



ΦΙΛΤΡΑ KALMAN

Με έμφαση στη σχέση τους με τη
Μέθοδο των Ελαχίστων
Τετραγώνων

Δημήτρης Δεληκαράογλου
Βασίλης Μασσίνας (Ασκήσεις)

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Γιατί ο όρος φίλτρο;

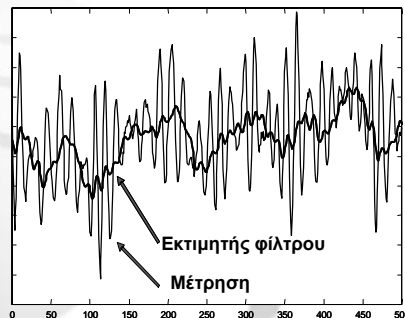
- Συνήθως ο όρος φίλτρο υποδηλώνει μια διαδικασία απομάκρυνσης μη επιθυμητών στοιχείων
- Από το λατινικό όρο *felt* : το υλικό για το φιλτράρισμα υγρών
- Στη εποχή των ραδιολυχνίων: αναλογικά κυκλώματα απομάκρυνσης ανεπιθύμητων ηλεκτρονικών σημάτων
 - Αποδυνάμωση ανεπιθύμητων συχνοτήτων
- Στις δεκαετίες '30 & '40: Διαχωρισμός του (ανεπιθύμητου) θορύβου από το (χρήσιμο) σήμα

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Φιλτράρισμα – Γιατί, που, πότε

- **Φιλτράρισμα Θορύβου των μετρήσεων** - Τα περισσότερα σήματα αισθητήρων επηρεάζονται από κάποιο θόρυβο που μπορεί να ασκήσει αρνητική επίδραση στην απόδοση του αισθητήρα ή στον έλεγχο των μετρήσεων. Με το φιλτράρισμα επιτυγχάνουμε μια αλλαγή στο εύρος των συχνοτήτων ενός σήματος ενδιαφέροντος ή ακόμα και την αποβολή μερικών τμημάτων των συχνοτήτων του σήματος

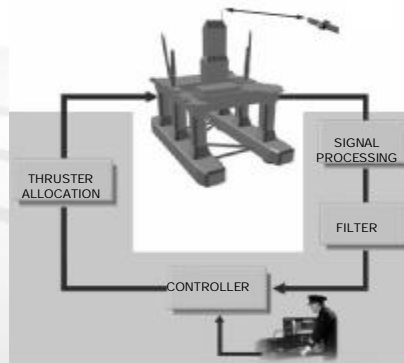


Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Φιλτράρισμα – Γιατί, που, πότε

- **Αναδημιουργία μη-μετρημένων στοιχείων** - Για πολλές εφαρμογές, σημαντικές δυναμικές διεργασίες που τις επηρεάζουν δεν μετριοούνται. Αντ' αυτού μοντελοποιούνται με μεθόδους βασισμένες σε μαθηματικά φίλτρα (*state estimation techniques*) προκειμένου να αναδημιουργηθούν οι ελλειπείς μετρήσεις που με τη σειρά τους χρησιμοποιούνται σε μοντέλα/συστήματα ελέγχου ανατροφοδότησης.

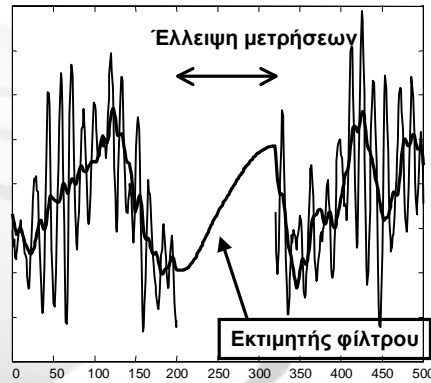


Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Φιλτράρισμα – Γιατί, που, πότε

- **Τυφλή πλοήγηση (Dead Reckoning)**. Κάθε είδος εξοπλισμού κάποτε αποτυγχάνει σύμφωνα με κάποιο ποσοστό αποτυχίας. Ή οι μετρήσεις που εκτελούνται με αυτό μπορεί να αστοχήσουν για διάφορους φυσικούς ή ενδογενείς λόγους. Η χρήση των φίλτρων αντικαθιστά απολεσθείσες πρωτογενείς μετρήσεις με αντίστοιχες προβλέψεις για κάποια χρονική περίοδο.



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Rudolf E. Kalman

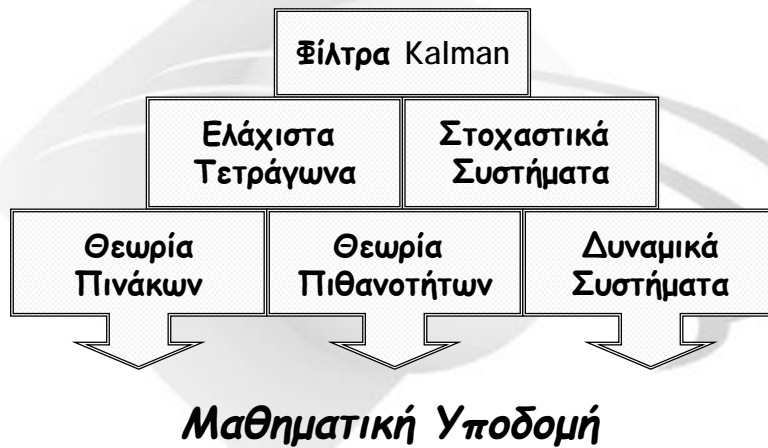
- Μαθηματικός (γεν. 1930 στην Ουγγαρία)
 - Σπούδασε στο MIT / Columbia
 - Ανέπτυξε τη θεωρία των φίλτρων που φέρουν το όνομα του την περίοδο 1960/61
 - Βασισμένα στη χρήση τεχνικών "κατάστασης-χρόνου" και επαναλαμβανόμενων αλγόριθμων
 - Απαλοιφή ανεπιθύμητου θορύβου από μετρήσεις
 - Με ευρεία χρήση σε ποικίλες εφαρμογές (π.χ. Από τις πρώτες χρήσεις στις διαστημικές αποστολές Apollo)
- § 1985, αποδέκτης του Kyoto Prize (ιαπωνικό βραβείο Nobel)



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μέρος της Θεωρίας των Συστημάτων Ελέγχου Control Theory



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Τι είναι ένα φίλτρο Kalman;

- **ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ** είναι ένας εκτιμητής του λεγόμενου **γραμμικού προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων**
- Όπου καλείται κανείς να υπολογίσει τη στιγμιαία **"κατάσταση"** (*state*) ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος που διαταράσσεται από **"λευκό θόρυβο"** (*white noise*)
- δηλ., από μετρήσεις που σχετίζονται γραμμικά με τη δυναμική κατάσταση του συστήματος αλλά είναι αλλοιωμένες από **"λευκό θόρυβο"**
- Ο εκτιμητής είναι στατιστικά βέλτιστος ως προς οποιαδήποτε συνάρτηση του τετραγώνου του σφάλματος εκτίμησης ($f(\varepsilon^2) = \min$)

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Τι είναι ένα φίλτρο Kalman;

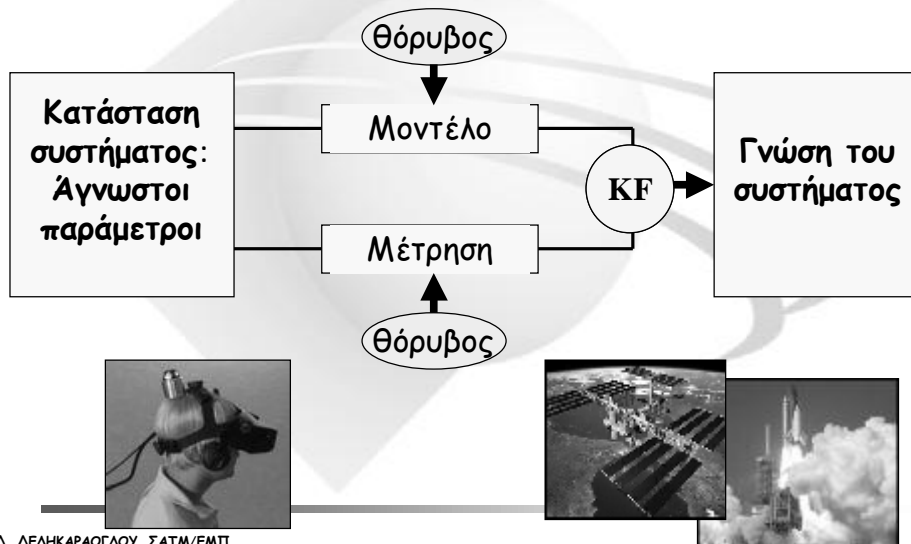
- ΠΡΑΚΤΙΚΑ είναι ένα μοναδικό εργαλείο για τον έλεγχο πολύπλοκων δυναμικών διεργασιών (π.χ. η ροή ενός πλημμυρισμένου ποταμού, οι τιμές χρηματιστηριακών μετοχών) ή συστημάτων σε οχήματα, πλοία, αεροσκάφη, δορυφόρους, ...
- Παρέχει ένα πλήρη στατιστικό χαρακτηρισμό ενός δυναμικού προβλήματος, δηλ. λαμβάνει υπόψη τη διανομή των πιθανοτήτων (*Probability Distributions* ® γνώση του πραγματικού κόσμου), για όλες τις μεταβλητές που επιφορτίζεται να υπολογίσει
 - Κάνει δυνατή την πρόβλεψη της δυναμικής κατάστασης ενός συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Χρήση των φίλτρων Kalman

- Πού και πότε?



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Τυπικές ανάγκες

- Τύποι αισθητήρων που χρησιμοποιούνται
- Οι θέσεις και οι προσανατολισμοί των διαφόρων τύπων αισθητήρων όσον αφορά το εκάστοτε υπό μελέτη σύστημα
- Τα επιτρεπόμενα χαρακτηριστικά και επίπεδα σφαλμάτων των αισθητήρων
- Οι μέθοδοι ομαλοποίησης (smoothing) των θορύβων των αισθητήρων
- Τα ποσοστά δειγματοληψίας μετρήσεων από κάθε αισθητήρα
- Επίπεδο απλοποίησης των αναγκαίων μοντέλων, προκειμένου να μειωθούν οι απαιτήσεις υλοποίησης της εκάστοτε εφαρμογής

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Παραδείγματα εφαρμογής Φίλτρων Kalman

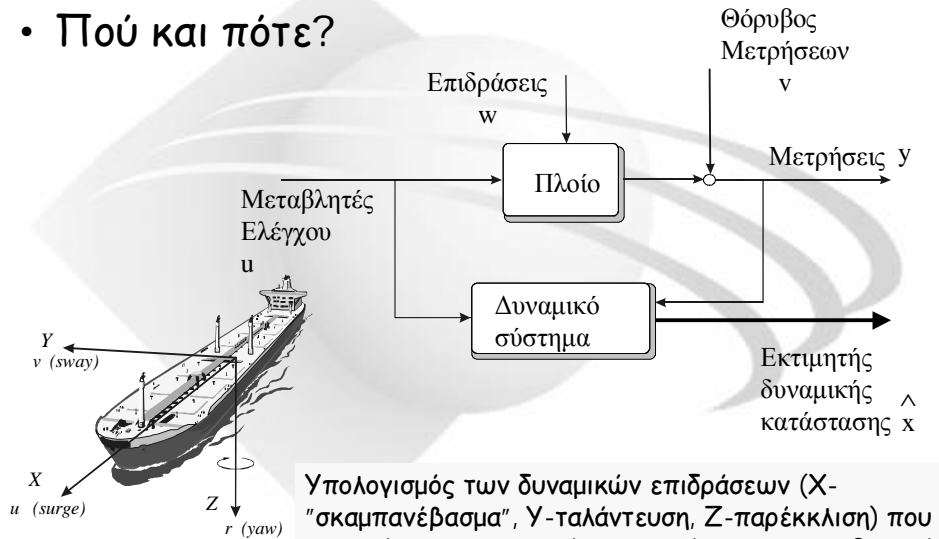
ΕΦΑΡΜΟΓΗ	ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ
Έλεγχος διεργασίας	Χημικές εγκαταστάσεις	<ul style="list-style-type: none">• Πίεσης• Θερμοκρασίας• Ποσοστό ροής• Ανίχνευσης αερίων
Πρόβλεψη πλημμύρων	Ροή υδάτων ποταμού	<ul style="list-style-type: none">• Στάθμης νερού• Βροχόμετρα• Ραντάρ καιρού
Παρακολούθηση δορυφόρων	Τροχιακή κίνηση	<ul style="list-style-type: none">• Ραντάρ• Αστρολάβοι
Πλοήγηση	Πλοία	<ul style="list-style-type: none">• Εξάντες• Γυροσκοπία• Αδρανειακά συστήματα• GPS

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Χρήση των φίλτρων Kalman

- Πού και πότε?



Υπολογισμός των δυναμικών επιδράσεων (X- "σκαμπανέβασμα", Y-ταλάντευση, Z-παρέκκλιση) που απαιτείται για να κρατήσει το σκάφος στην επιθυμητή θέση και πορεία

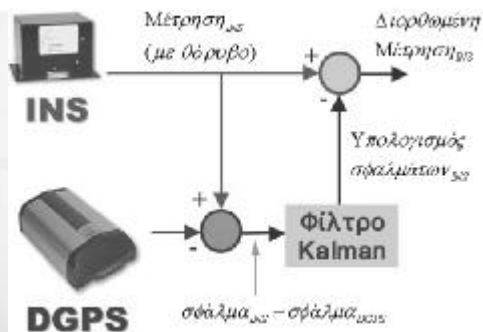
Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Sensor Fusion

Σύνθεση πληροφοριών αισθητήρων

- π.χ. πλοήγηση σκαφών/αεροσκαφών, με τη χρήση μετρήσεων GPS, INS, γυροπυξίδων, ...
- Βασικό πρόβλημα αποτελεί η εκτίμηση ενός φυσικού μεγέθους του συστήματος (π.χ. η θέση του σκάφους), από τον συνδυασμό n διαφορετικών ενδείξεων $z_i, i=1,2,3,...,n$ από διαφορετικούς αισθητήρες



• Το πρόβλημα περιπλέκεται αν οι μετρήσεις από τους διαφορετικούς αισθητήρες δεν έχουν την ίδια αξιοπιστία

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Sensor Fusion

Σύνθεση πληροφοριών αισθητήρων

- **Περίπτωση 1:** Όλες οι μετρήσεις z_i μιας μεταβλητής x έχουν την ίδια αξιοπιστία και καθεμία είναι αποτέλεσμα μιας στοχαστικής διαδικασίας (*Gaussian process*) με μέση τιμή z_m και διασπορά $\sigma_i = \sigma = \text{σταθ.}$
- Η εκτίμηση της παραμέτρου ενδιαφέροντος x που προκύπτει από όλες τις μετρήσεις z_i υπολογίζεται εύκολα ως $\hat{x} = \frac{\sum z_i}{n}$ και $S_{\hat{x}} = \frac{\sum S_i}{n}$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Sensor Fusion

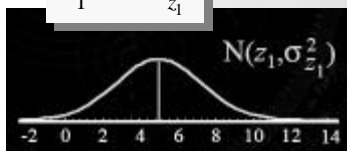
Σύνθεση πληροφοριών αισθητήρων

- **Περίπτωση 2:** Οι μετρήσεις z_i έχουν διαφορετική αξιοπιστία, δηλαδή για κάθε z_i έχουμε διαφορετική διασπορά $\sigma_i \Rightarrow$ για τη συνολική εκτίμηση της μεταβλητής x , κάθε μέτρηση πρέπει να ληφθεί υπόψη με διαφορετικό βάρος (*weighted mean*)

$$z_1, S_{z_1}^2$$

$$\hat{x} = z_1$$

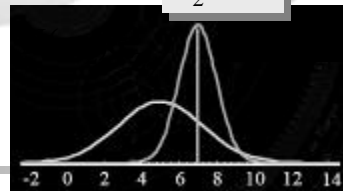
$$\hat{S}_1^2 = S_{z_1}^2$$



$$z_2, S_{z_2}^2$$

$$\hat{x}_2 = ?$$

$$\hat{S}_2^2 = ?$$



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Sensor Fusion

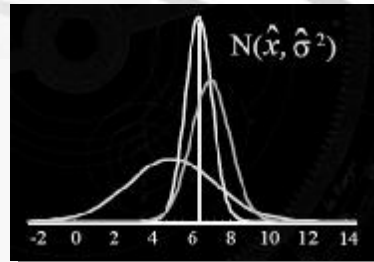
Σύνθεση πληροφοριών αισθητήρων

- Με την υπόθεση της κανονικής (Gaussian) κατανομής, η συνολική βέλτιστη εκτίμηση της μεταβλητής x , συμπεριλαμβανομένης και της μέτρησης z_2 υπολογίζεται ως

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + K_2(z_2 - \hat{x}_1)$$

$$K_2 = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_1^2 + S_{z_2}^2}$$

$$\frac{1}{\hat{S}_2^2} = \frac{1}{\hat{S}_1^2 + S_{z_2}^2} \Rightarrow \hat{S}_2^2 = \hat{S}_1^2 - K_2 \hat{S}_1^2$$



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Sensor Fusion

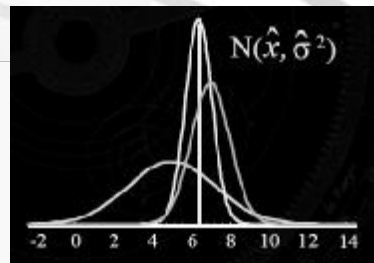
Σύνθεση πληροφοριών αισθητήρων

- Αυτή είναι η βασική δομή ενός αναδρομικού φίλτρου Kalman, για τον αναδρομικό υπολογισμό, σε κάθε χρονική στιγμή, της "ανανεωμένης" βέλτιστης εκτίμησης της μεταβλητής ενδιαφέροντος και της διασποράς της (δηλ. των στοχαστικών ιδιοτήτων της)

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + K_2(z_2 - \hat{x}_1)$$

$$K_2 = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_1^2 + S_{z_2}^2}$$

$$\frac{1}{\hat{S}_2^2} = \frac{1}{\hat{S}_1^2 + S_{z_2}^2} \Rightarrow \hat{S}_2^2 = \hat{S}_1^2 - K_2 \hat{S}_1^2$$



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Το Απλό Μοντέλο

Ελαχίστων Τετραγώνων

Ήδη από το 1795, ο Gauss διαπίστωσε ότι από ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2n} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ h_{l1} & h_{l2} & h_{l3} & \cdots & h_{ln} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

Πίνακας σχεδιασμού
Παράμετροι
Μετρήσεις

ή της μορφής $Hx = z$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Το Απλό Μοντέλο

Ελαχίστων Τετραγώνων

Είναι δυνατόν να υπολογισθεί ένας εκτιμητής \hat{x} που θα ελαχιστοποιούσε το σφάλμα $H\hat{x} - z$ όπου

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2(\hat{x}) &= |H\hat{x} - z|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n h_{ij} \hat{x}_j - z_i \right]^2
 \end{aligned}$$

$\varepsilon^2(\hat{x}) \rightarrow \infty$ για κάθε $\hat{x} \rightarrow \pm\infty$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Το Απλό Μοντέλο

Ελαχίστων Τετραγώνων

Αυτό επιτυγχάνεται αν (για $k=1,2,3,\dots,n$)

$$0 = \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \hat{x}_k}$$

i -σειρά του πίνακα
 H επί $\hat{x} - z$

$$= 2 \sum_{i=1}^m h_{ik} \left[\sum_{j=1}^n h_{ij} \hat{x}_j - z_i \right] = J_{min}$$

k -στήλη του πίνακα H

Κριτήριο
βελτιστοποίησης

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Το Απλό Μοντέλο

Ελαχίστων Τετραγώνων

Αυτό επιτυγχάνεται αν (για $k=1,2,3,\dots,n$)

$$\begin{aligned} 0 &= 2H^T[H\hat{x} - z] \\ &= 2H^T H\hat{x} - 2H^T z \end{aligned}$$

Και η ζητούμενη λύση προκύπτει από το γνωστό σύστημα των Κανονικών Εξισώσεων

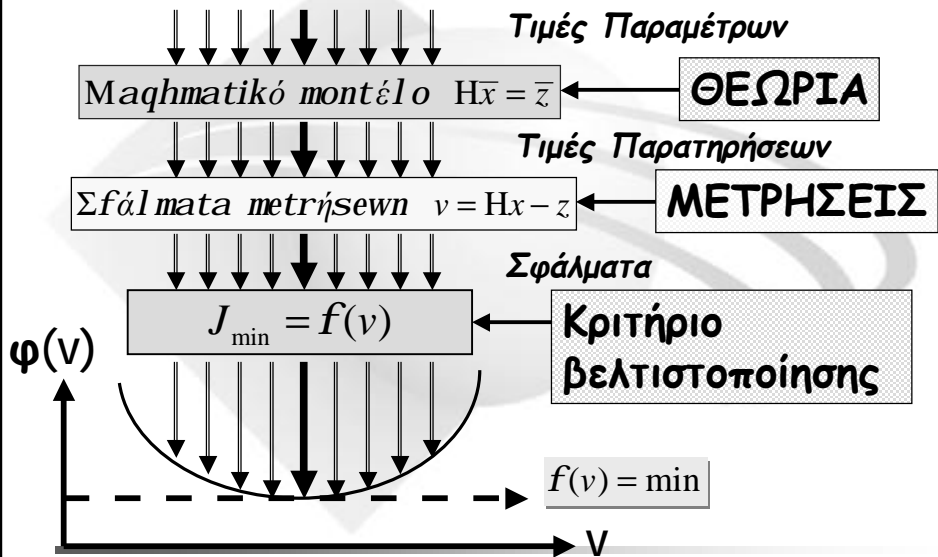
Gramian
matrix

$$\mathbf{N} \left\langle H^T H \hat{x} = H^T z, \right\rangle \hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T z$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Βέλτιστη Εκτίμηση Παραμέτρων με Ελάχιστα Τετράγωνα



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Το Απλό Μοντέλο Ελαχίστων Τετραγώνων

Το ελάχιστο συνολικό σφάλμα είναι

$$\begin{aligned}
 f &= (z - H\hat{x})^T (z - H\hat{x}) \\
 &= (z - H(H^T H)^{-1} H^T z)^T (z - H(H^T H)^{-1} H^T z) \\
 &= z^T (I - H(H^T H)^{-1} H^T) (I - H(H^T H)^{-1} H^T) z \\
 &= z^T (I - H(H^T H)^{-1} H^T) z = \boxed{z^T (z - H\hat{x})}
 \end{aligned}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Το Απλό Μοντέλο Ελαχίστων Τετραγώνων

Στη περίπτωση βαρών η λύση προκύπτει

$$\text{ως } \hat{x} = (H^T P H)^{-1} H^T P z$$

Όπου ο πίνακας βαρών $P = S_o^2 \sum_z^{-1}$

και το κριτήριο βελτιστοποίησης εκφράζεται

$$\begin{aligned} \text{ως } f &= (z - H\hat{x})^T P (z - H\hat{x}) \\ &= z^T (P - PH(H^T PH)^{-1} H^T P) z \end{aligned}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Χρήση των φίλτρων Kalman

- Περιγραφή της δυναμικής κατάστασης, μοντέλου και μετρήσεων υπό μορφή πινάκων
- Υπολογισμοί σε διαδοχικά βήματα



- Κατάλληλη διαχείριση του θορύβου

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Διακριτά φίλτρα Kalman



- Το φίλτρο Kalman υπολογίζει μια δυναμική διεργασία με τη χρήση μιας μορφής ελεγχόμενης ανατροφοδότησης
- Αρχικά υπολογίζει τη δυναμική κατάσταση σε κάποια χρονική στιγμή και έπειτα λαμβάνει την ανατροφοδότηση στη μορφή μετρήσεων που περιέχουν θόρυβο.
- Ως εκ τούτου, οι εξισώσεις του φίλτρου που υλοποιούν την εν λόγω διαδικασία είναι δύο ειδών
 - **Εξισώσεις χρονικών αναπροσαρμογών**
 - **Εξισώσεις αναπροσαρμογών εξ αιτίας των μετρήσεων**

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Συμβολισμοί - Φίλτρα Kalman

$$\hat{x}_{k/k_i}$$

- Η εκτίμηση της κατάστασης τη χρονική στιγμή k χρησιμοποιώντας δεδομένα μέχρι και τη χρονική στιγμή k_i

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_k^- = \hat{x}_{k/k-1}$$

- Η πρόβλεψη της κατάστασης τη χρονική στιγμή k χρησιμοποιώντας δεδομένα μέχρι και τη χρονική στιγμή $k-1$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_k^+ = \hat{x}_{k/k}$$

- Η ανανεωμένη τιμή της κατάστασης τη χρονική στιγμή k χρησιμοποιώντας δεδομένα μέχρι και τη χρονική στιγμή k

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Συμβολισμοί - Φίλτρα Kalman

- Μοντέλο των μετρήσεων

$$z_k = h(x_k) + v_k$$

Μη-γραμμικό

$$z_k = Hx_k + v_k$$

Γραμμικό

- Μοντέλο του συστήματος τη χρονική στιγμή k

$$x_k = \Phi(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$$

Μη-γραμμικό

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

Γραμμικό

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Φίλτρα Kalman

- Προσπαθούν να υπολογίσουν τη δυναμική κατάσταση x μιας χρονικά ελεγχόμενης διαδικασίας που καθορίζεται από μια (γραμμική στοχαστική) εξίσωση της μορφής

$$x_k = w_{k-1} + A x_{k-1} + B u_{k-1}$$

- με τη μέτρηση $z_k = H x_k + v_k$
- Ο πίνακας A σχετίζει την κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή k με την κατάσταση στη προηγούμενη στιγμή $k-1$, στην απουσία θορύβου. Στη πράξη μπορεί να μεταβάλλεται στο χρόνο, αλλά συνήθως θεωρείται σταθερός.
- Ο πίνακας B αφορά προαιρετική πληροφορία u που εισάγεται στο μοντέλο της τρέχουσας κατάστασης x
- Ο πίνακας H σχετίζει την κατάσταση του συστήματος με τη μέτρηση

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Φίλτρα Kalman

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

Επιπλέον

- Ο θόρυβος της δυναμικής διαδικασίας (αβεβαιότητα στο μοντέλο της δυναμικής κατάστασης) είναι

$$\mathbf{p}(\mathbf{w}) \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$$
- Ο θόρυβος (αβεβαιότητα) της μέτρησης είναι

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}) \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$$
- Οι πίνακες συμμεταβλητότητας \mathbf{Q} και \mathbf{R} στη πράξη μπορεί να μεταβάλλονται στο χρόνο, αλλά συνήθως θεωρούνται σταθεροί

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Επιδίωξη των Φίλτρων Kalman

- Να υπολογισθεί μια a posteriori εκτίμηση του $\hat{\mathbf{x}}_k$ διανύσματος κατάστασης, ως γραμμικός συνδυασμός
 - της a priori εκτίμησης $\hat{\mathbf{x}}_k^-$
 - και της διαφοράς $\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-$ (με κατάλληλο βάρος) μεταξύ
 - μιας μέτρησης \mathbf{z}_k
 - και της πρόβλεψης της μέτρησης $\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \underbrace{\mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-)}_{\text{Ανανέωση}}$$

Πίνακας κέρδους \mathbf{K}

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Επιδίωξη των Φίλτρων Kalman

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H \hat{x}_k^-)$$

- Η *a priori* εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης, υπολογίζεται από την υπάρχουσα πληροφορία πριν και μέχρι τη χρονική στιγμή k
- Η *a posteriori* εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης, υπολογίζεται από τη διαθέσιμη επιπλέον πληροφορία από τη μέτρηση (ή μετρήσεις) στη χρονική στιγμή k
- Με αντίστοιχα σφάλματα και πίνακες συμμεταβλητότητας

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \text{ και } e_k = x_k - \hat{x}_k$$

$$\Sigma_{e_k^-} = E\{(e_k^-)(e_k^-)^T\} \text{ και } \Sigma_{e_k} = E\{e_k e_k^T\}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Πίνακας κέρδους Φίλτρων Kalman

- Ο πίνακας K (διαστάσεων $n \times m$) επιλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η εκτίμηση του *a posteriori* πίνακα συμμεταβλητότητας (Βέλτιστο κέρδος ανάδρασης)

Όπου επιτυγχάνεται θέτοντας
και επιλύοντας ως προς K

$$\frac{d(\text{trace} \Sigma_{\hat{x}_k})}{dK} = 0$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k = x_k - \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$\Sigma_{\hat{x}_k} = E\{e_k e_k^T\}$$

$$= E\{(x_k - \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-))^T\}$$

$$\Rightarrow K_k = \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T (H \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T + R)^{-1}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Πίνακας κέρδους Φίλτρων Kalman

$$K_k = \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T (H \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T + R)^{-1}$$

- Όσο ο θόρυβος των μετρήσεων τείνει στο μηδέν, ο πίνακας K δίνει μεγαλύτερο βάρος στην ανανέωση

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-)$$

Øδεδομένου ότι

$$\lim K_k = H^{-1}$$

$$R_k \rightarrow 0$$

Δηλ. δίνεται μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στη μέτρηση και ολοένα λιγότερη στην πρόβλεψή της

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Πίνακας κέρδους Φίλτρων Kalman

$$K_k = \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T (H \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T + R)^{-1}$$

- Όσο ο πίνακας συμμεταβλητότητας της a priori εκτίμησης των παραμέτρων τείνει στο μηδέν, ο πίνακας K δίνει μικρότερο βάρος στην ανανέωση

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-)$$

Øδεδομένου ότι

$$\lim K_k = 0$$

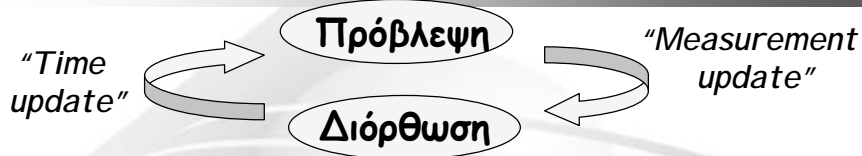
$$\Sigma_{\hat{x}_k^-} \rightarrow 0$$

Δηλ. δίνεται μικρότερη εμπιστοσύνη στη μέτρηση και ολοένα μεγαλύτερη στην πρόβλεψη της μέτρησης

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Διακριτά φίλτρα Kalman



- Οι εξισώσεις χρονικών αναπροσαρμογών επεκτείνουν μπροστά στο χρόνο την εκτίμηση της τρέχουσας δυναμικής κατάστασης και του πίνακα συμμεταβλητότητας, προκειμένου να υπολογισθούν οι αντίστοιχες a priori εκτιμήσεις τους για το επόμενο βήμα.

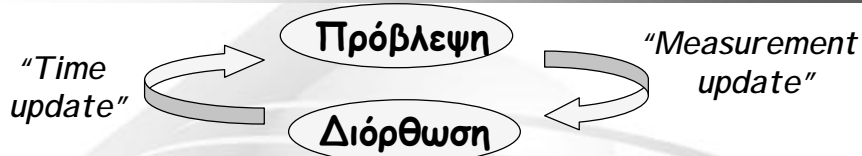
$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1}$$

$$\Sigma_{\hat{x}_k^-} = A \Sigma_{\hat{x}_{k-1}} A^T + Q$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Διακριτά φίλτρα Kalman



- Οι εξισώσεις αναπροσαρμογών εξ αιτίας των μετρήσεων ενσωματώνουν μια νέα μέτρηση στην a priori εκτίμηση προκειμένου να διαμορφώσουν μια βελτιωμένη a posteriori εκτίμηση των παραμέτρων.

$$K_k = \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T (H \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-)$$

$$\Sigma_{\hat{x}_k} = (I - K_k H) \Sigma_{\hat{x}_k^-}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



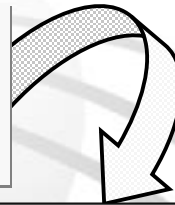
Φίλτρο Kalman: Σύνοψη

$$\hat{x}_{k-1}, \Sigma_{\hat{x}_{k-1}}$$



$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1}$$

$$\Sigma_{\hat{x}_k^-} = A \Sigma_{\hat{x}_{k-1}} A^T + Q$$



$$K_k = \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T (H \Sigma_{\hat{x}_k^-} H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}_k^-)$$

$$\Sigma_{\hat{x}_k} = (I - K_k H) \Sigma_{\hat{x}_k^-}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Παράδειγμα

- Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής $x(t)$ σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$
- $x(t)$ ικανοποιεί τη εξίσωση του δυναμικού μοντέλου $x(t_{k+1}) = Ax(t_k) + w(t_k)$
 - Για το παράδειγμα, έστω $A=0.9$
 - $w(t_k)$ αντιπροσωπεύει θόρυβο (τυχαία τιμή), με μέση τιμή 0 και διασπορά Q . Για το παράδειγμα έστω $Q=100$.
 - $w(t_k)$ αποκαλείται λευκός θόρυβος, δηλαδή κάθε τυχαία τιμή του δεν σχετίζεται με οποιαδήποτε άλλη τυχαία τιμή και κυρίως δεν σχετίζεται με τις προηγούμενες τιμές

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Παράδειγμα

- Το φίλτρο Kalman χρειάζεται μια αρχική τιμή προκειμένου να εφαρμοσθεί ο αναδρομικός αλγόριθμός του
- **Ας υποθέσουμε ότι από μια ανεξάρτητη πηγή έχουμε υπολογίσει ότι**

$$\hat{x}(t_0) = 1000, \quad \Sigma_{\hat{x}(t_0)} = 40000$$

- Στη χρονική στιγμή t_1 , θέλουμε να εκτιμήσουμε $x(t_1) = A x(t_0) + w(t_0)$
- Όμως δεν γνωρίζουμε το $w(t_0)$, αλλά γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή του είναι 0 (αφού ακολουθεί τη κανονική κατανομή $p(w) \sim N(0, Q)$)

$$\emptyset \quad \hat{x}(t_1)^- = A x(t_0) = 0.9 \times 1000 = 900$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Παράδειγμα

$$\Sigma_{\hat{x}(t_1)^-} = ?$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{x}(t_1)^-} &= E\{(x(t_1) - x(t_1)^-)^2\} \\ &= E\{(Ax(t_0) + w(t_0) - A\hat{x}(t_0))^2\} \\ &= E\{A^2(x(t_0) - \hat{x}(t_0))^2\} + E\{w\} \\ &\quad + 2A E\{(x(t_0) - \hat{x}(t_0)) * w(t_0)\} \\ &= \Sigma_{\hat{x}(t_0)} A^2 + Q \end{aligned}$$

$$\Sigma_{\hat{x}(t_1)^-} = 40000 \times 0.81 + 100 = 32500$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Παράδειγμα

- Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 γίνεται μια μέτρηση

$$y(t_1) = H x(t_1) + v(t_1)$$

- Όπου v είναι λευκός θόρυβος, με $p(v) \sim N(0, R)$
- H είναι γνωστός. Για το παράδειγμα, έστω $H=1$, $R=10000$ και $y(t_1)=1200$
- Αν υπολογίζαμε το $y(t_1)$ πριν γίνει η μέτρηση θα ήταν

$$y(t_1)^- = H \hat{x}(t_1)^- = 1 \times 900 = 900$$

και η νέα εκτίμηση του $x(t_1)$ είναι

$$\hat{x}(t_1) = \hat{x}(t_1)^- + \underbrace{K(y(t_1) - y(t_1)^-)}_{300 (=1200-900)} \quad \text{Ποια τιμή } K ?$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Παράδειγμα

$$K = \sum_{\hat{x}_k} \frac{1}{32500} H^T (H \sum_{\hat{x}_k} \frac{1}{10000} H^T + R)^{-1} \quad P K = 0.7647$$

- Αντίστοιχα $\hat{x}(t_1) = \hat{x}(t_1)^- + K(y(t_1) - y(t_1)^-)$
 $= 900 + 0.7647(1200 - 900) = 1129.41$

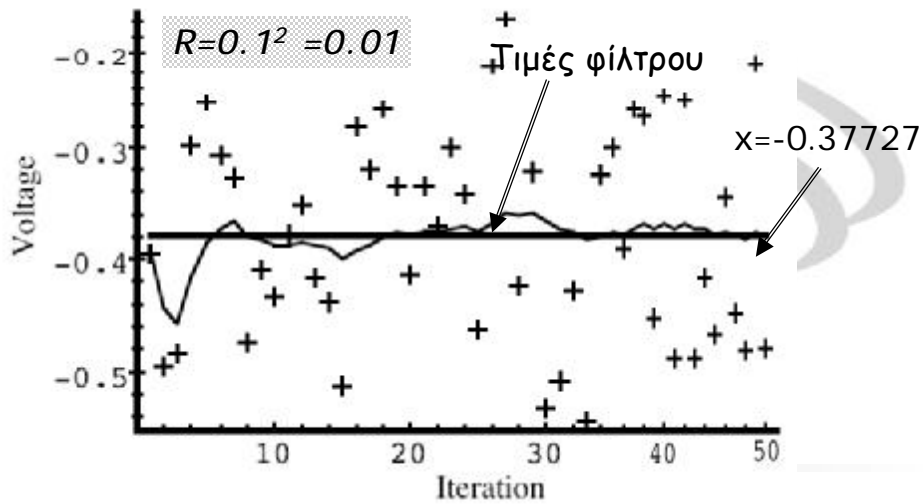
$$\sum_{\hat{x}(t_1)} = \sum_{\hat{x}(t_1)^-} (1 - KH)^2 = \dots = 7647.25$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



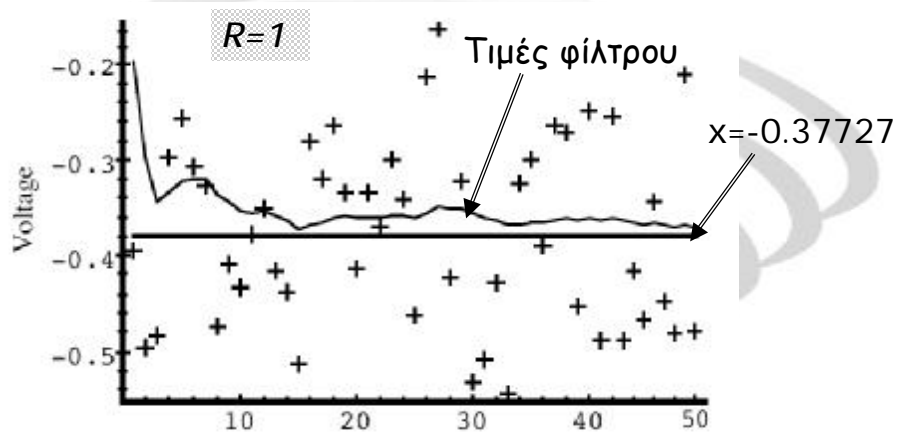
Παράδειγμα

- Έστω 50 μετρήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής x με πραγματική τιμή -0.37727 και διασπορά $\sigma=0.1^2=0.01$



Παράδειγμα

- Έστω 50 μετρήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής x με πραγματική τιμή -0.37727 και διασπορά $\sigma=0.1^2=0.01$

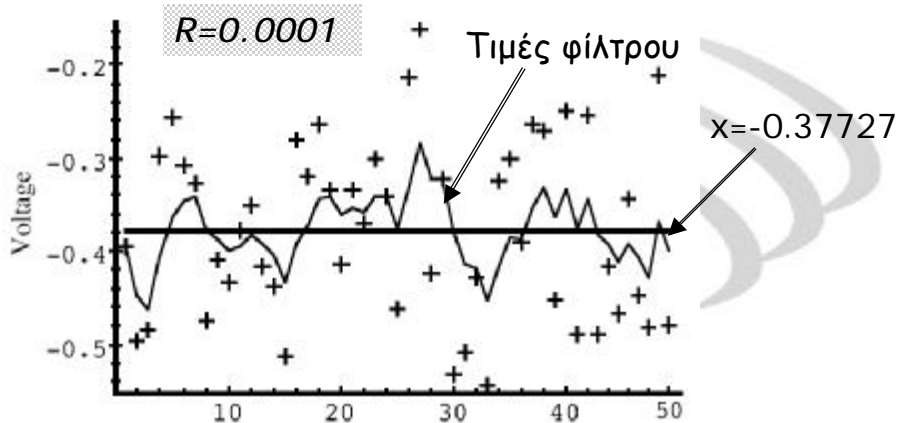


Το φίλτρο είναι πιο αργό στη σύγκλιση του



Παράδειγμα

- Έστω 50 μετρήσεις μιας τυχαίας μεταβλητής x με πραγματική τιμή -0.37727 και διασπορά $\sigma=0.1^2=0.01$



Το φίλτρο "εμπιστεύεται" τις θορυβώδεις μετρήσεις

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



π.χ. Συνδυασμός μετρήσεων GPS

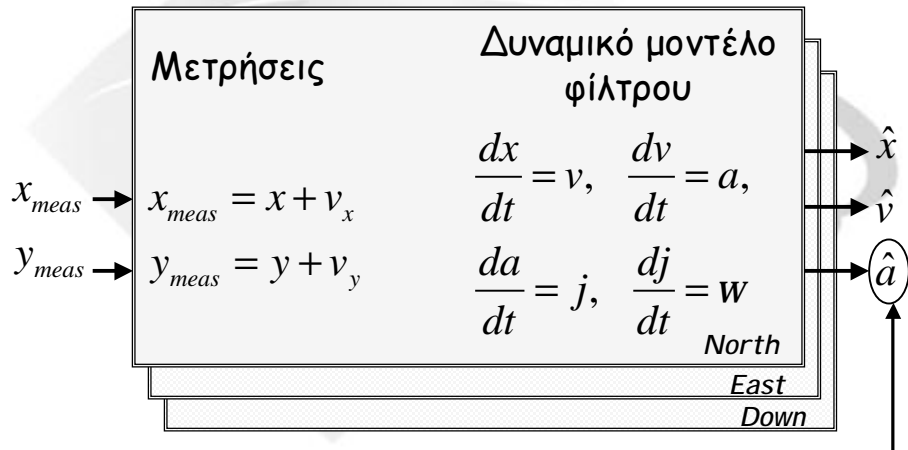
- Οι GPS δέκτες παρέχουν πολλαπλούς τύπους ανεξάρτητων μετρήσεων (ψευδοαπόστασης, φάσης, Doppler)
- Αυτόνομος εντοπισμός απαιτεί το συνδυασμό τους
 - Μετρήσεις Ψευδοαπόστασης \rightarrow Θέση (x)
 - Μετρήσεις Doppler \rightarrow Ταχύτητα ($v = \dot{x}$)
 - Τυπικές ακρίβειες ($\sim 30\text{m}$, $\sim 0.15\text{ m/sec}$)
- Πολλοί GPS δέκτες παρέχουν υψηλής ακρίβειας μετρήσεις φάσης (και συνεπώς Doppler), άρα μπορούν να βελτιώσουν την εκτίμηση της θέσης

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



π.χ. Συνδυασμός μετρήσεων GPS

- x =θέση, v =ταχύτητα, a =επιτάχυνση,
 j =τράνταγμα (*jerk*), w =θόρυβος



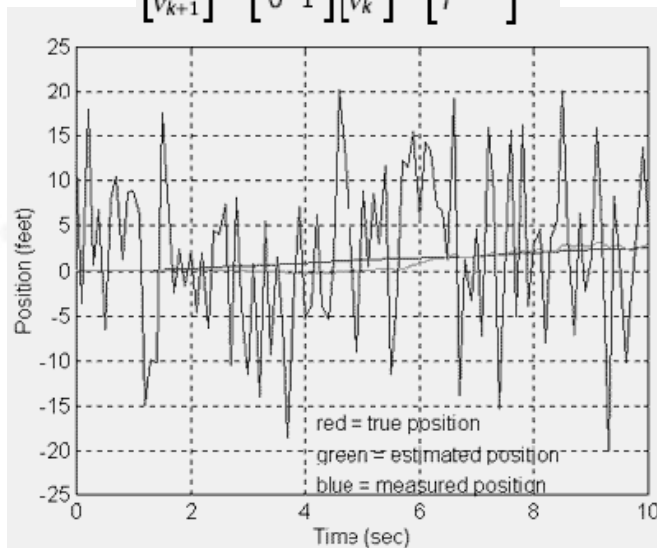
Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ

Συνδυάζεται με μετρήσεις των γυροσκοπίων



$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} a_k$$

Παράδειγμα



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Εκτεταμένα φίλτρα Kalman

- Παράδειγμα από τη χρήση του GPS στις περιπτώσεις
 - Στατικού εντοπισμού
 - Κινηματικού εντοπισμού
- Τύποι Μετρήσεων GPS
 - Παρατηρήσεις του κώδικα C/A ή P ($L_1 - C/A$, $L_1: P$, $L_2: P$)
 - Συνδυασμός παρατηρήσεων του κώδικα C/A ή P και παρατηρήσεων Doppler (δηλ. μεταβολή της φάσης του φέροντος κύματος ως αποτέλεσμα της σχετικής κίνησης μεταξύ δορυφόρου και δέκτη του χρήστη)
- Οι εν λόγω παρατηρήσεις GPS εμπεριέχουν σφάλματα διαφόρων τύπων και μεγέθους

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Τύποι Μετρήσεων GPS

- Μετριασμός των σφαλμάτων
 - Διορθώσεις μέσω του μηνύματος πλοήγησης
 - Μοντέλα της ιονόσφαιρας και τροπόσφαιρας
 - Διαφορικό GPS
 - Ελαχιστοποίηση όλων των σφαλμάτων εκτός από τα πολυκλαδικά σφάλματα και τους θορύβους των σημάτων GPS

Σφάλματα τροχιάς και χρονομέτρων	2.3 m
Σφάλμα Ιονόσφαιρας στη συχνότητα L_1	7 m
Σφάλμα Τροπόσφαιρας	0.2 m
Πολυκλαδικά σφάλματα στις μετρήσεις του κώδικα	0.01 - 150 m
Θόρυβος στις μετρήσεις του κώδικα	0.6 m
Πολυκλαδικά σφάλματα στις μετρήσεις της φάσης	1 - 50 mm
Θόρυβος στις μετρήσεις της φάσης	0.2 - 2 mm

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Γιατί να χρησιμοποιηθεί ένα φίλτρο Kalman?

- Μη γραμμικό σύστημα
 - Μοντέλο της φυσικής διαδικασίας των μετρήσεων:

$$x_k = f(x_{k-1}, k-1) + w_{k-1}$$
 - Μοντέλο των μετρήσεων:

$$z_k = h(x_k, k) + v_k$$
- Η μη γραμμικότητα εισέρχεται μέσω των μετρήσεων (μη γραμμικές εξισώσεις παρατήρησης)
- Τα πλεονεκτήματα των Φίλτρων Kalman
 - Μπορούν να προβλέψουν τη κατάσταση του δυναμικού συστήματος σε επόμενες χρονικές στιγμές
 - Παρέχουν ένα απλό τρόπο καθορισμού του "βάρους" όλων των μετρήσεων σύμφωνα με τις στατιστικές ιδιότητες των σφαλμάτων τους
 - Τα υπόλοιπα των μετρήσεων χρησιμεύουν στην ανίχνευση ξαφνικών ανωμαλιών λειτουργίας των δορυφόρων

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Εκτεταμένο Φίλτρο Kalman

- Πρόβλεψη εκτίμησης της κατάστασης

$$\hat{x}_k^- = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+)$$

- Πρόβλεψη της μέτρησης

$$\hat{z}_k = h_k(\hat{x}_k^-)$$

Εξισώσεις για το ΕΦΚ

$$x_k \approx x_k^- + \Phi_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-) + w_{k-1}$$

$$z_k \approx \hat{z}_k + H_k(x_k - x_k^-) + v_k$$

- Ανάπτυγμα κατά Taylor της f χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εκτίμηση

Πίνακας Μετάβασης $\Phi(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial f(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}}$

- Ανάπτυγμα κατά Taylor της h για την αντίστοιχη προβλεπόμενη θέση

$$H(\hat{x}, k) \approx \left. \frac{\partial h(x, k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



(1) Πρόβλεψη της κατάστασης

$$\hat{x}_k^- = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+)$$

$\hat{x}_{k-1}^+ \rightarrow$

(2) Πρόβλεψη του πίνακα συμμεταβλητότητας

$P_{k-1}^+ \rightarrow$

$$P_k^- = \Phi_{k-1} P_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

**Εκτεταμένο
Φίλτρο
Kalman**

(1) Υπολογισμός του πίνακα κέρδους

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}$$

(2) Ανανέωση της εκτίμησης με τη μέτρηση z_k

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k^-)$$

(3) Ανανέωση του πίνακα συμμεταβλητότητας

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



**Μοντέλο Συστήματος
Μοντέλο Δυναμικής Κατάστασης**

- Η δυναμική κατάσταση περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης και ταχύτητας του δέκτη GPS, στο σύστημα WGS 84, και το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη

$$x = [X_t, \dot{X}_t, Y_t, \dot{Y}_t, Z_t, \dot{Z}_t, cdt, c\dot{d}t]$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Μοντέλο Δυναμικής Κατάστασης

- **Μοντέλο σταθερής ταχύτητας** (Constant velocity model) - (T = χρόνος μετρήσεων)

$$\dot{x} = w$$

$$\dot{x} = wT + V_0$$

$$x = \frac{wT^2}{2} + V_0T + x_0$$



$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix} w$$

w = λευκός θόρυβος

Q, σ_v = θόρυβος μοντέλου

$$Q = CS_v^2C^T = \begin{bmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{3} \\ \frac{T^3}{3} & T^2 \end{bmatrix} S_v^2$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Μοντέλο Δυναμικής Κατάστασης

- **Μοντέλο χρονομέτρου**

$$\begin{bmatrix} cdt_{k+1} \\ c\dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt_k \\ c\dot{x}_k \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = c^2 \left(\frac{h_0}{2}T + 2h_1T^2 + \frac{2}{3}p^2h_2T^3 \right)$$

$$Q_{12} = c^2 (2h_1T + p^2h_2T^3)$$

$$Q_{22} = c^2 \left(\frac{h_0}{2}T + 2h_1 + \frac{8}{3}p^2h_2T \right)$$

$$h_0 = 9.4 \times 10^{-20}$$

$$h_1 = 1.8 \times 10^{-19}$$

$$h_2 = 3.8 \times 10^{-21}$$

Τυπικές τιμές
για ατομικά
χρονόμετρα
χαλαζία

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Πίνακες Φ & Q

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{T^4}{4} s_x^2 & \frac{T^3}{3} s_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T^3}{3} s_x^2 & T^2 s_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^4}{4} s_y^2 & \frac{T^3}{3} s_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{3} s_y^2 & T^2 s_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T^4}{4} s_z^2 & \frac{T^3}{3} s_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T^3}{3} s_z^2 & T^2 s_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Εξισώσεις παρατήρησης

- Για τις μετρήσεις κώδικα

$$r_{it} = R_{it} + c dt + v_{it}$$

όπου,

$$R_{it} = \sqrt{(X_r - X_{it})^2 + (Y_r - Y_{it})^2 + (Z_r - Z_{it})^2}$$

V_{it} = θόρυβος μέτρησης

- Για τις μετρήσεις Doppler, που εκφράζουν την ταχύτητα κίνηση του δέκτη

$$D_{it} = \frac{[(X_r - X_{it})(\dot{X}_r - \dot{X}_{it}) + (Y_r - Y_{it})(\dot{Y}_r - \dot{Y}_{it}) + (Z_r - Z_{it})(\dot{Z}_r - \dot{Z}_{it})]}{R_{it}} + c \dot{d}$$

- και για η δορυφόρους

$$Z_t = [p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{nt}, D_{1t}, D_{2t}, \dots, D_{nt}]$$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Εξισώσεις παρατήρησης

- Πίνακας H υπολογίζεται ως

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

όπου,

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_x^1 & 0 & h_y^1 & 0 & h_z^1 & 0 & 1 & 0 \\ h_x^2 & 0 & h_y^2 & 0 & h_z^2 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ h_x^n & 0 & h_y^n & 0 & h_z^n & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & h_x^1 & 0 & h_y^1 & 0 & h_z^1 & 0 & 1 \\ 0 & h_x^2 & 0 & h_y^2 & 0 & h_z^2 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & h_x^n & 0 & h_y^n & 0 & h_z^n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_x^i = \frac{\partial r_i}{\partial X} = \frac{(X_r^- - X_i)}{PR_i} \quad h_y^i = \frac{\partial r_i}{\partial Y} = \frac{(Y_r^- - Y_i)}{PR_i} \quad h_z^i = \frac{\partial r_i}{\partial Z} = \frac{(Z_r^- - Z_i)}{PR_i}$$

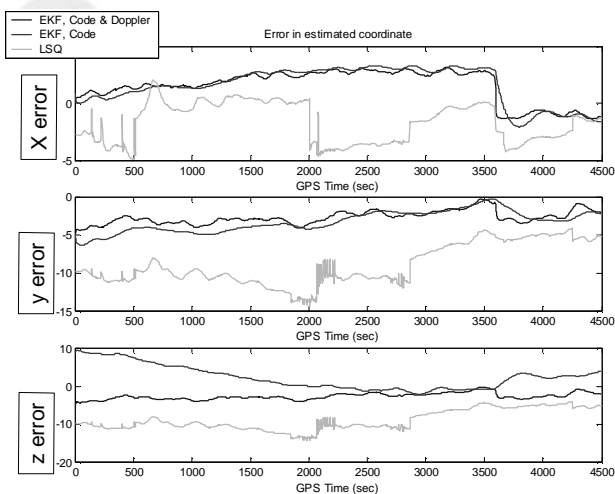
- Αν χρησιμοποιούνται μόνο μετρήσεις κώδικα: $H = [H_1]$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Αποτελέσματα Στατικού Εντοπισμού

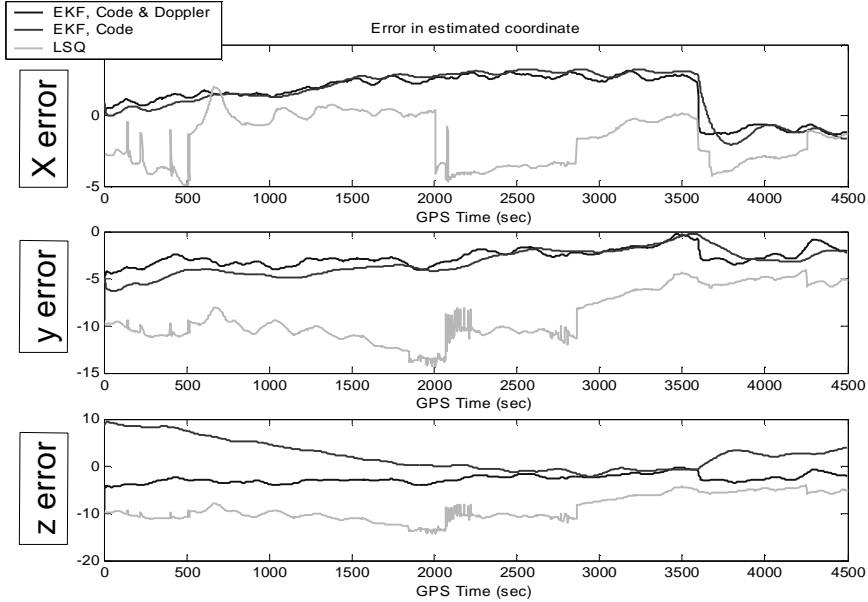
- Σφάλματα εντοπισμού από
 - ΕΦΚ με μετρήσεις κώδικα & Doppler
 - ΕΦΚ με μόνο μετρήσεις κώδικα
 - Μ. Ελαχίστων τετραγώνων



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ

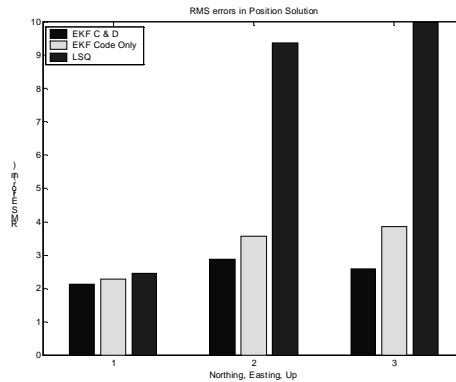


Μοντέλο Συστήματος Αποτελέσματα Στατικού Εντοπισμού



Μοντέλο Συστήματος Αποτελέσματα Στατικού Εντοπισμού

- Σφάλματα εντοπισμού από
 - ΕΦΚ με μετρήσεις κώδικα & Doppler
 - ΕΦΚ με μόνο μετρήσεις κώδικα
 - Μ. Ελαχίστων τετραγώνων



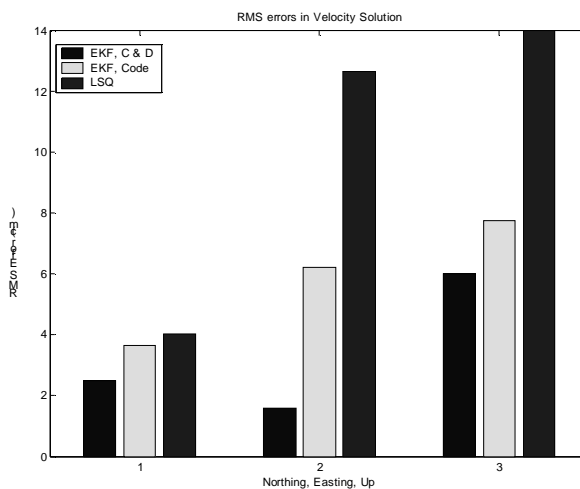
RMS	X (m)	Y (m)	Z (m)
EKF (C & D)	2.1072	2.8579	2.5848
EKF (Code)	2.2623	3.5663	3.8503
LSQ	2.4292	9.3521	9.9616

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Μοντέλο Συστήματος Αποτελέσματα Στατικού Εντοπισμού

- Σφάλματα ταχύτητας από
 - ΕΦΚ με μετρήσεις κώδικα & Doppler
 - ΕΦΚ με μόνο μετρήσεις κώδικα
 - Μ. Ελαχίστων τετραγώνων



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ



Την επόμενη φορά

Πως τα φίλτρα Kalman σχετίζονται / είναι ισοδύναμα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, σε ειδικές περιπτώσεις συνόρθωσης των μετρήσεων, π.χ.

- Σε διαδοχικά βήματα
- Σε επιμέρους φάσεις (κατά ομάδες μετρήσεων)
- Με την άθροιση κανονικών εξισώσεων

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΠ