίς την εστίαση στις ουσιαστικές όψεις ενός προβλήματος μπορεί κανείς να χαθεί σε λεπτομέρειες που δεν έχουν σημασία και τελικά να μην είναι σε θέση να κατανοήσει τις γενικευμένες μορφές που από μόνες τους επιτρέπουν τη μετάδοση της χωρικής πληροφορίας. Επομένως, με την έννοια αυτή η γενίκευση αποτελεί μια επεξεργασία θεμελιακής σημασίας στη μεγιστοποίηση του πληροφοριακού περιεχόμενου μιας χωρικής βάσης δεδομένων, όταν το περιεχόμενο της δομείται, συντηρείται ή μεταδίδεται. Ένας ορισμός της γενίκευσης που να υλοποιείται με ψηφιακές μεθόδους, ο οποίος αντανάκλα τις παραδοσιακές αναλογικές μεθόδους, είναι ο ακόλουθος:

Ως ψηφιακή γενίκευση ορίζεται η διαδικασία δημιουργίας, από ένα σύνολο αρχικών δεδομένων, ενός παράγωγου συνόλου χαρτογραφικών δεδομένων κωδικοποιημένων με συμβολικό ή ψηφιακό τρόπο, με εφαρμογή χωρικών μετασχηματισμών ή μετασχηματισμών των ιδιοτήτων τους.

Εξετάζοντας την ψηφιακή εκδοχή της γενίκευσης από μια διαφορετική οπτική μπορούμε να την κατανοήσουμε ως μια διεργασία **αναγωγής της χωρικής ανάλυσης**, η οποία επηρεάζει και το θεματικό αλλά και το γεωμετρικό

περιεχόμενο της χωρικής βάσης δεδομένων. Η γενίκευση του θεματικού περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων σημαίνει αλλαγή του σχήματος της βάσης δεδομένων, μείωση του αριθμού των χωρικών οντοτήτων που περιλαμβάνονται σε αυτήν, απαλοιφή ορισμένων ιδιοτήτων, ή τέλος αντικατάσταση ορισμένων τιμών των ιδιοτήτων (για παράδειγμα, αντικατάσταση πολλών διαφορετικών τιμών από τη μέση τιμή τους). Η γενίκευση του γεωμετρικού περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων, με αναγωγή της χωρικής ανάλυσης, υλοποιείται με τη σειρά της με απαλοιφή ορισμένων χαρτογραφικών αντικειμένων ή μέρους τους, με την απλοποίηση της μορφής τους, ή τέλος με μετάθεση της θέσης τους ώστε να εξασφαλίζεται η οπτική τους διάκριση (Σχήμα 10.1).

10.2.3 Κίνητρα για γενίκευση

Στις προηγούμενες ενότητες έγινε έμμεσα αναφορά στα κίνητρα που οδηγούν το χαρτογράφο να εφαρμόσει τη διεργασία της γενίκευσης. Είναι όμως χρήσιμο, η αναφορά αυτή στα κίνητρα για γενίκευση να γίνει με πλήρη και ολοκληρωμένο τρόπο. Μια ολοκληρωμένη καταγραφή των κινήτρων για γενίκευση περιλαμβάνει:

1. Ανάπτυξη χωρικής βάσης δεδομένων:

Δόμηση ενός ψηφιακού μοντέλου του πραγματικού κόσμου, με χωρική ανάλυση και περιεχόμενο, κατάλληλα του σκοπού των εφαρμογών που θα υποστηρίζονται από τη χωρική βάση δεδομένων και συμπλήρωσή της με δεδομένα.

- Επιλογή αντικειμένων.
- Αναπαράσταση αντικειμένων.

2. Οικονομική αξιοποίηση πηγών δεδομένων:

Ελαχιστοποίηση στην αξιοποίηση των υπολογιστικών διαθεσίμων με φιλτράρισμα και επιλογή σε ελεγχόμενα επίπεδα ακριβειών με τη βοήθεια ανοχών.

- Εξοικονόμηση χώρου αποθήκευσης δεδομένων.
- Εξοικονόμηση χρόνου επεξεργασίας δεδομένων.

3. Αύξηση/εξασφάλιση σταθερότητας δεδομένων:

Δόμηση χωρικής βάσης δεδομένων απαλλαγμένης από σφάλματα και ασυμβατότητα μεταξύ των στοιχείων της με αναγωγή των ανεπιθύμητων λεπτομερειών.

- Εξάλειψη ανεπιθύμητης λεπτομέρειας υψηλής συχνότητας.
- Ανίχνευση και εξάλειψη σφαλμάτων συλλογής δεδομένων.

- Ομογενοποίηση (τυποποίηση) χωρικής ανάλυσης και ακρίβειας ετερογενών δεδομένων.

4. Παράγωγα δεδομένα και χάρτες για πολλαπλούς σκοπούς:

Παραγωγή δεδομένων και χαρτών σύμφωνα με συγκεκριμένες προαπαιτήσεις από μια λεπτομερή χωρική βάση δεδομένων πολλαπλού σκοπού.

- Παραγωγή υποσυνόλων των δεδομένων μικρότερης κλίμακας ή/και συγκεκριμένης θεματολογίας.
- Σύνθεση χαρτών ειδικού σκοπού.
- Αποφυγή επικαλύψεων.

5. Βελτιστοποίηση οπτικής επικοινωνίας:

Ανάπτυξη ευκρινών και αποτελεσματικών οπτικοποιήσεων.

- Διατήρηση της ευκρίνειας των οπτικοποιήσεων της βάσης δεδομένων.
- Μετάδοση μηνύματος με εστίαση σε ένα κεντρικό θέμα.
- Υιοθέτηση ιδιοτήτων ποικίλων μέσων απόδοσης.

Εξετάζοντας τα παραπάνω σημεία η γενίκευση με την κλασική της σημασία αναφέρεται κυρίως στο σημείο 5 (οπτική επικοινωνία) και λιγότερο στο σημείο 4, ενώ τα σημεία 1, 2 και 3 αναφέρονται κυρίως στην ψηφιακή εκδοχή της γενίκευσης. Ειδικότερα οι εφαρμογές της γενίκευσης, που αναφέρονται στο σημείο 5, έχουν πολύ μεγάλη σημασία λόγω της αξιοποίησης της τεχνολογίας των Συστημάτων Γεωγραφικών Πληροφοριών. Σε εφαρμογές αυτής της τεχνολογίας ο χρήστης, καλείται πολλές φορές να απεικονίσει χωρικά δεδομένα δια μέσου συσκευών που διαφέρουν σημαντικά ως προς τη διακριτική ανάλυση. Για παράδειγμα, τα ίδια δεδομένα πρέπει να αποδίδονται με μονάδες απόδοσης ειδικές για χάραξη φιλμ με υψηλή ανάλυση σε αντίθεση με τις οθόνες ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι οποίες έχουν συγκριτικά χαμηλότερη διακριτική ανάλυση.

10.3 Οι διαφορετικές όψεις της γενίκευσης

Οι αιτίες και τα κίνητρα που μας οδηγούν στην εφαρμογή ψηφιακών μεθόδων γενίκευσης αναδεικνύουν με σαφήνεια πόσο αποκλίνουσες είναι οι προαπαιτήσεις για την υλοποίηση αυτών των διεργασιών. Επομένως, μπορούμε να δούμε τη γενίκευση μέσα από την οπτική διαφορετικών όψεων.

10.3.1 Γενίκευση μοντέλου δεδομένων

Η γενίκευση του μοντέλου μιας χωρικής βάσης δεδομένων λαμβάνει χώρα από τη στιγμή που ορίζεται και δομείται η ίδια η βάση των δεδομένων. Θεωρώντας ότι μια χωρική βάση δεδομένων δεν είναι τίποτα άλλο από μια συνοπτική παράσταση ενός μέρους του πραγματικού κόσμου, θα πρέπει να εφαρμόζεται ένα συγκεκριμένο επίπεδο γενίκευσης (με την έννοια της αφαίρεσης, της επιλογής και της απλοποίησης) ώστε να διαμορφώνονται υποσύνολα πληροφοριών κατάλληλα για τις ανάγκες της αναπαράστασης του περιεχομένου της. Παρ' όλο που το θέμα αυτό εξετάζεται στη συγκεκριμένη περίπτωση από την οπτική της γενίκευσης, στην πράξη αντιμετωπίζεται με τις μεθόδους γεωμετρικού σχεδιασμού των βάσεων δεδομένων, ορίζοντας τις κατηγορίες των δεδομένων, τα χαρακτηριστικά τους, καθώς επίσης και τις μεθόδους δειγματοληψίας (ορισμός χωρικής ανάλυσης) σε συνδυασμό με την ερμηνευτική ικανότητα του ανθρώπου.

Η διαδικασία όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα, ουσιαστικά αντιστοιχεί με τα στάδια προετοιμασίας των δεδομένων για τη κατασκευή ενός παραδοσιακού χάρτη. Στο περιβάλλον των ψηφιακών συστημάτων η γενίκευση μπορεί να επηρεάζει άμεσα τα ίδια τα δεδομένα, με τα οποία δημιουργείται ο χάρτης και όχι μόνον τη γραφική εικόνα του χάρτη. Ως κυρίαρχος στόχος για τη διαμόρφωση ενός γενικευμένου μοντέλου δεδομένων είναι ο έλεγχος της διαδικασίας της μείωσης των δεδομένων για την ικανοποίηση διακριτών σκοπών. Η ανάγκη για τη μείωση των δεδομένων μπορεί να προέρχεται από διάφορους λόγους, όπως είναι η ελαχιστοποίηση του χρόνου επεξεργασίας των δεδομένων ή του χώρου αποθήκευσής τους ή ακόμα και η ευκολία μετάδοσης των δεδομένων δια μέσου δικτύων επικοινωνίας (π.χ. στο διαδίκτυο). Με τον τρόπο αυτό διαμορφώνονται σύνολα δεδομένων με διαδοχικά μειούμενη ακρίβεια ή/και χωρική ανάλυση. Η δυνατότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν αντιμετωπίζονται προβλήματα ολοκλήρωσης δεδομένων με ετερογενή χωρική ανάλυση ή ακρίβεια, ή προβλήματα που σχετίζονται με την ανάπτυξη βάσεων δεδομένων πολλαπλών χωρικών αναλύσεων. Παρ' όλο που η έννοια του γενικευμένου μοντέλου δεδομένων μπορεί να αξιοποιηθεί στα στάδια προεπεξεργασίας για τις ανάγκες της χαρτογραφικής γενίκευσης είναι σημαντικό το ότι δεν συσχετίζεται με κατηγορηματικό τρόπο με οποιαδήποτε διαδικασία οπτικοποίησης των δεδομένων.

10.3.2 Χαρτογραφική γενίκευση

Με τον όρο χαρτογραφική γενίκευση περιγράφεται η διαδικασία της γενίκευσης των δεδομένων για τις ανάγκες της χαρτογραφικής οπτικοποίησής τους. Η ανάγκη για οπτικοποίηση διαφοροποιεί τη χαρτογραφική γενίκευση από τη γενίκευση του μοντέλου των δεδομένων, δεδομένου ότι καθορίζει το γραφικό συμβολισμό του

περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων. Έτσι, η χαρτογραφική γενίκευση συνδέεται άμεσα με προβλήματα που σχετίζονται με τη διαδικασία δημιουργίας των χαρτογραφικών συμβόλων όπως είναι η μετάθεση των συμβόλων. Οι στόχοι βέβαια της χαρτογραφικής γενίκευσης παραμένουν βασικά ίδιοι με τους στόχους της γενίκευσης στη συμβατική της εκδοχή. Η σύγχρονη τεχνολογία των υπολογιστικών συστημάτων διέγρυνε όμως το πεδίο των προβλημάτων που καλείται να αντιμετωπίσει η χαρτογραφική γενίκευση με ενδεικτικά παραδείγματα προερχόμενα από: τη μεγέθυνση/σμίκρυνση της εικόνας του χάρτη στην οθόνη του υπολογιστή, την οπτικοποίηση των δεδομένων για τις ανάγκες της επιστημονικής διερεύνησης, ή την προοδευτική πύκνωση/αραίωση της πληροφορίας με απεικόνιση διαφορετικών επιπέδων λεπτομερειών στις τρισδιάστατες προοπτικές απεικονίσεις για την απόδοση της αίσθησης του «βάθους» του πλάνου. Οι ανάγκες για την αντιμετώπιση ανάλογων εφαρμογών διαμόρφωσαν συνθήκες επέκτασης των διεργασιών της χαρτογραφικής γενίκευσης σε νέα πεδία.

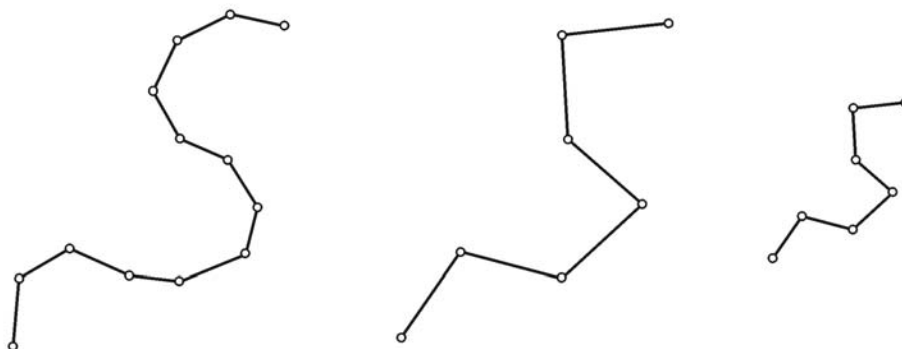
10.4 Γεωμετρικοί τελεστές γενίκευσης

Η γενίκευση εφαρμόζεται στα χωρικά δεδομένα εκτελώντας συγκεκριμένους μετασχηματισμούς που έχουν ως στόχο την τροποποίηση της γεωμετρίας ή των ιδιοτήτων τους. Για τις ανάγκες της γενίκευσης, οι διάφορες τεχνικές με τις οποίες επιτελείται η τροποποίηση της γεωμετρίας των χωρικών δεδομένων ή των ιδιοτήτων τους ονομάζονται τελεστές της γενίκευσης. Οι γεωμετρικοί τελεστές της γενίκευσης τροποποιούν τη θέση, τη μορφή, ή ακόμα και το είδος του συμβολισμού των χωρικών δεδομένων. Η τροποποίηση των ιδιοτήτων των χωρικών δεδομένων κυρίως εστιάζεται στη διαδικασία της ταξινόμησης, η οποία έχει ως σκοπό τη κατάταξη των δεδομένων σε διακριτές ομάδες, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τη στατιστική επεξεργασία.

Οι τελεστές της γενίκευσης αρχικά επινοήθηκαν ως ψηφιακές τεχνικές προσομοίωσης της διαδικασίας της χειροκίνητης γενίκευσης, αλλά πλέον έχουν εξελιχθεί και εμπλουτιστεί από καθαρά αναλυτικές τεχνικές. Στα πλαίσια της αναλυτικής χαρτογραφίας, εξετάζονται οι τελεστές με τους οποίους γίνεται τροποποίηση της γεωμετρίας των χωρικών δεδομένων. Ειδικότερα, αναλύονται οι τελεστές της απλοποίησης, εξομάλυνσης, συγχώνευσης σημειακών/γραμμικών/επιφανειακών συμβόλων, μετάπτωσης, εκλέπτυνσης, μεγέθυνσης, ενίσχυσης και μετάθεσης.

10.4.1 Απλοποίηση

Η ψηφιακή αναπαράσταση κάθε χωρικής οντότητας πρέπει να είναι ακριβής διατηρώντας τη μορφή, τη θέση και τον χαρακτήρα της. Παράλληλα, πρέπει να καταβληθεί κάθε δυνατή προσπάθεια, κατά την αναπαράσταση, να διατηρηθούν τα τρία αυτά στοιχεία της ακρίβειας των χωρικών οντοτήτων με όσο το δυνατό μικρότερο αριθμό αναγκαίων σημείων. Κατά το στάδιο της ψηφιοποίησης γραμμικών χωρικών οντοτήτων (ή του περιγράμματος επιφανειακών χωρικών οντοτήτων) συνήθως συλλέγονται περισσότερα σημεία από όσα χρειάζονται για την ακριβή αναπαράστασή τους. Στη συνέχεια, απαιτείται να εφαρμοστεί μια διαδικασία απαλοιφής των ανεπιθύμητων λεπτομερειών και διατήρησης ενός υποσυνόλου των αρχικών συντεταγμένων, που να ορίζουν όσα τα σημεία είναι αντιπροσωπευτικά της μορφής της χωρικής οντότητας. Με τον τελεστή της απλοποίησης επιλέγονται να διατηρηθούν όσα σημεία περιγράφουν τη μορφή των χωρικών οντοτήτων και να απαλειφθούν όσα σημεία πλεονάζουν ή δεν είναι απαραίτητα για την απόδοση του χαρακτήρα της μορφής τους στην παράγωγη κλίμακα.

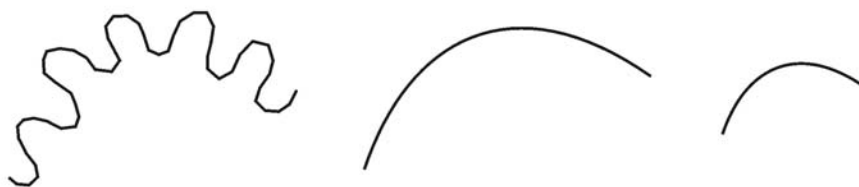


Σχήμα 10.2 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή απλοποίησης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

Με τη διαδικασία της απλοποίησης μειώνεται ο αριθμός των σημείων που αντιπροσωπεύει μια χωρική οντότητα αλλά οι συντεταγμένες των παράγωγων σημείων παραμένουν αναλλοίωτες. Η χρήση του τελεστή της απλοποίησης, πέραν της εφαρμογής του για τις ανάγκες της διαδικασίας της γενίκευσης, παρέχει και ορισμένα πρακτικά οφέλη στη διαχείριση των χωρικών οντοτήτων, μειώνοντας τους χρόνους επεξεργασίας και απόδοσης των χωρικών δεδομένων. Σε επόμενες ενότητες γίνεται αναλυτικότερη περιγραφή του τελεστή απλοποίησης παρουσιάζοντας τους σημαντικότερους αλγόριθμους απλοποίησης. Στο Σχήμα 10.2 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή απλοποίησης.

10.4.2 Εξομάλυνση

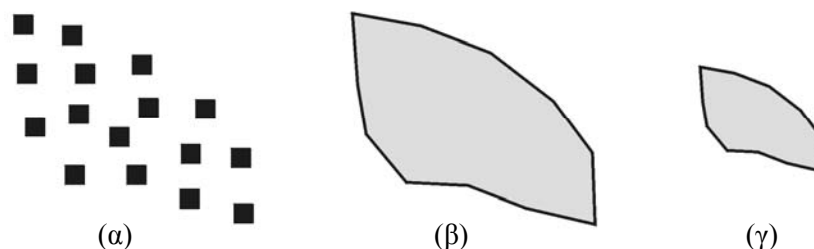
Ο τελεστής εξομάλυνσης επιδρά σε μια γραμμή μετακινώντας τις συντεταγμένες των κορυφών της με σκοπό την απάλειψη μικρών διαταραχών, με τρόπο που να διατηρείται η κυρίαρχη τάση της μορφής της. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της εξομάλυνσης έχει ως στόχο τη μείωση των γωνιακών παραμορφώσεων της μορφής μιας γραμμής που προέρχονται από τη διαδικασία της ψηφιοποίησης. Ο τελεστής εξομάλυνσης παράγει γραμμές στις οποίες έχει τροποποιηθεί η μορφή τους ώστε να βελτιωθεί η αισθητική απόδοση των χωρικών οντοτήτων που αντιπροσωπεύουν. Στο Σχήμα 10.3 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή εξομάλυνσης.



Σχήμα 10.3 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή εξομάλυνσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

10.4.3 Συγχώνευση σημειακών συμβόλων

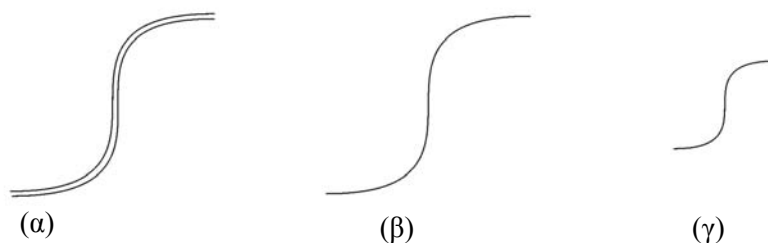
Πολλές φορές, κατά τη διαδικασία της γενίκευσης, είναι απαγορευτικό ένα σύνολο από σημειακά σύμβολα να αποδοθούν στην παράγωγη κλίμακα, όταν βρίσκονται κοντά το ένα με το άλλο σε μια περιορισμένη έκταση. Είναι όμως πιθανό ο σκοπός για τον οποίο κατασκευάζεται ο χάρτης να επιβάλλει την ανάγκη να απεικονιστεί το φαινόμενο που αντιπροσωπεύουν τα σύμβολα αυτά. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός είναι δυνατό να γίνει συγχώνευση των σημειακών συμβόλων, σε ένα σύμβολο μεγαλύτερης τάξης, ώστε η χωρική οντότητα να απεικονιστεί με επιφανειακό σύμβολο. Για παράδειγμα, εάν το διάστημα του χώρου μεταξύ των κτιρίων στην κλίμακα του παράγωγου χάρτη είναι μικρότερο από το φυσικό τους μέγεθος, τότε τα σημειακά σύμβολα των κτιρίων μπορούν να συγχωνευτούν και να συμβολιστούν, με τη βοήθεια ενός επιφανειακού συμβόλου, ως κατοικημένη περιοχή. Στο Σχήμα 10.4 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή συγχώνευσης σημειακών συμβόλων.



Σχήμα 10.4 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή συγχώνευσης σημειακών συμβόλων: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

10.4.4 Συγχώνευση γραμμικών συμβόλων

Όταν η μεταβολή της κλίμακας μεταξύ αρχικού και παράγωγου χάρτη είναι αδύνατο να αναπαραστήσει με διακριτό τρόπο δύο γραμμικά σύμβολα που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, λόγω των γραφικών περιορισμών, τότε τα σύμβολα αυτά πρέπει να συγχωνευτούν σε ένα γραμμικό σύμβολο. Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων ονομάζεται τελεστής συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων.



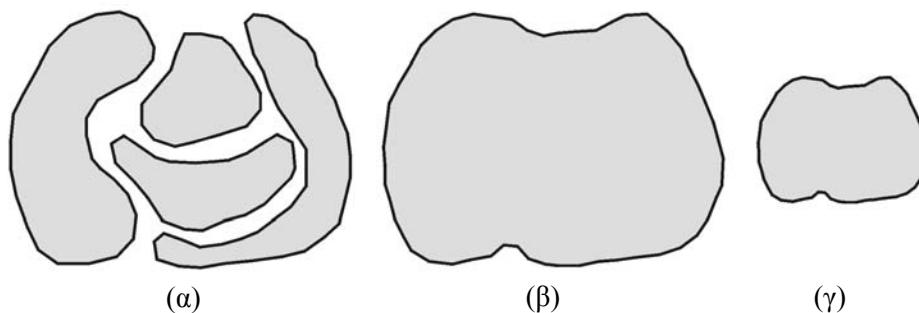
Σχήμα 10.5 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση γενίκευσης μιας εθνικής οδού, που στο βασικό χάρτη απεικονίζεται από δύο παράλληλα γραμμικά σύμβολα με σταθερή διαχωριστική απόσταση μεταξύ τους ίση με το όριο διαχωρισμού. Στην περίπτωση αυτή, κάθε γραμμικό σύμβολο αντιπροσωπεύει και μία κατεύθυνση κυκλοφορίας. Στον παράγωγο χάρτη, λόγω των γραφικών περιορισμών, δεν παρέχεται ο απαραίτητος χώρος να απεικονιστούν και τα δύο γραμμικά σύμβολα. Τότε, τα δύο γραμμικά σύμβολα πρέπει να συγχωνευτούν σε ένα, που μπορεί να

τοποθετηθεί στη διάμεσο των δύο αρχικών και να αναπαριστά την εθνική οδό στην παράγωγη κλίμακα. Στο Σχήμα 10.5 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων.

10.4.5 Συγχώνευση επιφανειακών συμβόλων

Ο τελεστής συγχώνευσης επιφανειακών συμβόλων μετασχηματίζει πολλά μικρής έκτασης, διακριτά και γειτονικά επιφανειακά σύμβολα σε μικρότερα ως προς τον αριθμό επιφανειακά σύμβολα αλλά με μεγαλύτερη έκταση. Τα επιφανειακά σύμβολα του παράγωγου χάρτη διατηρούν τα βασικά χαρακτηριστικά της μορφής της ευρύτερης περιοχής ανεξάρτητα από τη μεταβολή της κλίμακας. Για παράδειγμα, η απόδοση μιας περιοχής με πολλές μικρές ως προς την έκταση λίμνες σε πολύ κοντινή απόσταση ή μία από την άλλη, σε σχέση με τους γραφικούς περιορισμούς, μπορεί να γίνει στον παράγωγο χάρτη με τρόπο που να συγχωνεύονται ορισμένες γειτονικές λίμνες σε μία, ώστε να διατηρούνται τα αρχικά χαρακτηριστικά του βασικού χάρτη. Περιοριστικός παράγοντας της διαδικασίας συγχώνευσης είναι η μη ύπαρξη συγκεκριμένων κανόνων για την απόδοση του βαθμού των λεπτομερειών στις διάφορες κλίμακες. Έτσι, ουσιαστικά οι ανάγκες του τελικού χρήστη του χάρτη είναι αυτές που καθορίζουν τις λεπτομέρειες που πρέπει να διατηρηθούν. Στο Σχήμα 10.6 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή συγχώνευσης επιφανειακών συμβόλων.

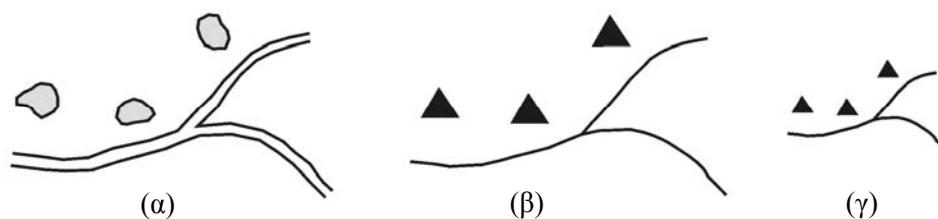


Σχήμα 10.6 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή συγχώνευσης επιφανειακών συμβόλων: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

10.4.6 Μετάπτωση

Καθώς η κλίμακα του χάρτη μειώνεται, πολλά επιφανειακά σύμβολα, λόγω των γραφικών περιορισμών, πρέπει να συμβολιστούν με σημειακά ή γραμμικά

σύμβολα. Ο τελεστής, με τη βοήθεια του οποίου τα επιφανειακά σύμβολα μετασχηματίζονται σε σημειακά ή γραμμικά κατά τη μείωση της κλίμακας, ονομάζεται τελεστής μετάπτωσης. Ο μετασχηματισμός ενός επιφανειακού συμβόλου σε σημειακό ή γραμμικό σύμβολο αποτελεί τη πιο συνηθισμένη εφαρμογή της διαδικασίας της γενίκευσης. Χωρικές οντότητες, όπως είναι οι οικισμοί, τα αεροδρόμια, οι ποταμοί, κλπ., απεικονίζονται συχνά στους χάρτες μεγάλων κλιμάκων με χρήση επιφανειακών συμβόλων. Στους χάρτες μεσαίων και μικρών κλιμάκων, οι φυσικές διαστάσεις των χωρικών αυτών οντοτήτων σε συνδυασμό με την κλίμακα και τους γραφικούς περιορισμούς, οδηγούν στην ανάγκη της απεικόνισης, για παράδειγμα, των οικισμών και των αεροδρομίων με σημειακά σύμβολα και των ποταμών με γραμμικό σύμβολο. Ως βασικό κριτήριο, για την εφαρμογή του τελεστή μετάπτωσης, χρησιμοποιείται συχνά μια τιμή επιφανειακής ανοχής. Στο Σχήμα 10.7 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή μετάπτωσης.



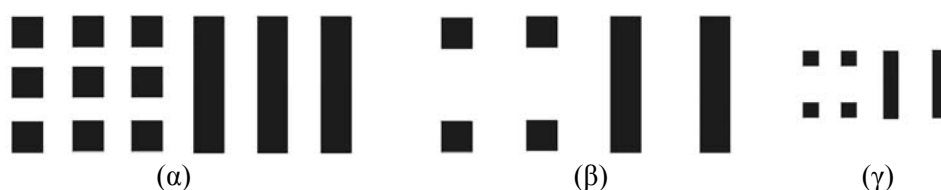
Σχήμα 10.7 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή μετάπτωσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

10.4.7 Εκλέπτυνση

Σε πολλές περιπτώσεις πολλά όμοια στη μορφή σύμβολα συσσωρεύονται σε μια περιορισμένη έκταση του βασικού χάρτη. Λόγω των γραφικών περιορισμών, στις περιπτώσεις αυτές, είναι αδύνατο να αποδοθούν όλα τα σύμβολα του βασικού χάρτη στον παράγωγο. Τότε, επιλέγεται να συμβολιστεί ένα υποσύνολο των αρχικών συμβόλων φροντίζοντας να διατηρηθεί αναλλοίωτη η συνολική χωρική τους κατανομή στον παράγωγο χάρτη. Ο γεωμετρικός τελεστής, με τη βοήθεια του οποίου γίνεται η απαραίτητη απαλοιφή των πλεοναζόντων συμβόλων, ονομάζεται τελεστής εκλέπτυνσης. Συνήθως με τον τελεστή εκλέπτυνσης απαλείφονται τα μικρότερα σε μέγεθος σύμβολα ή αυτά που δεν συνεισφέρουν σημαντικά στη γενική εντύπωση της χωρικής τους κατανομής.

Με την εφαρμογή του τελεστή εκλέπτυνσης, παρόλη την απαλοιφή ορισμένων συμβόλων, αποδίδεται με τη επιλογή των συμβόλων που διατηρούνται

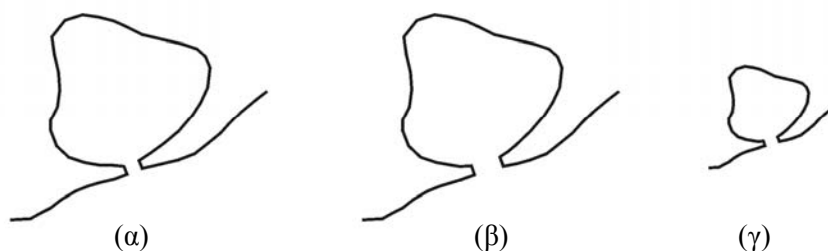
η χωρική τους κατανομή. Όταν οι θέσεις των συμβόλων που διατηρούνται παραμένουν ίδιες με τις αρχικές η διαδικασία ονομάζεται εκλέπτυνση. Στις περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να γίνουν μικρές τροποποιήσεις των αρχικών θέσεων των συμβόλων, τότε η διαδικασία ονομάζεται τυποποίηση. Στο Σχήμα 10.8 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή των τελεστών εκλέπτυνσης.



Σχήμα 10.8 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή εκλέπτυνσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

10.4.8 Μεγέθυνση

Σε ορισμένες περιπτώσεις η μορφή και το μέγεθος των συμβόλων μπορεί να χρειαστεί να μεγεθυνθεί με σκοπό να ικανοποιηθούν συγκεκριμένες προαπαιτήσεις του χάρτη κατά τη γενίκευση. Ο κατάλληλος γεωμετρικός τελεστής με τη βοήθεια του οποίου μεγεθύνονται ορισμένα επιλεγμένα σύμβολα σε ένα χάρτη ονομάζεται τελεστής μεγέθυνσης.



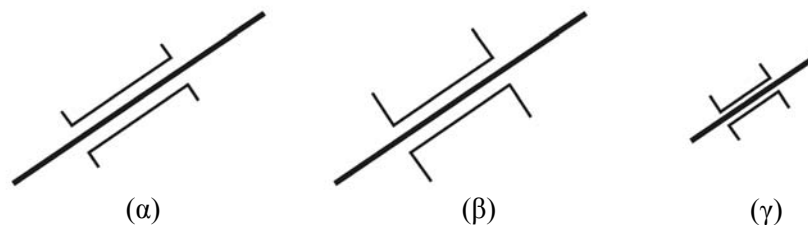
Σχήμα 10.10 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή μεγέθυνσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

Για παράδειγμα, σε κόλπους με κλειστή μορφή χρειάζεται να γίνει τροποποίηση του ανοίγματός τους, ώστε να γίνει εφικτή η απόδοση πληροφοριών απαραίτητων για ασφαλή πλοήγηση στη μικρότερη κλίμακα. Ανάλογη διαδικασία

εφαρμόζεται σε περιπτώσεις γενίκευσης ποταμών ή ρεμάτων, που σχηματίζουν πολύ έντονους επάλληλους μαιάνδρους στο χάρτη. Η ενίσχυση ορισμένων συμβόλων, με την εφαρμογή της μεγέθυνσης για τις ανάγκες της γενίκευσης, αποτελεί ένα σημαντικό τμήμα της αφαιρετικής διεργασίας που χαρακτηρίζει κάθε χαρτογραφική διαδικασία. Η εφαρμογή του τελεστή μεγέθυνσης πολλές φορές τροποποιεί τις θέσεις ορισμένων συμβόλων, που σε συνδυασμό με τα όρια της οπτικής αντίληψης, επιφέρει τη χωρική τους σύμπτωση. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με επιτυχία μεταθέτοντας τοπικά τις θέσεις των συμβόλων εκεί όπου εντοπίζεται η σύμπτωση. Στο Σχήμα 10.10 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή μεγέθυνσης.

10.4.9 Ενίσχυση

Το σχήμα και το μέγεθος των χαρτογραφικών συμβόλων κατά τη γενίκευση χρειάζεται, σε ορισμένες περιπτώσεις γενίκευσης, να υποστούν μερική διόγκωση ή να υπερτονιστούν ορισμένα χαρακτηριστικά με σκοπό να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις του παράγωγου χάρτη. Ο τελεστής με τον οποίο επιτυγχάνεται ο τονισμός ή η διόγκωση των συμβόλων ονομάζεται τελεστής ενίσχυσης. Σε αντίθεση με τον τελεστή μεγέθυνσης, ο τελεστής ενίσχυσης δεν τροποποιεί συνολικά τις διαστάσεις των συμβόλων αλλά μερικώς τη μορφή ή και το μέγεθός τους.



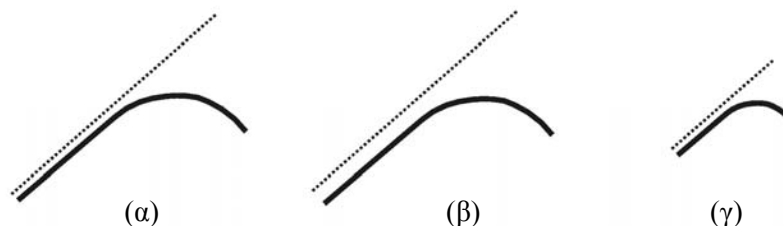
Σχήμα 10.10 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή ενίσχυσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

Ο τελεστής της ενίσχυσης εφαρμόζεται, για παράδειγμα, όταν στον παράγωγο χάρτη χρειάζεται να γίνει τροποποίηση του μεγέθους βαθμωτών συμβόλων σε όσες περιπτώσεις οι διαφοροποιήσεις του μεγέθους δεν γίνονται οπτικά αντιληπτές. Επιπλέον πολλές φορές, στις περιπτώσεις όπου εντοπίζεται το σύμβολο μιας γέφυρας στη θέση μιας ανισόπεδης διασταύρωσης του οδικού δικτύου, τότε εφαρμόζοντας τον τελεστή ενίσχυσης το περίγραμμα του συμβόλου της γέφυρας στον παράγωγο χάρτη υφίσταται τροποποίηση ορισμένων

διαστάσεών του, σε μεγαλύτερες από τις φυσικές, για να επιτευχθεί σαφής οπτική διαφοροποίηση. Με την εφαρμογή του τελεστή ενίσχυσης δεν υπερτονίζεται η σημασία του συμβολισμού στον παράγωγο χάρτη, απλά γίνεται βελτιστοποίηση του ακολουθούμενου συμβολισμού για να είναι οπτικά αντιληπτός στην παράγωγη κλίμακα. Στο Σχήμα 10.10 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή ενίσχυσης.

10.4.10 Μετάθεση

Οι τεχνικές με τις οποίες γίνεται μετάθεση της θέσης των συμβόλων έχουν ως στόχο να εξαλείψουν τα προβλήματα που δημιουργούνται, κατά τη γενίκευση, με τη χωρική σύμπτωση των συμβόλων στον παράγωγο χάρτη. Ο γεωμετρικός τελεστής, με την εφαρμογή του οποίου μετακινούνται οι θέσεις των συμβόλων με σκοπό να εξευρεθεί ο απαραίτητος χώρος για να συμβολιστούν χωρικές οντότητες που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, ονομάζεται τελεστής μετάθεσης.



Σχήμα 10.11 Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή μετάθεσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή των τελεστών στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%)

Τα γραφικά όρια του χάρτη καθιστούν αναγκαία τη μετάθεση των συμβόλων από την ακριβή οριζοντιογραφική θέση της χωρικής οντότητας που αναπαριστά. Η μετάθεση των συμβόλων πηγάζει από το γεγονός, ότι κάθε σύμβολο έχει πεπερασμένες διαστάσεις που καταλαμβάνουν στην επιφάνεια του χάρτη μεγαλύτερο χώρο απ' ό,τι οι φυσικές διαστάσεις της χωρικής οντότητας που αναπαριστάται από αυτό. Ορισμένες χωρικές οντότητες βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, με αποτέλεσμα τα σύμβολα που τις αναπαριστούν να εμφανίζουν χωρική σύμπτωση στο χάρτη. Η χωρική σύμπτωση των συμβόλων αντιμετωπίζεται με τρεις τρόπους: (1) μετακινώντας τα σύμβολα από την ακριβή του θέση (μετάθεση), (2) τροποποιώντας τα σύμβολα (αλλαγή ή διακοπή συμβολισμού), ή τέλος, (3) διαγράφοντας το σύμβολο από το χάρτη. Στην ενότητα 10.6 αναλύονται ορισμένες τεχνικές αντιμετώπισης των χαρτογραφικών

προβλημάτων της χωρικής σύμπτωσης των συμβόλων κατά τη διεργασία της γενίκευσης. Στο Σχήμα 10.11 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή μετάθεσης.

10.5 Βασικοί αλγόριθμοι γενίκευσης

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφούν ορισμένοι βασικοί αλγόριθμοι κατάλληλοι για την υλοποίηση δύο βασικών τελεστών της γενίκευσης: της **επιλογής/απαλοιφής** και της **απλοποίησης**. Οι δύο αυτοί τελεστές της γενίκευσης έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι εφαρμόζονται σε διακριτά γραφικά αντικείμενα ανεξάρτητα από το χωρικό τους πλαίσιο. Για παράδειγμα, μπορεί ορισμένα γραφικά αντικείμενα που βρίσκονται κοντά σε μια γραμμή, η οποία απλοποιείται, να επηρεάζονται από το αποτέλεσμα της απλοποίησης (η νέα θέση της γραμμής να τα επικαλύπτει), όμως η διαδικασία της απλοποίησης να εφαρμόζεται εξετάζοντας αποκλειστικά και μόνον τη γραμμή. Δηλαδή, εξετάζονται στο πλαίσιο αυτό οι διάφοροι τρόποι εφαρμογής των τελεστών σε συγκεκριμένο κάθε φορά γραφικό αντικείμενο, χωρίς να διερευνώνται τα προβλήματα που μπορούν να δημιουργηθούν στα γειτονικά ως προς αυτό αντικείμενα από τις πιθανές μεταθέσεις του.

10.5.1 Επιλογή/απαλοιφή γραφικών αντικειμένων

Ο τελεστής της επιλογής/απαλοιφής γραφικών αντικειμένων μπορεί να είναι απλός στη σύλληψή του όμως είναι πολύ σημαντικός, γιατί με την εφαρμογή του εξασφαλίζεται διαθέσιμος χώρος στο χάρτη, με την παράλειψη όσων γραφικών αντικειμένων δεν κρίνονται κατάλληλα να απεικονιστούν, λόγω της κλίμακας ή του σκοπού του παράγωγου χάρτη. Όμως, πρέπει να διατυπωθούν τρία θεμελιακά ερωτήματα:

1. Πόσα γραφικά αντικείμενα επιλέγονται;
2. Ποια γραφικά αντικείμενα επιλέγονται;
3. Με ποιες δεσμεύσεις θα καθοδηγείται η διαδικασία της επιλογής;

Η διαδικασία αυτή δεν ολοκληρώνεται με την απαλοιφή και μόνον των γραφικών αντικειμένων, αλλά χρειάζεται τα γραφικά αντικείμενα που παραμένουν στον παράγωγο χάρτη να αναδιαταχθούν στο χώρο, ώστε να διατηρηθεί η αρχική οπτική εντύπωση των γραφικών αντικειμένων του βασικού χάρτη. Έτσι, η επιλογή δεν είναι παρά το πρώτο βήμα μιας διαδοχικής σειράς επεμβάσεων στα δεδομένα.

Η πρώτη από τις τρεις ερωτήσεις που παρατέθηκαν, αντιμετωπίζεται από τον εμπειρικό νόμο των Törfer και Pillewizer, γνωστού ως “Αρχές της Επιλογής”. Ο εμπειρικός αυτός νόμος βασίστηκε σε συστηματική συγκριτική μελέτη μεγάλου αριθμού εκδομένων σειρών χαρτών. Στην απλή του μορφή ο νόμος εκφράζεται από τη σχέση:

$$n = n_0 \sqrt{\frac{S}{S_0}},$$

όπου: n_0 και n είναι ο αριθμός των γραφικών αντικειμένων του αρχικού και του παράγωγου χάρτη, ενώ S_0 και S οι κλίμακές τους, αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που τα γραφικά αντικείμενα, τα οποία υφίστανται την επιλογή/απαλοιφή, είναι ακανόνιστες γραμμές και απεικονίζονται στους δύο χάρτες (αρχικό και παράγωγο) με γραμμικά σύμβολα ίσου πάχους, όπως στην περίπτωση των ακτογραμμών, τότε ο εμπειρικός αυτός νόμος έχει τη μορφή:

$$n = n_0 \frac{S}{S_0},$$

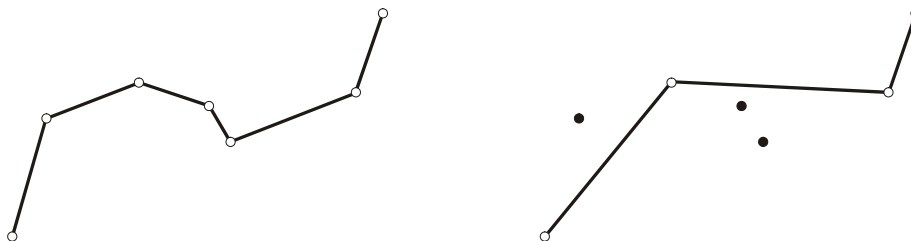
όπου: n_0 και n είναι ο αριθμός των κορυφών της ακανόνιστης γραμμής στον αρχικό και στον παράγωγο χάρτη, αντίστοιχα.

Οι απλές αυτές σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν, με σκοπό να υπολογίζεται ο αριθμός των γραφικών αντικειμένων που θα διατηρείται στον παράγωγο χάρτη.

Ο νόμος των Törfer και Pillewizer μπορεί να εμπλουτιστεί με περισσότερους όρους. Οι όροι αυτοί λαμβάνουν υπόψη ειδικές περιπτώσεις συμβολισμού των χωρικών οντοτήτων, όμως δεν είναι δυνατό ο εμπειρικός αυτός νόμος να δώσει κατευθύνσεις, ώστε να προσδιοριστούν ποια γραφικά αντικείμενα πρέπει να επιλεγούν (δεύτερο ερώτημα). Η επιλογή ενός συνόλου γραφικών αντικειμένων μπορεί να γίνει μόνον αξιοποιώντας τη σημαντικότητα των αντικειμένων. Θεωρώντας ότι κάθε γραφικό αντικείμενο χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο ιδιοτήτων, τα γραφικά αντικείμενα μπορούν να επιλεγούν με ερωτήσεις που βασίζονται στις ιδιότητές τους. Εάν ο αριθμός των ιδιοτήτων είναι μεγάλος ή οι ιδιότητες ανήκουν στις τρεις κλίμακες του συστήματος ιεράρχησης (ονομαστική κλίμακα, κλίμακα τάξης ή κλίμακα διαστήματος), μπορούν να ιεραρχηθούν με ταξινόμηση κατά φθίνουσα σειρά και να επιλεγούν εκείνα τα γραφικά αντικείμενα που εμφανίζονται στην κορυφή της ταξινόμησης.

Η διαδικασία της επιλογής δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στη σημαντικότητα των γραφικών αντικειμένων. Η επιλογή θα πρέπει να καθοδηγείται από τοπολογικές δεσμεύσεις (τρίτο ερώτημα). Για παράδειγμα, επειδή θα πρέπει στον παράγωγο χάρτη να εξασφαλιστεί η λογική της

κυκλοφορίας σε ένα οδικό δίκτυο, δεν είναι ορθό να απαλειφθεί το τμήμα ενός δρόμου μεταξύ δύο διασταυρώσεων. Με ανάλογο τρόπο γίνεται η διαδικασία της επιλογής/απαλοιφής των δικτύων των ποταμών. Η επιλογή πρέπει να στηρίζεται σε ταξινόμηση κάθε τμήματος του δικτύου, η οποία να βασίζεται στη διατήρηση της τοπολογικής του συνέχειας, με κατεύθυνση από τις πηγές έως την εκβολή.



Σχήμα 10.12 Παράδειγμα απλοποίησης γραμμών με απαλοιφή κορυφών

10.5.2 Απλοποίηση γραμμών

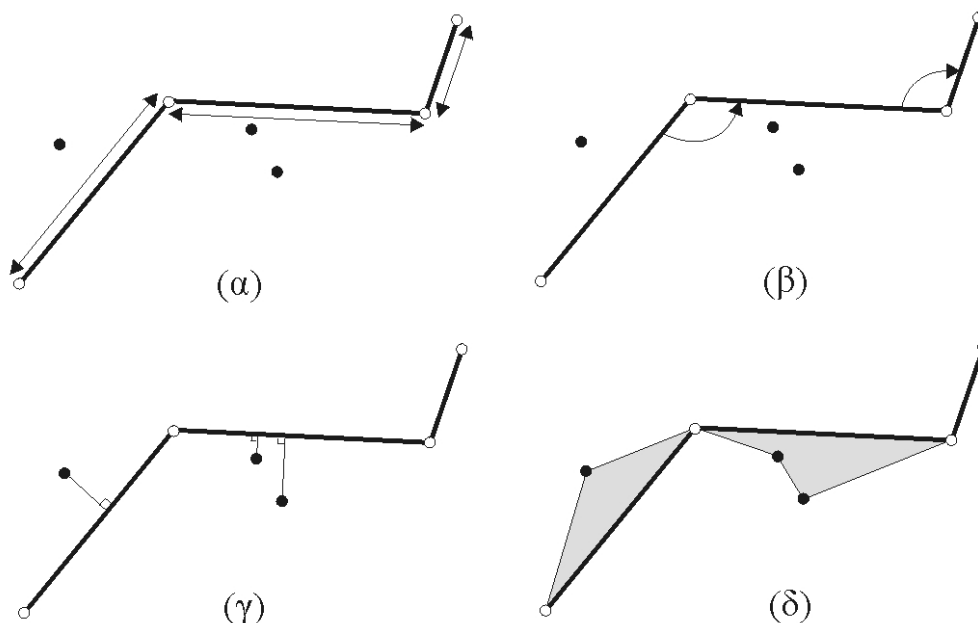
Η απλοποίηση γραμμών θεωρείται από τους σημαντικότερους τελεστές της γενίκευσης. Η συντριπτική πλειοψηφία των χωρικών οντοτήτων είτε αναπαρίσταται άμεσα στο χάρτη από γραμμές (δρόμοι, ποταμοί κλπ.), είτε από πολύγωνα (διοικητικά όρια, χρήσεις γης δάση κλπ.) το περίγραμμα των οποίων περιγράφεται από γραμμές. Η απλοποίηση μειώνει το επίπεδο των λεπτομερειών των γραμμών και με αυτή την έννοια συμμετέχει οπτικά σε σημαντικό βαθμό στο αποτέλεσμα της γενίκευσης. Εάν η απλοποίηση εφαρμόζεται με αλγόριθμους που απαλείφουν κορυφές της γραμμής (γεγονός που συμβαίνει στις περισσότερες περιπτώσεις), αυτόματα μειώνεται ο όγκος των δεδομένων. Οι αλγόριθμοι απλοποίησης είναι εξίσου χρήσιμοι για την απαλοιφή των ανεπιθύμητων λεπτομερειών υψηλής συχνότητας των γραμμών που ψηφιοποιούνται με συνεχή δειγματοληψία ή σάρωση.

Οι πιο συνηθισμένοι αλγόριθμοι απλοποίησης μετατρέπουν μια γραμμή σε μια άλλη με λιγότερες κορυφές, την απλοποιημένη, με τα ίδια ακριβώς άκρα. Σημειώνεται ότι, με εφαρμογή των αλγορίθμων απλοποίησης, δεν παράγονται νέες κορυφές ούτε μεταθέτονται οι υπάρχουσες κορυφές των γραμμών (Σχήμα 10.12). Τα κλασικά κριτήρια με βάση τα οποία γίνεται η απαλοιφή των κορυφών είναι τα ακόλουθα:

1. Ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης της γραμμής.
2. Ελαχιστοποίηση του αριθμού των κορυφών της παράγωγης γραμμής.
3. Ελαχιστοποίηση της πολυπλοκότητας των υπολογισμών.

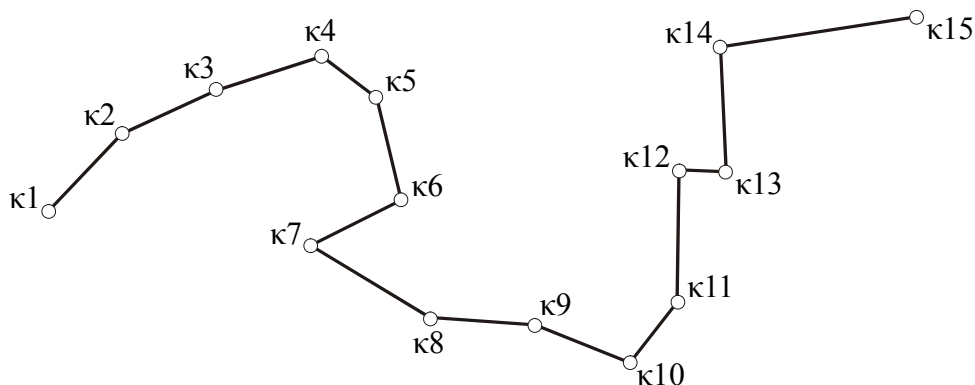
Με κριτήριο τις γεωμετρικές αρχές που τους διέπουν, οι αλγόριθμοι απλοποίησης μπορούν να διακριθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

1. Αλγόριθμοι ανεξάρτητων σημείων.
2. Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας.
3. Δεσμευμένοι αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας.
4. Μη δεσμευμένοι αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας.
5. Καθολικοί αλγόριθμοι.



Σχήμα 9.13 Κριτήρια ανίχνευσης κρίσιμων κορυφών

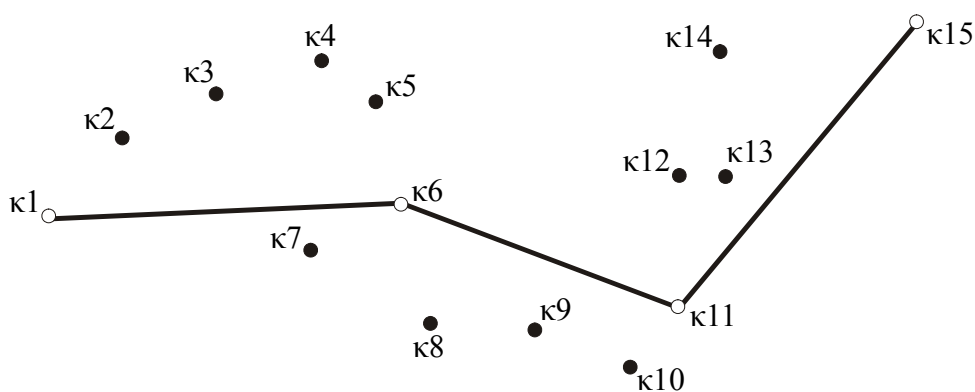
Οι αλγόριθμοι απλοποίησης μπορούν να διακριθούν, εναλλακτικά, εξετάζοντας το γεωμετρικό κριτήριο με το οποίο επιλέγονται οι **κρίσιμες** κορυφές των γραμμών. Στο Σχήμα 10.13 παρουσιάζονται τέσσερα χαρακτηριστικά γεωμετρικά κριτήρια, που αναφέρονται: στο μήκος (α), στη γωνιακή μεταβολή (β), στην κάθετο απόσταση (γ) και στην επιφανειακή μετάθεση (δ), με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να επιλεγούν οι κρίσιμες κορυφές μιας γραμμής. Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφονται οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενοι αλγόριθμοι για την απλοποίηση γραμμών. Στο Σχήμα 10.14 παρουσιάζεται το παράδειγμα μιας γραμμής – γραμμή υπόδειγμα – στην οποία εφαρμόζονται οι περιγραφόμενοι αλγόριθμοι στις ενότητες που ακολουθούν με σκοπό να είναι δυνατή η μεταξύ τους σύγκριση.



Σχήμα 10.14 Η γραμμή υπόδειγμα για την παρουσίαση των αλγόριθμων απλοποίησης

10.5.3 Αλγόριθμοι ανεξάρτητων σημείων

Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής δεν βασίζονται σε γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των γειτονικών κορυφών της γραμμής και επιδρούν με τρόπο που δεν εξετάζει τις τοπολογικές ιδιότητες των γραμμών. Ο πλέον γνωστός αλγόριθμος αυτής της κατηγορίας είναι ο αλγόριθμος του **νιοστού σημείου**. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του νιοστού σημείου κάθε νιοστή κορυφή της γραμμής επιλέγεται να διατηρηθεί και όλες οι υπόλοιπες απαλείφονται. Για παράδειγμα, διατηρείται κάθε πέμπτη (εάν $n=5$) κορυφή της γραμμής.



Σχήμα 10.15 Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών του νιοστού σημείου

Είναι προφανές, ότι ο αλγόριθμος αυτός μόνον τυχαία μπορεί να επιλέξει μια «χαρακτηριστική» κορυφή της γραμμής, δηλαδή μια κορυφή κρίσιμη για την αντιπροσώπευση της μορφής της. Ένα επιπλέον μειονέκτημα του αλγόριθμου

είναι οι σημαντικές παραμορφώσεις που επιφέρει στην τελική γραμμή. Για τους παραπάνω λόγους ο αλγόριθμος δεν έχει ευρεία χρήση. Στο Σχήμα 10.15 παρουσιάζεται παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου απλοποίησης του νιοστού σημείου.

10.5.4 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας

Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής, όπως δηλώνει και η ονομασία τους, χρησιμοποιούν τα χαρακτηριστικά των αμέσων γειτονικών κορυφών της γραμμής για την επιλογή/απαλοιφή των κορυφών. Παραδείγματα τέτοιων τοπικών κριτηρίων αποτελούν η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών, η κάθετη απόσταση ως προς τη βασική γραμμή που συνδέει τις εκατέρωθεν γειτονικές κορυφές της υπό εξέταση κορυφής, όπως επίσης η γωνιακή μεταβολή κάθε κορυφής. Εμπειρικές μελέτες έχουν αποδείξει ότι οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας παράγουν τελικές γραμμές με μικρότερες παραμορφώσεις από τους αλγόριθμους ανεξαρτήτων σημείων. Όμως, οι παραμορφώσεις που παράγουν εξακολουθούν να είναι μεγαλύτερες από ορισμένους από τους αλγορίθμους που θα περιγραφούν στη συνέχεια. Πάντως, ένα σημαντικό πλεονέκτημα των αλγορίθμων τοπικής επεξεργασίας είναι η δυνατότητα εφαρμογής τους, ταυτόχρονα με τη διαδικασία της ψηφιοποίησης των γραμμών.

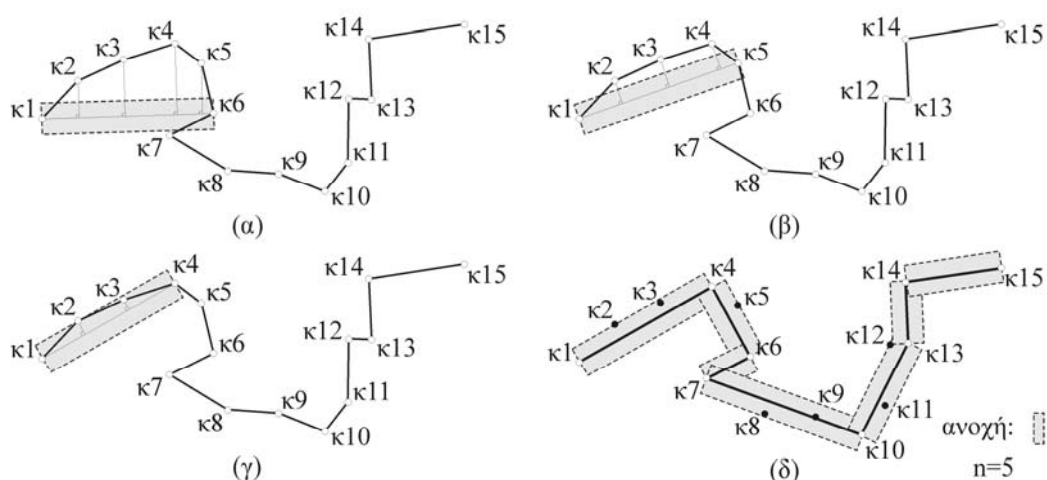
10.5.5 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας με δεσμεύσεις

Οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας εξετάζουν τις κορυφές πέραν των άμεσων γειτονικών κορυφών της γραμμής. Το εύρος του ελέγχου εξαρτάται από διάφορα κριτήρια που καθορίζονται είτε από απόσταση, είτε από γωνιακή μεταβολή, είτε τέλος από αριθμό κορυφών της γραμμής. Σε αυτήν την κατηγορία ξεχωρίζει ο αλγόριθμος του Lang.

Ο αλγόριθμος του Lang εξετάζει ένα προκαθορισμένο εύρος κορυφών (για παράδειγμα, ελέγχει τη γραμμή κάθε πέντε κορυφές) και επιλέγει/απαλείφει τις κορυφές με κριτήριο μια ανοχή που τη συγκρίνει με τις κάθετες αποστάσεις κάθε κορυφής ως προς τη γραμμή βάσης, η οποία ορίζεται κάθε φορά από την πρώτη και την τελευταία κορυφή του εύρους ελέγχου (Σχήμα 10.16).

Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 10.16α, όλες οι κάθετες αποστάσεις των ενδιαμέσων κορυφών του εύρους ελέγχου υπερέρχουν της ανοχής, οπότε η γραμμή βάσης μεταφέρεται στο προηγούμενο σημείο και επαναλαμβάνεται η διαδικασία από την αρχή (Σχήμα 10.16β) έως ότου όλες οι κάθετες αποστάσεις ως προς τη γραμμή βάσης να είναι μικρότερες από την ανοχή (Σχήμα 10.16γ). Τότε διατηρούνται τα άκρα της γραμμής βάσης και απαλείφονται όλες οι ενδιάμεσες

κορυφές. Στη συνέχεια, με τον αλγόριθμο εξετάζεται το επόμενο εύρος των κορυφών μέχρι να εξαντληθούν όλες οι κορυφές της γραμμής (Σχήμα 10.16δ).

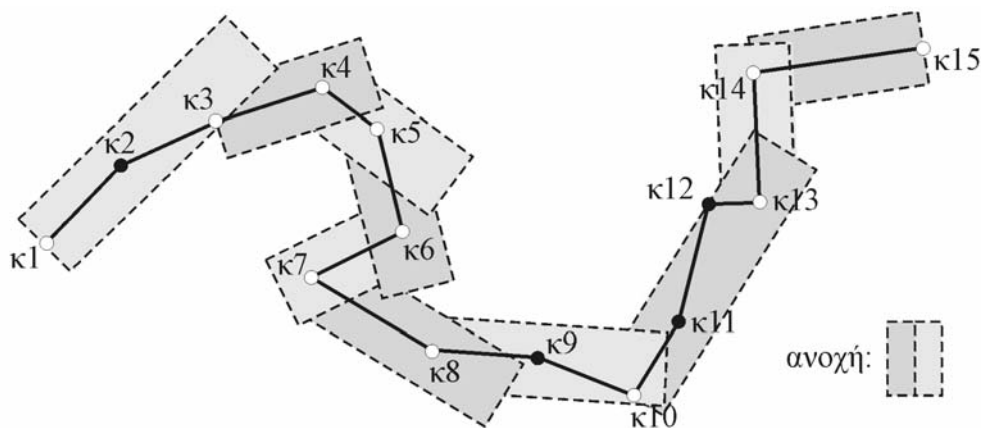


Σχήμα 9.16 Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών του Lang

10.5.6 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας χωρίς δεσμεύσεις

Στους αλγόριθμους της κατηγορίας αυτής, όπως και στην περίπτωση των αλγορίθμων τοπικής επεξεργασίας με δεσμεύσεις, ο τοπικός έλεγχος επεκτείνεται πέραν των άμεσα γειτονικών κορυφών της υπό εξέταση κορυφής. Η επέκταση της περιοχής ελέγχου δεσμεύεται από τη μορφή και την πολυπλοκότητα της γραμμής, αντί της εφαρμογής κάποιου αυθαίρετου κριτηρίου. Το παράδειγμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 10.17 παρουσιάζει τον αλγόριθμο των Reumann και Witkam.

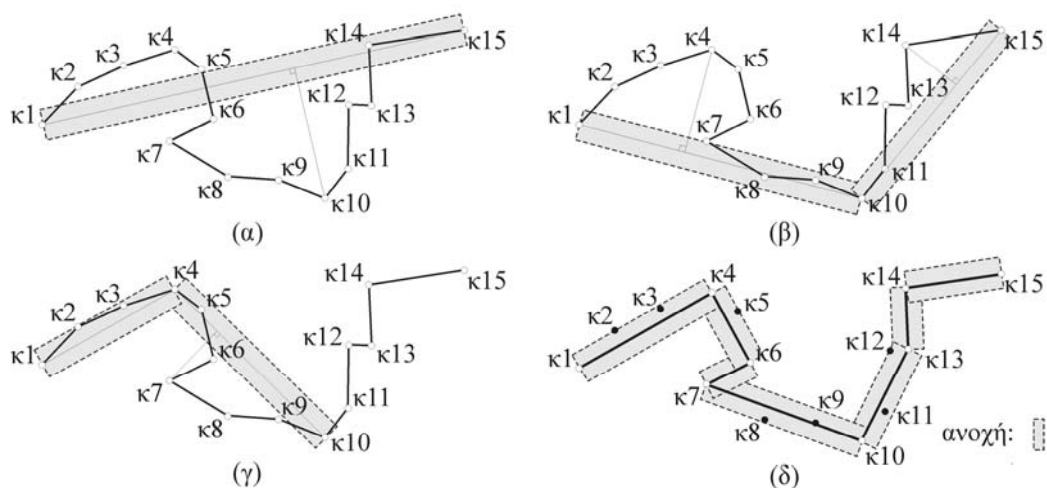
Με τον αλγόριθμο των Reumann και Witkam δημιουργείται ένας διάδρομος, ο οποίος σχεδιάζεται με δύο παράλληλες γραμμές ως προς το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν οι δύο πρώτες κορυφές της γραμμής. Το πλάτος του διαδρόμου είναι ίσο με το μέγεθος της ανοχής. Ο διάδρομος επεκτείνεται μέχρι η μία από τις δύο πλευρές του να τμήσει τη γραμμή. Τότε, όλες οι κορυφές της γραμμής που βρίσκονται μέσα στο διάδρομο εκτός της πρώτης και της τελευταίας απαλείφονται. Στη συνέχεια, σχεδιάζεται νέος διάδρομος, ο οποίος ξεκινά από την τελευταία κορυφή που επιλέχθηκε να διατηρηθεί, με την ίδια αρχή κ.ο.κ. Η διαδικασία ολοκληρώνεται μέχρι να ελεγχθούν, με τον τρόπο που περιγράφηκε, όλες οι κορυφές της γραμμής.



Σχήμα 10.17 Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών των Reumann και Witkam

10.5.7 Καθολικοί αλγόριθμοι

Οι καθολικοί αλγόριθμοι απλοποίησης γραμμών εξετάζουν ολόκληρη τη γραμμή και διαδοχικά επιλέγουν τις κρίσιμες κορυφές της ενώ απαλείφουν τις υπόλοιπες με κριτήριο μια ανοχή. Ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker, ένας αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών που χρησιμοποιείται ευρέως, ανήκει στην κατηγορία αυτή. Τέλος, στην κατηγορία των καθολικών αλγορίθμων θα περιγραφεί και ένας επιπλέον ο αλγόριθμος, ο αλγόριθμος των Visvalingam και Whyatt που βασίζεται σε επιφανειακή ανοχή, με την οποία ελέγχεται η επιφανειακή μετάθεση της γραμμής.



Σχήμα 9.18 Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών των Douglas και Peucker

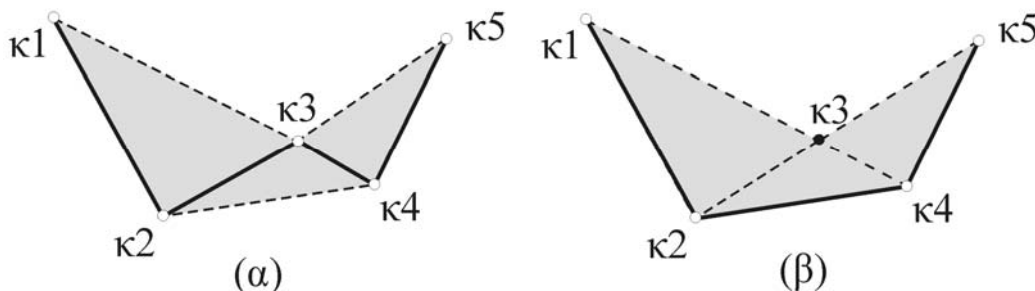
Ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker αρχικά επινοήθηκε για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα απαλοιφής των πλεοναζόντων κορυφών μιας χαρτογραφικής γραμμής κατά τη διαδικασία της ψηφιοποίησης. Ο αλγόριθμος, παρουσιάζεται στο Σχήμα 10.18. Ξεκινά συνδέοντας τα άκρα της γραμμής με μία ευθεία βάση. Στην συνέχεια, εξετάζονται οι αποστάσεις όλων των υπολοίπων κορυφών της γραμμής με τη γραμμή βάσης ως προς το εάν υπερβαίνουν ή όχι την ανοχή. Εάν οι αποστάσεις είναι όλες μικρότερες από την ανοχή, τότε οι ενδιάμεσες κορυφές απαλείφονται, αλλιώς η γραμμή διαχωρίζεται σε δύο τμήματα με βάση την κορυφή που εμφανίζει τη μέγιστη απόσταση και η διαδικασία του ελέγχου επαναλαμβάνεται ανεξάρτητα για τα δύο τμήματα της γραμμής.

Είναι πολλοί οι λόγοι για τους οποίους ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker επικράτησε έναντι των υπολοίπων, μεταξύ αυτών ο κυριότερος οφείλεται στην καθολική εφαρμογή του διαδρόμου της ανοχής. Επιπλέον, με την παρουσίαση του αλγορίθμου αναπτύχθηκε και ο κώδικας υλοποίησής του, με αποτέλεσμα να ενσωματωθεί στα περισσότερα πακέτα λογισμικού διαχείρισης χωρικών δεδομένων (ΣΓΠ). Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του αλγορίθμου αυτού οφείλεται στο γεγονός, ότι η εφαρμογή του επιφέρει τη μικρότερη μετάθεση ως προς την αρχική γραμμή συγκρινόμενος με τους άλλους αλγορίθμους.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου των Douglas και Peucker είναι η δυνατότητα της διαδοχικής ιεραρχικής υποδιαίρεσης της εξεταζόμενης γραμμής, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί όταν παρουσιάζεται ανάγκη μια γραμμή να διαχωριστεί σε ανεξάρτητα τμήματα. Παρ' όλα τα πλεονεκτήματα ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker παρουσιάζει ευαισθησία στη διατήρηση κορυφών, που αποδίδουν τη μορφή της σφήνας στη γραμμή, οι οποίες πιθανά να έχουν προκύψει από σφάλματα ψηφιοποίησης και επιθυμούμε να απαλειφθούν.

Ένας αλγόριθμος, ο οποίος ξεπερνά με επιτυχία το τελευταίο πρόβλημα που διατυπώθηκε, είναι ο αλγόριθμος των Visvalingam και Whyatt, γιατί βασίζεται σε κριτήριο επιφανειακής ανοχής για την απαλοιφή των κορυφών της γραμμής. Ο αλγόριθμος βασίζεται σε ένα μέτρο εκτίμησης της επιφανειακής παραμόρφωσης της γραμμής, το οποίο ονομάζεται επιφάνεια μετάθεσης, που ορίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η κάθε κορυφή της γραμμής, με εξαίρεση των άκρων της, με τις άμεσα γειτονικές της (Σχήμα 10.19α). Στη διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου η γραμμή εξετάζεται με διαδοχικές επαναλήψεις. Σε κάθε επανάληψη η κορυφή με τη μικρότερη επιφάνεια μετάθεσης, ως λιγότερο σημαντική, απαλείφεται. Όμως, οι συντεταγμένες της μαζί με την τιμή του εμβαδού της επιφάνειας μετάθεσης καταγράφονται σε ξεχωριστό αρχείο. Στη συνέχεια, επειδή έχουν μεταβληθεί οι επιφάνειες μετάθεσης των άμεσα γειτονικών κορυφών, λόγω της απαλοιφής, υπολογίζονται εκ νέου (Σχήμα 10.19β). Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται μέχρι να καταγραφούν κατά αύξουσα σειρά ως προς την επιφάνεια μετάθεσης όλες οι

κορυφές της γραμμής, εκτός από τα δύο άκρα και τελικά απαλείφονται όσες κορυφές συσχετίζονται με επιφάνειες μετάθεσης μικρότερης από αυτήν της ανοχής.



Σχήμα 10.19 Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών των Visvalingam και Whyatt

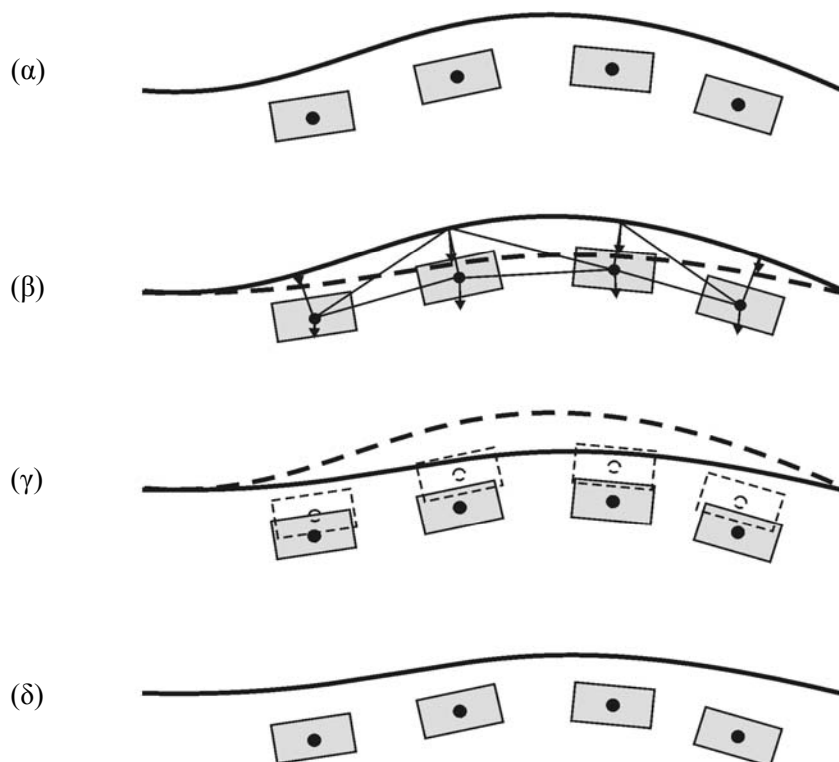
Ο αλγόριθμος των Visvalingam και Whyatt παρουσιάζει ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα, γιατί η απλοποίηση της γραμμής γίνεται με τρόπο που να διατηρείται η συνολική μορφή της, ενώ με τον αλγόριθμο των Douglas και Peucker δίνεται έμφαση στην ελαχιστοποίηση των μεταθέσεων της παράγωγης γραμμής σε σχέση με την αρχική.

10.6 Το πρόβλημα της επικάλυψης των γραφικών αντικειμένων κατά τη γενίκευση

Ένα βασικό πρόβλημα που παρουσιάζεται κατά τη γενίκευση εστιάζεται στο γεγονός ότι οι τελεστές της επιλογής/απαλοιφής και απλοποίησης επιδρούν με ανεξάρτητο τρόπο στα γραφικά αντικείμενα. Η επιτυχημένη αντιμετώπιση του χαρτογραφικού προβλήματος της γενίκευσης, θα προϋπέθετε τη διαμόρφωση ενός ολιστικού χαρακτήρα τρόπου προσέγγισης με καταγραφή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των χαρτογραφικών γραφικών αντικειμένων. Οι συνέπειες της εφαρμογής κάθε τελεστή γενίκευσης χρειάζεται να μπορούν να προβλεφθούν με σκοπό να γίνει απαλοιφή όλων των πιθανών επικαλύψεων μεταξύ των γραφικών αντικειμένων, με γνώμονα τις βασικές αρχές της γενίκευσης.

Το πρόβλημα της επικάλυψης των γραφικών αντικειμένων κατά τη γενίκευση δεν έχει βρει ακόμα στη χαρτογραφία την οριστική επίλυσή του. Στην κατεύθυνση της αντιμετώπισης του παραπάνω προβλήματος, σημαντική είναι η συνεισφορά προσπαθειών που στηρίζονται σε μεθόδους καταγραφής της χαρτογραφικής γνώσης και ελέγχου της γενίκευσης με τη βοήθεια ενός συστήματος που καθοδηγείται από γνωστικούς κανόνες. Όμως, τα αποτελέσματα εφαρμογής ανάλογων συστημάτων μειονεκτούν ως προς το ότι η γνώση των χαρτογράφων για τον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται η γενίκευση, επηρεάζεται

σε σημαντικό βαθμό από την αναγνώριση του είδους κάθε διακριτής χωρικής οντότητας και των μεταξύ τους χωρικών σχέσεων. Για αυτό το λόγο, χρειάζεται να προηγηθεί της διαδικασίας εφαρμογής των τελεστών της γενίκευσης, μια διαδικασία αναγνώρισης της δομής των χωρικών οντοτήτων. Η διαδικασία της αναγνώρισης, μέχρι σήμερα, μπορεί να γίνει μόνον από τον άνθρωπο.



Σχήμα 10.20 Παράδειγμα αντιμετώπισης του προβλήματος της επικάλυψης

Στο Σχήμα 10.20 παρουσιάζεται μια τεχνική αντιμετώπισης του προβλήματος επικάλυψης των γραφικών αντικειμένων, που αναπτύχθηκε στο εθνικό χαρτογραφικό ινστιτούτο της Γαλλίας IGN (Institut Geographique National). Η τεχνική που προτείνεται εξετάζει την περίπτωση που τα γραφικά αντικείμενα απεικονίζουν, για παράδειγμα, ένα δρόμο και τα γύρω από αυτόν κτίρια (Σχήμα 10.20α). Ας δεχθούμε ως υπόθεση εργασίας ότι η διαδικασία της απλοποίησης του δρόμου, μεταθέτει τη θέση του με τρόπο που εμφανίζεται επικάλυψη με τα κτίρια (Σχήμα 10.20β). Σε πρώτη φάση, τα κέντρα των κτιρίων και οι προβολές τους στο δρόμο δομούνται σε τριγωνικό δίκτυο. Με βάση τις σχέσεις εγγύτητας μεταξύ του δρόμου και των κτιρίων υπολογίζονται τα διανύσματα μετάθεσης του δρόμου και στη συνέχεια από αυτά προσδιορίζονται

διανύσματα μετάθεσης για τα κτίρια κατάλληλα να εξαλείψουν τις ενδεχόμενες επικαλύψεις. Τέλος, τα διανύσματα μετάθεσης εφαρμόζονται στους δρόμους και στα κτίρια (Σχήμα 10.20γ). Στο παράγωγο αποτέλεσμα (Σχήμα 10.20δ), οι τελικές θέσεις των γραφικών αντικειμένων δεν παρουσιάζουν επικαλύψεις.

10.7 Βιβλιογραφία

- Buttenfield, B. P. and R. B. McMaster (Eds.) *Map generalization: Making rules for knowledge representation*. Longman Scientific & Technical, Essex, 110101, p. 245.
- Clarke, K. C. *Analytical and Computer Cartography*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 110100, p. 2100.
- Cromley, R. G. *Digital Cartography*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 110102, p. 317.
- João, E. M. *Causes and Consequences of Map Generalisation*. Taylor & Francis, London, 110108, p. 266.
- Jones, Ch. *Geographical Information Systems and Computer Cartography*. Addison Wesley Longman Ltd., Essex, 110107, p. 3110.
- Mackaness, W. "Integration and evaluation of map generalization". In *Map generalization: Making rules for knowledge representation*. (Eds. B. P. Buttenfield and R. B. McMaster). Longman Scientific & Technical, Essex, 110101, pp. 217-226.
- McMaster, R. B. and K. S. Shea. *Generalization in Digital Cartography*. Association of American Geographers, Washington, 110102, p. 134.
- Nakos, B. "Comparison of Manual Versus Digital Line Simplification". *Proceedings of 3rd Workshop on Automated Map Generalization*. International Cartographic Association, Commission of Map Generalization, Ottawa, 1101010.
- <http://www.survey.ntua.gr/main/labs/carto/Comparison.PDF>
- Shea K. S. and R. B. McMaster. "Cartographic Generalization in a Digital Environment: When and How to Generalize". *Proceedings of AUTOCARTO 10*, Baltimore, Maryland, 110810, pp. 56-67.
- Töpfer, F. and Pillewizer, W. "The Principles of Selection". *The Cartographic Journal*, Vol. 3, No. 1, 11066, pp. 10-16.
- Weibel, R. "Generalization of Spatial Data: Principles and Selected Algorithms". In *Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems* (Eds. M. van Frevel, J. Nievergelt, Th. Roos and P. Widmayer). Springer-Verlag, Berlin, 110107, pp. 1010-152.

Παράρτημα

ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Π.1 Εισαγωγή

Σε κάθε χώρα οι χάρτες εκδίδονται από δημόσιους ή ιδιωτικούς φορείς. Οι δημόσιοι φορείς, και αυτό χωρίς να είναι απόλυτος κανόνας, συνήθως εκδίδουν τοπογραφικούς ή θεματικούς χάρτες όλου του εύρους των κλιμάκων. Οι ιδιωτικοί φορείς κυρίως εκδίδουν τουριστικούς χάρτες, οδηγούς πόλεων ή χάρτες ειδικού σκοπού.

Τη σημαντικότερη χαρτογραφική δραστηριότητα στην Ελλάδα έχει η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ). Το παράδειγμα αυτό χαρακτήριζε και άλλες χώρες, ώστε παραδοσιακά να έχει επικρατήσει στρατιωτικές υπηρεσίες να αποτελούν τους πιο βασικούς χαρτογραφικούς φορείς (για παράδειγμα στο Ηνωμένο Βασίλειο η αντίστοιχη χαρτογραφική υπηρεσία είναι η Ordnance Survey). Πριν μια εισοσαετία στη χώρα μας ιδρύθηκε ένας δημόσιος χαρτογραφικός φορέας, ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφήσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ) που υπάγεται στο Υπουργείο Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων. Σκοπός του ΟΚΧΕ είναι να αποτελέσει το βασικό κρατικό χαρτογραφικό φορέα της χώρας, ώστε να μεταφερθεί το κέντρο βάρους των χαρτογραφικών δραστηριοτήτων από το στρατό στο δημόσιο. Στη συνέχεια, δίνεται μια συνοπτική αναφορά των πιο βασικών φορέων έκδοσης χαρτών στην Ελλάδα.

Π.2 Σειρές χαρτών Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού

Η ΓΥΣ όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα έχει τη σημαντικότερη χαρτογραφική δραστηριότητα στην χώρα μας και εκδίδει ένα μεγάλο εύρος, κυρίως τοπογραφικών, χαρτών. Σχεδόν το σύνολο των χαρτογραφικών σειρών που παράγονται και χορηγούνται στο κοινό από τη ΓΥΣ είναι στην Εγκάρσια

Μερκατορική Προβολή, όπως εφαρμόζεται στο σύστημα UTM. Θα διακρίνουμε τους χάρτες που εκδίδονται από τη ΓΥΣ σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την κλίμακα.

Π.2.1 Χάρτες μικρής κλίμακας

Στην κατηγορία των μικρών κλιμάκων εκδίδονται πέντε χάρτες:

1. Χάρτης της Ελλάδας που απεικονίζεται η ακτογραμμή και τα σύνορα της χώρας σε κλίμακες 1:2.000.000 και 1:2.500.000. Ο χάρτης αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόβαθρο για τη σύνθεση θεματικών χαρτών.
2. Χάρτης του οδικού δικτύου σε κλίμακα 1:1.000.000.
3. Γεωφυσικός χάρτης της Ελλάδας με σχολική κυρίως χρήση, σε κλίμακα 1:500.000.
4. Στρατηγικός χάρτης Λατινικής ονοματολογίας σε κλίμακα 1:500.000.
5. Στρατηγικός χάρτης σε κλίμακα 1:400.000.

Π.2.2 Χάρτες μεσαίας κλίμακας

Στην κατηγορία αυτή εκδίδονται τέσσερις σειρές¹ χαρτών:

1. Σειρά στρατηγικής χρήσης με Λατινική ονοματολογία κλίμακας 1:250.000.
2. Σειρά στρατηγικής χρήσης σε κλίμακα 1:200.000.
3. Σειρά γενικής χρήσης με κάλυψη ολόκληρης της χώρας σε κλίμακα 1:100.000. Οι χάρτες της σειράς είναι 136.
4. Η σειρά γενικής χρήσης με κάλυψη ολόκληρης της χώρας σε κλίμακα 1:50.000. Η σειρά αυτή αποτελεί την πιο γνωστή έκδοση χάρτη που παρέχει η ΓΥΣ. Οι χάρτες της σειράς είναι 387.

Π.2.3 Χάρτες μεγάλης κλίμακας

Στην κατηγορία αυτή εκδίδονται οι παρακάτω σειρές χαρτών:

1. Σειρές κλίμακας 1:25.000 και 1:20.000 που έχουν περιορισμένη κάλυψη.
2. Σειρά κλίμακας 1:10.000 με περιορισμένη κάλυψη.

¹ Ως χαρτογραφική σειρά θεωρείται μια διανομή διαδοχικών φύλλων χαρτών ίδιας κλίμακας που καλύπτουν μια ευρύτερη περιοχή ή και την έκταση μιας χώρας.

3. Σειρά κλίμακας 1:5.000, που αποτελεί και το βασικό χάρτη της χώρας. Η σειρά αυτή καλύπτει σχεδόν ολόκληρη την χώρα. Παρουσιάζει, όμως, ορισμένα προβλήματα: σημαντικός αριθμός φύλλων δεν είναι ενημερωμένος και η ποιότητα των χαρτών δεν είναι η καλύτερη δυνατή.

Π.3 Σειρές χαρτών Υδρογραφικής Υπηρεσίας Πολεμικού Ναυτικού

Σε πλήρη αντιστοιχία με τη ΓΥΣ η ΥΥΠΝ αποτελεί τη στρατιωτική υπηρεσία με χαρτογραφικές δραστηριότητες στον χώρο που καταλαμβάνεται από θάλασσα. Οι χάρτες που εκδίδονται από την ΥΥΠΝ είναι οι υδρογραφικοί χάρτες, δηλαδή ναυτικοί χάρτες και λιμενοδείκτες και μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες.

1. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει διεθνείς σειρές ναυτικών χαρτών της Μεσογείου σε κλίμακες 1:4.200.000 και 1:2.250.000.
2. Στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται οι ναυτικοί χάρτες του Ελληνικού θαλάσσιου χώρου σε κλίμακες 1:1.750.000, 1:1.000.000 και 1:500.000.
3. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τους ναυτικούς χάρτες μεσαίων κλιμάκων δηλαδή: 1:250.000, 1:150.000, 1:100.000, 1:75.000 και 1:50.000.
4. Στην τελευταία ομάδα ανήκουν οι λιμενοδείκτες, ναυτικοί χάρτες μεγάλης κλίμακας. Οι κλίμακες των λιμενοδεικτών παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία (1:40.000, 1:25.000, 1:20.000, 1:15.000, 1:12.500, 1:10.000, 1:7.500, 1:6.000, 1:5.000, 1:4.000, 1:3.000, 1:2.500 και 1:2.000).

Όλοι οι χάρτες της ΥΥΠΝ είναι στην Ορθή Μερκατορική Προβολή που χρησιμοποιείται στην ναυτιλία.

Π.4 Σειρές χαρτών Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας

Η ΥΠΑ εκδίδει για τις ανάγκες της δύο σειρές αεροναυτικών χαρτών που καλύπτουν τον Ελληνικό χώρο. Οι σειρές αυτές είναι στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή, όπως εφαρμόζεται στο σύστημα UTM και έχουν κλίμακες αντίστοιχα 1:1.000.000 και 1:500.000.

Π.5 Χάρτες Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας

Η ΕΣΥΕ παρέχει μια σειρά τοπογραφικών χαρτών για ολόκληρη τη χώρα σε κλίμακα 1:200.000. Κάθε χάρτης της σειράς απεικονίζει και ένα νομό της χώρας καθώς και όλα τα διοικητικά όρια σε αυτόν. Οι χάρτες της σειράς είναι 52. Τέλος,

η ΕΣΥΕ διαχειρίζεται χάρτες κλίμακας 1:5.000 για κάθε οικισμό της χώρας με πληθυσμό μεγαλύτερο από 1500 κατοίκους.

Π.6 Χάρτες Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων

Το ΥΠΕΧΩΔΕ παρέχει τους τοπογραφικούς χάρτες μεγάλης κλίμακας (ή τοπογραφικά διαγράμματα) που καλύπτουν τις αστικές περιοχές. Οι χάρτες αυτοί είναι στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή όπως αυτή εφαρμόζεται στο σύστημα ΕΜΠ-3° και έχουν κλίμακες 1:2.000 και 1:1.000.

Π.7 Βιβλιογραφία

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. *Περί χαρτογραφήσεως-αεροφωτογραφήσεως και χορηγήσεως χαρτογραφικού-αεροφωτογραφικού υλικού εις μη στρατιωτικές υπηρεσίας*. Αρχηγείον Ενόπλων Δυνάμεων, 2α Μικτή Επιτελική Ομάς. Αθήνα, 1971, σελ. 25.

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. *Βιβλίο διαιρέσεως διαγραμμάτων κλίμακας 1:1.000*. Α' Διεύθυνση, Υποδιεύθυνση Τοπογραφίας, Αθήνα, 1990, σελ. 171.

Υδρογραφική Υπηρεσία Πολεμικού Ναυτικού. *Συνοπτικό Ευρετήριο Ναυτικών Χαρτών Ελληνικής Εκδόσεως*. Τμήμα Χαρτογραφίας, Αθήνα, 1989.