Στοιχεία επεξεργασίας σημάτων

ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΑΤΜ
Ακ. Έτος 2004-2005

Β.Βεσκούκης, Δ.Παραδείσης, Δ.Αργιαλάς,
Δ.Δεληκαράογλου, Β.Καραθανάση, Β.Μασσίνας

Γενικά στοιχεία για το μάθημα

- Εισάγεται στα πλαίσια της αναβάθμισης του προγράμματος σπουδών (Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης & Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης - ΕΠΕΑΕΚ)
- Επιλογή στο 6ο εξάμηνο

Γενικά στοιχεία

- Συνιστώμενο τουλάχιστον για τα μαθήματα:
  - Ειδικά Θέματα Δορυφορικής Γεωδαισίας
  - Γεωφυσικές Διασκοπήσεις – Βαρυτημετρία
  - Θαλάσσια Γεωδαισία
  - Δορυφορική Γεωδαισία
  - Στοιχεία γήινου πεδίου βαρύτητας
  - Ψηφιακή Τηλεπισκόπηση
  - Ραντάρ
  - Ψηφιακή Φωτογραμμετρία.

Γενικά στοιχεία

- Το μάθημα περιλαμβάνει:
  - θεωρία,
  - ασκήσεις,
  - εργαστήρια σε MATLAB ή σε άλλο λογισμικό
  - Εφαρμογές

Αρχική διάρθρωση μαθήματος

- **Έννοια, Είδη και κατηγορίες σημάτων. Αναλογικά / ψηφιακά σήματα. Συνεχή / διακριτά σήματα. Ντετερμινιστικά και στοχαστικά σήματα. Στατιστικά χαρακτηριστικά σήματος και θόρυβος. Μετατροπή αναλογικού σε ψηφιακό σήμα (δειγματοληψία). Μετάδοση σήματος. Μέσο και σύστημα. Συστήματα εισόδου – εξόδου.**
- **Γραμμικά συστήματα: παραδείγματα και ιδιότητες, απόκριση ώθησης (impulse response). Μεταβλητές [θέση & χρόνος] & παράμετροι σήματος. Συνέλιξη (convolution) και συσχέτιση (correlation) διακριτών σημάτων. Μετάδοση σημάτων, διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση σημάτων.**

Αρχική διάρθρωση μαθήματος

- **Επεξεργασία σήματος. Φασματική Ανάλυση. Συνάρτηση συσχέτισης & φάσμα. Μετασχηματισμός Fourier. Διακριτός μετασχηματισμός (DFT): βασικές έννοιες και ιδιότητες. Ο αλγόριθμος του Ταχύ μετασχηματισμού Fourier (FFT).**
- **Εφαρμογές DFT: φασματική απόκριση συστήματος (frequency response), φάσματα ισχύος, ενέργειας, εύρους (energy & power spectrum), συνέλιξη στον χώρο των συχνοτήτων κλπ.**
- **Έννοια & σκοπός φίλτρων. Είδη φίλτρων. Στοχαστικά & ντετερμινιστικά φίλτρα. Ψηφιακά φίλτρα: βασικές ιδιότητες, φίλτρα κινητού μέσου όρου, φίλτρα παραθύρου, γραμμικά φίλτρα,. Σχεδιασμός ψηφιακών φίλτρων.**

Αρχική διάρθρωση μαθήματος

- **Φίλτρα Kalman με έμφαση στις σχέσεις μεταξύ φίλτρων Kalman, και μεθόδων ελαχίστων τετραγώνων για την ανάλυση διαδοχικών μετρήσεων (Bayes Sequential Estimation) και μετρήσεων κατά φάσεις (Phase Estimation).**
- **Μη γραμμικά συστήματα μετάδοσης & τρόποι επεξεργασίας των σημάτων εξόδου. Οι έννοιες & οι σκοποί της Γραμμικοποίησης. Κανονικοποίησης. Φίλτρα απαλοιφής συγκεκριμένων συχνοτήτων.**
- **Διδιάστατα σήματα & ψηφιακές εικόνες. Ο διδιάστατος DFT: ιδιότητες και εφαρμογές. Εφαρμογή φίλτρων συχνοτήτων.**
- **Εφαρμογή επεξεργασίας σήματος στην ανάλυση γεωδαιτικών δεδομένων, στην ανάλυση εικόνας, στους υδατικούς πόρους και στις χρόνο-συναρτησιακές σειρές.**

Σελίδα web

- http://www.survey.ntua.gr/main/courses/general/**sigproc**
- Να την επισκέπτεστε συχνά!

Με λιγότερα λόγια...

- Το μάθημα περιλαμβάνει
  - Εισαγωγή στα σήματα και την επεξεργασία σημάτων (Β.Βεσκούκης)
  - Matlab (Β.Μασσίνας)
  - Εφαρμογές για ΑΤΜ
    - Εφαρμογή 1
    - Εφαρμογή 2
    - Εφαρμογή 3

Διαδικαστικά θέματα

- Ασκήσεις προς επίλυση στο σπίτι και παράδοση
- Ασκήσεις στο εργαστήριο
- Γραπτή εξέταση
- Συνυπολογισμός βαθμολογίας εξέτασης και παραδόσεων ασκήσεων στον τελικό βαθμό

Βιβλία, σημειώσεις, κλπ

- Φωτοτυπίες που θα μοιραστούν εγκαίρως
- Διαφάνειες διαλέξεων
- Επιλεγμένο υλικό που θα διατίθεται από τη σελίδα του μαθήματος
- Επιλεγμένα web sites

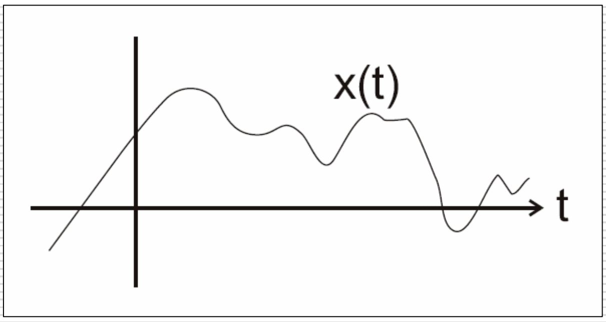
Ερωτήσεις

Τι είναι σήμα;

- Σήμα είναι μια ποσοτική περιγραφή ενός φαινομένου, η οποία φέρει πληροφορία
- Υπάρχουν πολλοί τύποι σημάτων ανάλογα με το μέσο και τον τρόπο μετάδοσης

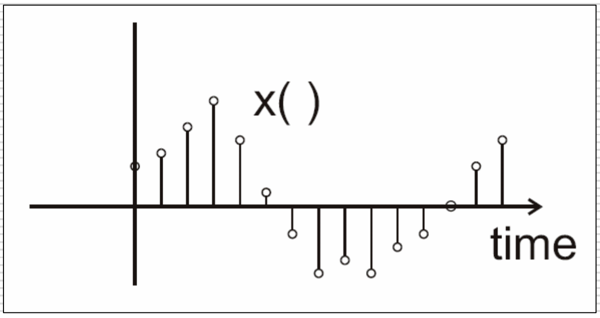
Είδη σημάτων

- Σήματα συνεχούς χρόνου (CT:continuous time)



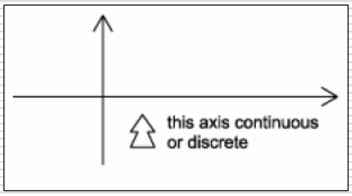
Είδη σημάτων

- Σήματα διακριτού χρόνου (DT:discrete time)



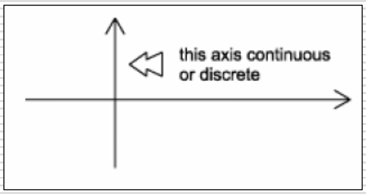
Είδη σημάτων

- Συνεχούς χρόνου: το σήμα έχει τιμές για **οποιοδήποτε σημείο** του άξονα του χρόνου
- Διακριτού χρόνου: το σήμα έχει τιμές για **συγκεκριμένα σημεία** του άξονα του χρόνου



Είδη σημάτων

- **Αναλογικά** (συνεχούς πλάτους):
  - Η τιμή του σήματος μπορεί να είναι οποιαδήποτε (συνεχούς πλάτους)
- **Ψηφιακά** (διακριτού πλάτους):
  - Η τιμή του σήματος ανήκει σε ένα σύνολο διακριτών προκαθορισμένων τιμών

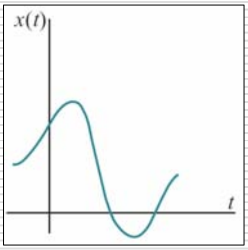


Είδη σημάτων

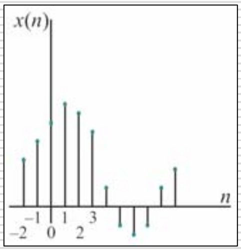
- Συνδυασμοί:
  - Συνεχούς χρόνου, συνεχούς πλάτους -> **αναλογικό σήμα**
  - Διακριτού χρόνου, διακριτού πλάτους-> **ψηφιακό σήμα**
  - Συνεχούς χρόνου, (διακριτού πλάτους) (**Σ.Χ.**)
  - Διακριτού χρόνου, (συνεχούς πλάτους) (**Δ.Χ.**)

Είδη σημάτων

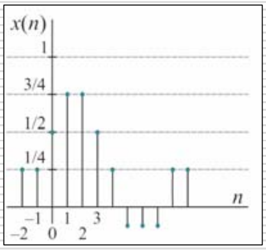
Ας χαρακτηρίσουμε τα παρακάτω σήματα



Αναλογικό



Διακριτού χρόνου



Ψηφιακό

Παραδείγματα

- Αναλογικά
  - Ο φυσικός ήχος που παράγεται από μία χορδή μουσικού οργάνου (ισχύς ηχητικού κύματος)
  - Το ασθενές ηλεκτρικό σήμα ενός "πικαπ" (τάση ηλεκτρικού ρεύματος)
  - Το ενισχυμένο ηλεκτρικό σήμα που φτάνει στα ηχεία (τάση ηλεκτρικού ρεύματος)

Παραδείγματα

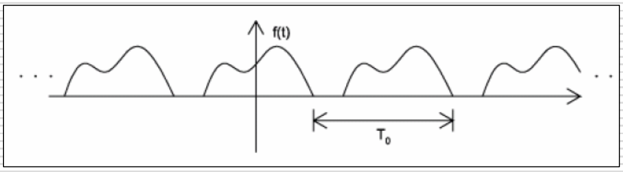
- Ψηφιακά
  - Ενα byte πληροφορίας
  - Τα δεδομένα που μεταφέρονται στο internet
  - Τα δεδομένα που είναι αποθηκευμένα σε ένα CD/ DVD

Ψηφιακά σήματα και DSP

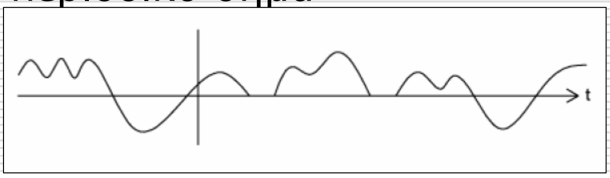
- Γιατί είναι χρήσιμα τα ψηφιακά σήματα;

Είδη σημάτων

- Περιοδικό σήμα: $f(t)=f(T+t)$

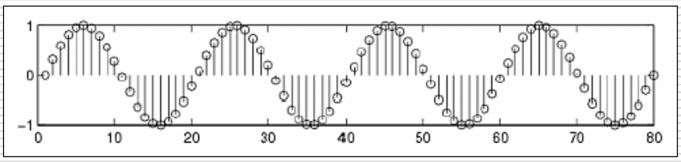


- Μη περιοδικό σήμα



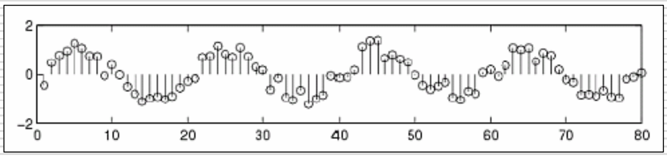
Είδη σημάτων

- **Ντετερμινιστικό σήμα:** κάθε τιμή του μπορεί να προβλεφθεί από ένα μαθηματικό τύπο, κανόνα, κλπ



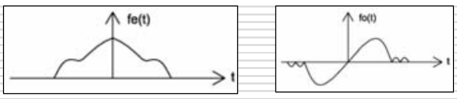
Είδη σημάτων

- **Στοχαστικό (τυχαίο) σήμα:** η τιμή του έχει μεγάλη αβεβαιότητα και δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια

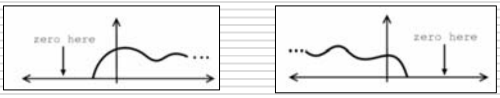


Αλλες διακρίσεις σημάτων

- Αρτια - περιττά



- Δεξιά - αριστερά



- Πεπερασμένου - άπειρου μήκους

Στατιστικά χαρακτηριστικά

- Γνωστά μεγέθη από τη στατιστική
  - Μέση τιμή

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

  - Τυπική απόκλιση

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma = \sqrt{(x_0 - \mu)^2 + (x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_{N-1} - \mu)^2 / (N-1)}$$

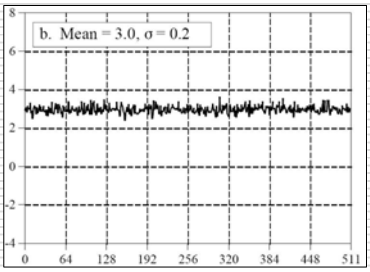
Στατιστικά χαρακτηριστικά

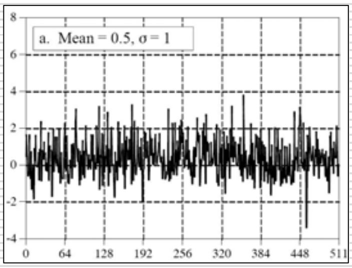
- Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε πρόγραμμα για τον υπολογισμό των μεγεθών…

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)^2 \right]$$

Στατιστικά χαρακτηριστικά

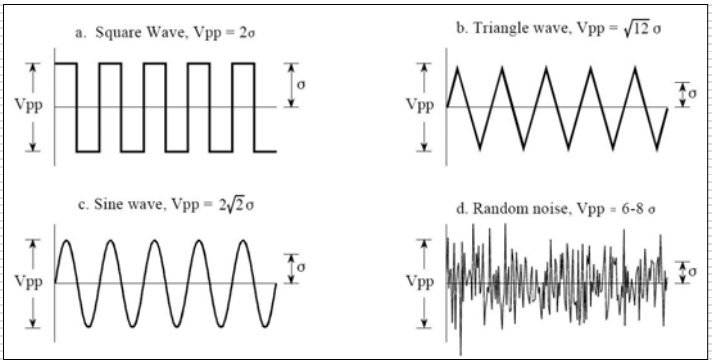
- Μέση τιμή και τυπική απόκλιση





Στατιστικά χαρακτηριστικά

- μ και σ για μερικά σήματα



Ημιτονοειδή σήματα Σ.Χ.

- Αρμονική ταλάντωση

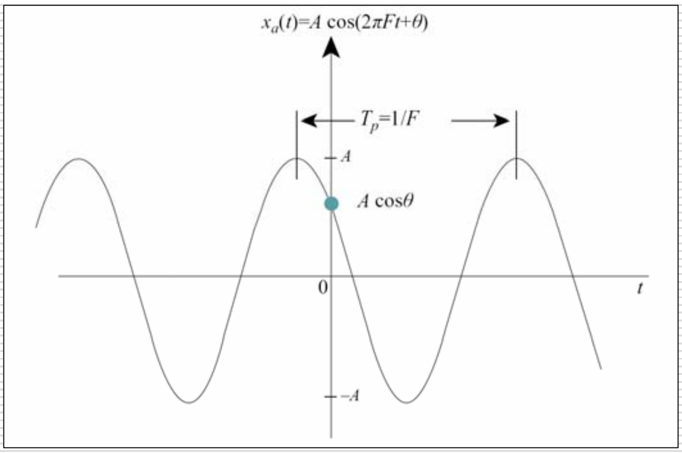
$$\boxed{x_\alpha(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \theta),\ -\infty < t < \infty}$$

και επειδή $\Omega = 2\pi F$

$$\boxed{x_\alpha(t) = A \cdot \cos(2\pi F t + \theta),\ -\infty < t < \infty}$$

Περιοδικό με βασική περίοδο $T_p = 1/F$

Ημιτονοειδή σήματα Σ.Χ.



Ημιτονοειδή σήματα Σ.Χ.

- Σύμφωνα με την ταυτότητα του Euler

$$e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$$

- Το ημιτονοειδές σήμα Σ.Χ. γράφεται

$$x_{\alpha}(t) = A\cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t + \theta)}$$

Ημιτονοειδή σήματα Δ.Χ.

- Κατά (μερική) αναλογία με τα ημιτονοειδή σήματα Σ.Χ.

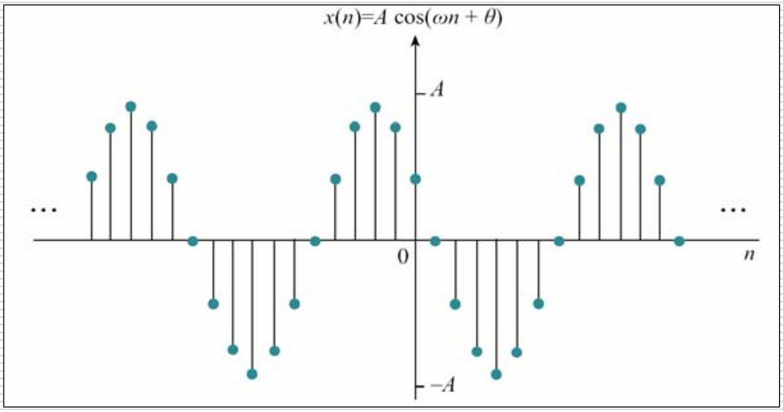
$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta),\ -\infty < n < \infty$$

- και θέτοντας $\omega = 2\pi f$

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \theta),\ -\infty < n < \infty$$

- Περιοδικό μόνο για f ρητό αριθμό

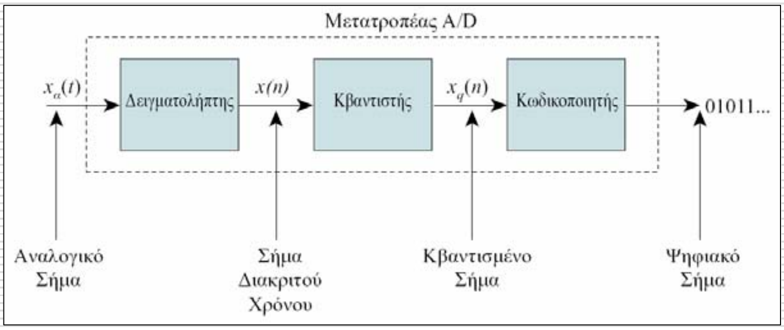
Ημιτονοειδή σήματα Δ.Χ.



Αναλογικό σε ψηφιακό σήμα

- Δύο αποφάσεις
  - Πόσο συχνά θα παίρνουμε δείγμα
  - Πόσες τιμές θα έχει το πεδίο τιμών
- Τρία στάδια
  - **Δειγματοληψία**: μετατροπή σε σήμα διακριτού χρόνου
  - **Κβαντοποίηση**: μετατροπή σε σήμα διακριτού πλάτους (ΔΧ+ΔΠ=ψηφιακό)
  - **Κωδικοποίηση**: μετατροπή σε ακολουθία δυαδικών ψηφίων

Μετατροπέας A/D



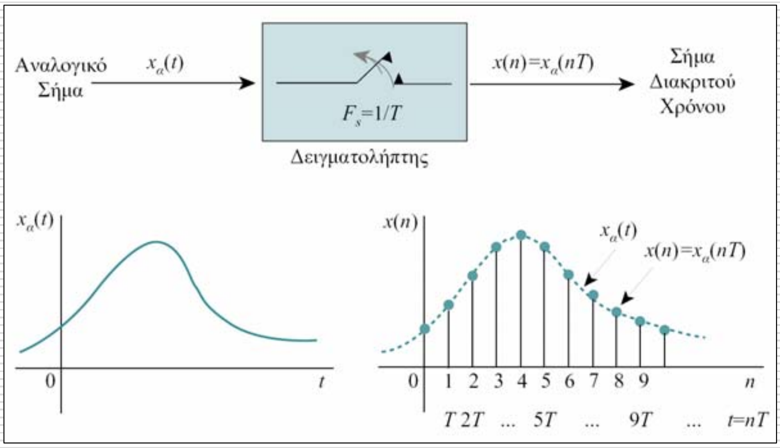
Από αναλογικό σε σήμα Δ.Χ.

- Σε καθορισμένες χρονικές στιγμές, παίρνουμε *<u>δείγματα</u>* του αναλογικού σήματος $x_{analog}(t)$ ή $x_a(t)$ τα οποία αποτελούν τις τιμές του ψηφιακού σήματος $x(n)$.

$$\boxed{x(n) = x_a(nT), -\infty < n < \infty}$$

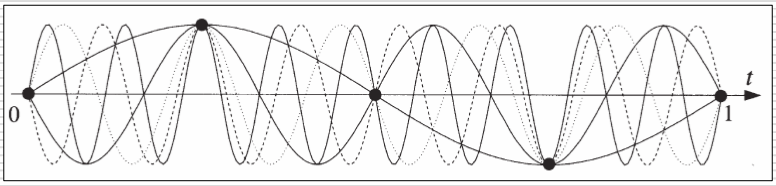
- Χρόνος - δείγμα: $\boxed{t = nT = \frac{n}{F_s}}$ $\boxed{F_s = \frac{1}{T}}$

Από αναλογικό σε σήμα Δ.Χ.



Συχνότητα δειγματοληψίας

- Ποια είναι μια "καλή" συχνότητα λήψης δειγμάτων ώστε το ψηφιακό σήμα να φέρει "όλη" την πληροφορία του αναλογικού;



Συχνότητα δειγματοληψίας

- Εξαρτάται από τη μέγιστη συχνότητα του σήματος
- Θεώρημα Nyquist / Shannon
  - Η συχνότητα δειγματοληψίας F_s με την οποία λαμβάνονται δείγματα ενός αναλογικού σήματος, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη μεγαλύτερη συχνότητα F_{max} που περιέχεται στο σήμα. $\boxed{F_s \geq 2F_{max}}$
- Πολλές και σημαντικές εφαρμογές

Παράδειγμα

Δίνονται τα αναλογικά σήματα

$x_1(t) = \sin[2\pi * (1/8)\, t]$ και

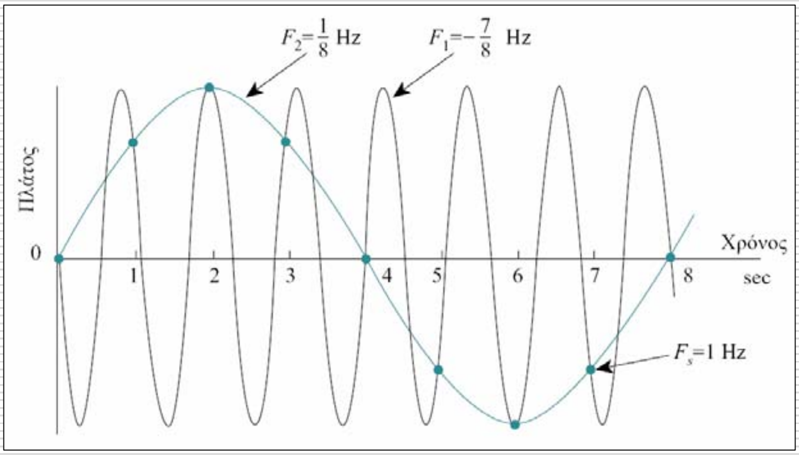
$x_2(t) = \sin[2\pi * (-7/8)\, t]$

Ποια ψηφιακά σήματα θα προκύψουν μετά τη δειγματοληψία αυτών με συχνότητα $F_s = 1$ Hz;

Παράδειγμα

- ...πρέπει να εξετάσω τις τιμές του σήματος για τις χρονικές στιγμές t=0, 1T, 2T, 3T, …, nT

Παράδειγμα



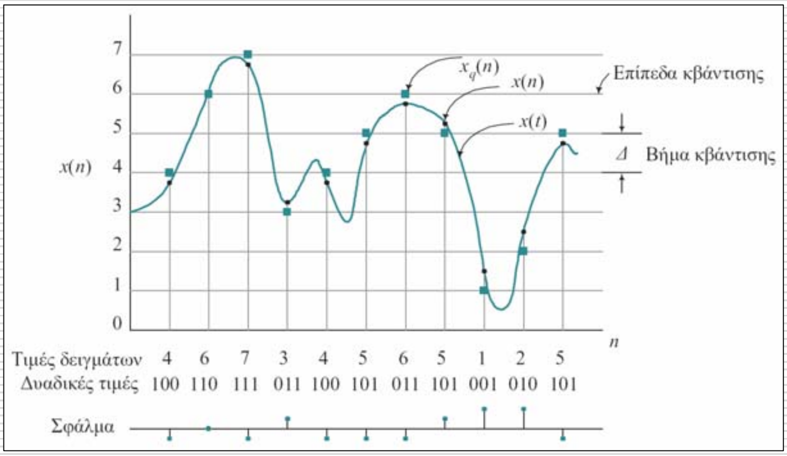
Από σήμα Δ.Χ. σε ψηφιακό

- Κβάντιση (quantisation)
  - Η μετατροπή σήματος Δ.Χ. - συνεχούς πλάτους σε ψηφιακό (Δ.Χ. - διακριτού πλάτους)
  - Κάθε δείγμα παριστάνεται με ένα *πεπερασμένο πλήθος* ψηφίων (0 ή 1)
  - Εισάγεται αναπόφευκτα σφάλμα κβάντισης (quantisation error) ή θόρυβος κβάντισης (quantisation noise)

Σφάλμα κβάντισης

- Εστω ότι
  - $x(n)$ είναι τα δείγματα εισόδου στον κβαντιστή
  - $x_q(n)$ είναι τα κβαντισμένα δείγματα
- Σφάλμα κβάντισης: $e_q(n)=x(n)-x_q(n)$
- Βήμα κβάντισης $\Delta=(x_{max}-x_{min})/(L-1)$
  - L είναι τα επίπεδα κβάντισης
  - x_{max}, x_{min} οι ακραίες τιμές του σήματος

Σφάλμα κβάντισης



Σφάλμα κβάντισης

- ΕΡΩΤΗΣΗ:
  Από τι εξαρτάται το πλήθος των επιπέδων κβάντισης;
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
  Από τον αριθμό των bit της λέξης που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση κάθε δείγματος

Σφάλμα κβάντισης

- Για ημιτονοειδή σήματα, ο λόγος σήματος προς θόρυβο κβάντισης αυξάνεται (βελτιώνεται) κατά περίπου 6 dB για κάθε bit που προστίθεται στο μήκος λέξης

Υπενθύμιση

- $1\ \text{dB} = 10\log_{10}(P2/P1) = 20\log_{10}(V2/V1)$
- Όπου P=ισχύς, V=τάση
- Και επειδή $\log_{10}(2) = 0{,}3$ (περίπου)
  - 3 dB αντιστοιχούν σε διπλασιασμό της ισχύος,
  - 6 dB αντιστοιχούν σε διπλασιασμό της τάσης

Χαρακτηριστικές τιμές

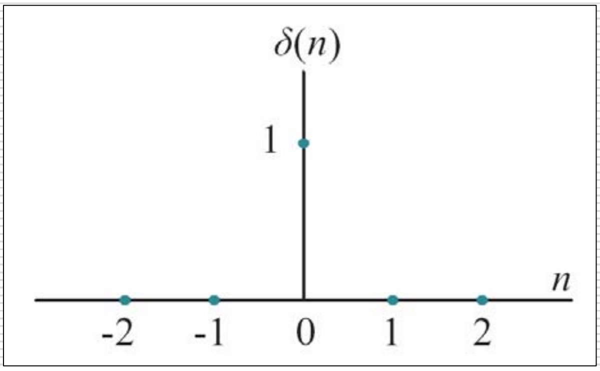
- Θεωρητικό ακουστικό φάσμα
  - 20 Hz έως 20 KHz
- Ανθρώπινη φωνή στο τηλέφωνο
  - 300 Hz – 3,3 KHz
- Μουσικά CDs
  - 16 bit = 2^{16} επίπεδα κβαντισμού
  - 44 KHz συχνότητα δειγματοληψίας
- SACD
  - 96,8 KHz συχνότητα δειγματοληψίας

Χαρακτηριστικά σήματα Δ.Χ.

- Μοναδιαίο δείγμα (unit sample) ή κρουστικός παλμός
- Μοναδιαία βηματική ακολουθία (unit step sequence)
- Σταθερή ακολουθία (constant sequence)
- Γραμμική ακολουθία (linear sequence)
- Εκθετική ακολουθία (exponential sequence)

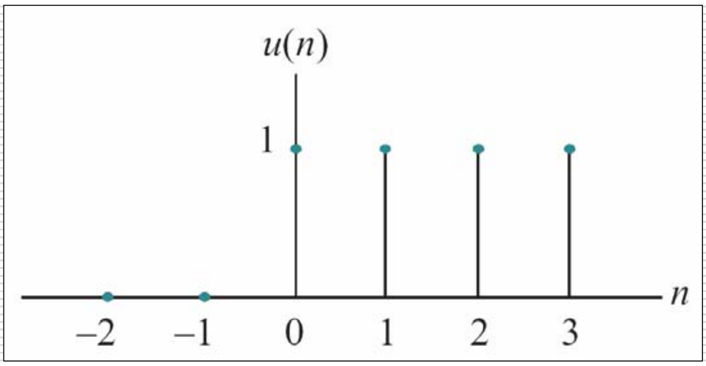
Χαρακτηριστικά σήματα Δ.Χ.

- Μοναδιαίο δείγμα x(n)=δ(n)



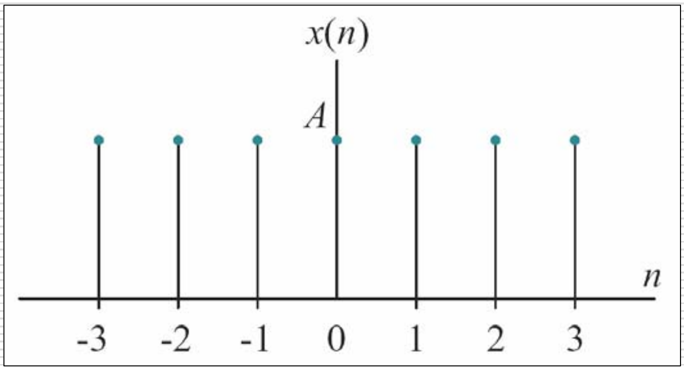
Χαρακτηριστικά σήματα

- Μοναδιαία βηματική ακολουθία x(n)=u(n)



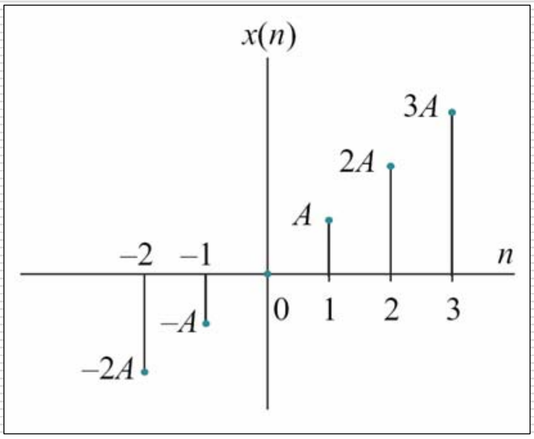
Χαρακτηριστικά σήματα

- Σταθερή ακολουθία x(n)=A



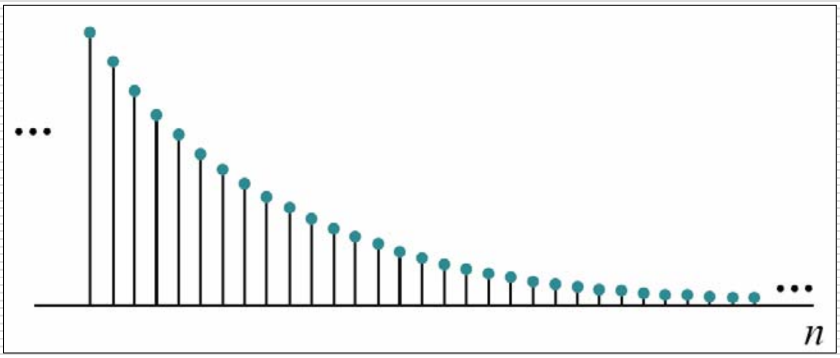
Χαρακτηριστικά σήματα

- Γραμμική ακολουθία x(n)=A n



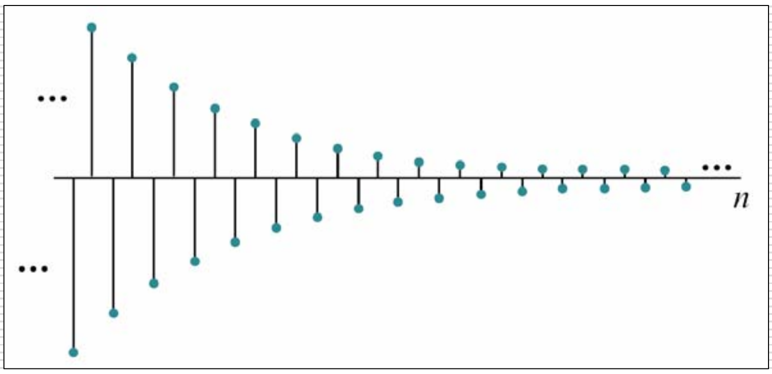
Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$, $0<a<1$



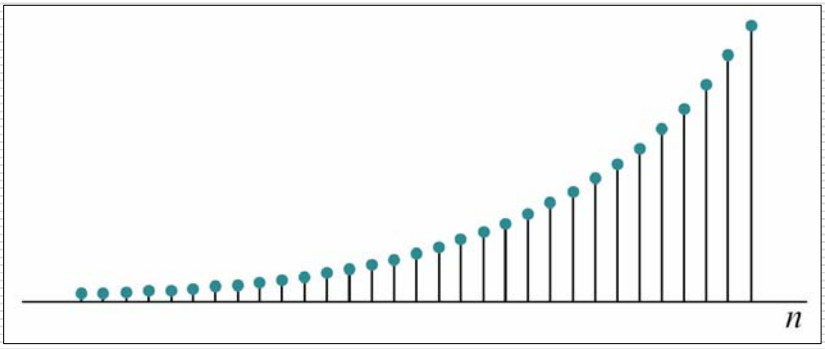
Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$, $-1<a<0$



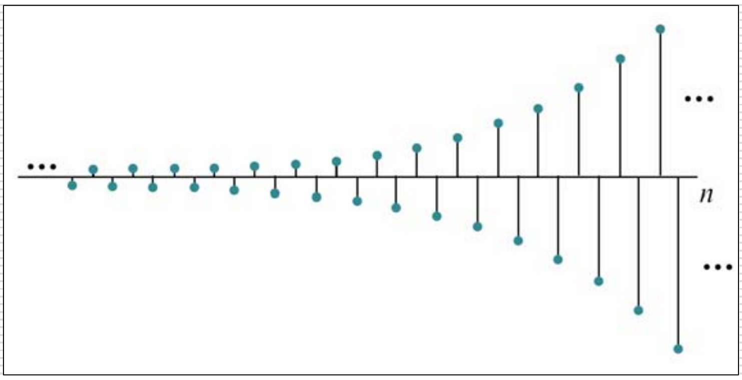
Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$, $a>1$



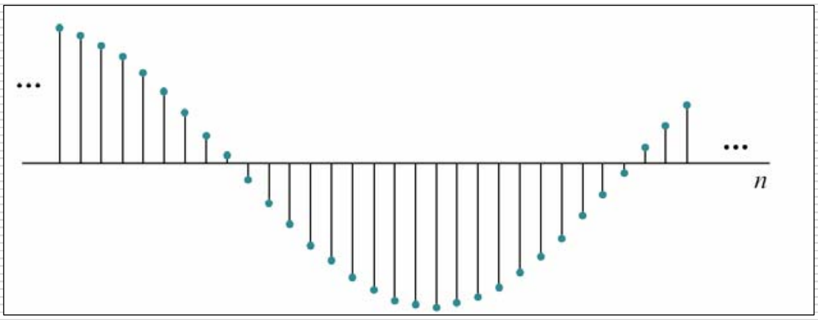
Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$, $a<-1$



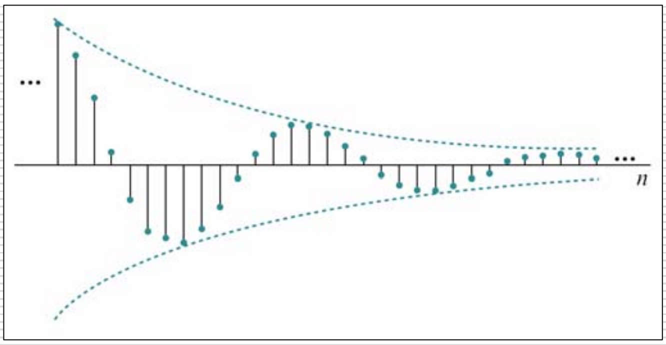
Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$
  για a μιγαδικό ($a=re^{j\omega}$) και $r=1$



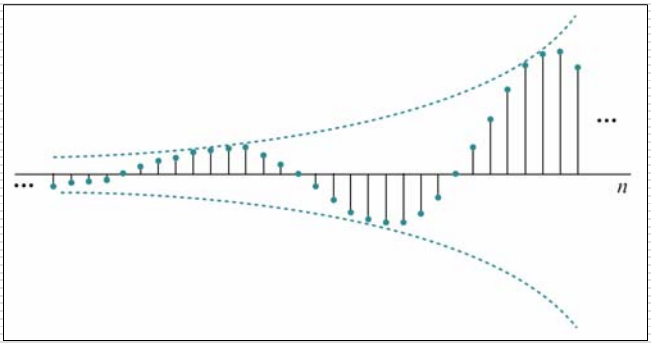
Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$
  για a μιγαδικό ($a=re^{j\omega}$) και $r<1$



Χαρακτηριστικά σήματα

- Εκθετικό σήμα $x(n)=a^n$
  για a μιγαδικό ($a=re^{j\omega}$) και $r>1$



Βασικές πράξεις

- Ολίσθηση ή μετατόπιση στο χρόνο (time shift)

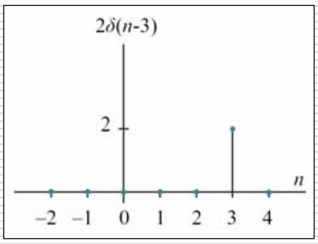
$$y(n) = x(n-k)$$

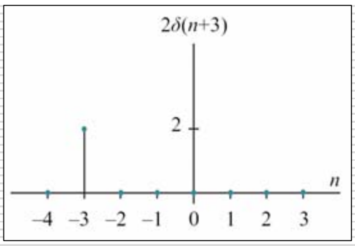
- Περιπτώσεις:
  - $k>0$ χρονική καθυστέρηση
  - $k<0$ χρονική προπόρευση

Παραδείγματα ολίσθησης

- Ολίσθηση κρουστικής ακολουθίας

$$\delta(n-n_o)=\begin{cases}1, & n=n_o\\ 0, & n\neq n_o\end{cases}$$

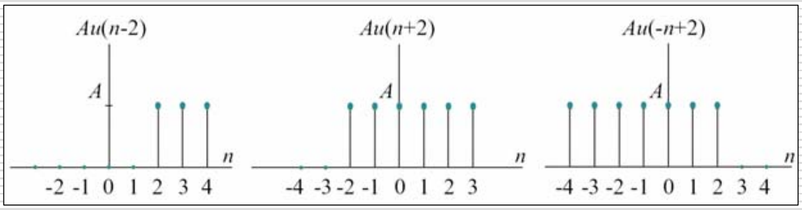




Παραδείγματα ολίσθησης

- Ολίσθηση βηματικής ακολουθίας

$$u(n-n_o)=\begin{cases}1, & n\geq n_o\\ 0, & n< n_o\end{cases}$$



Βασικές πράξεις

- Σχέση μεταξύ κρουστικού σήματος $\delta(n)$ και βηματικής ακολουθίας $u(n)$
  - Η βηματική ακολουθία είναι ένα άθροισμα κρουστικών σημάτων $u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)$
  - Το κρουστικό σήμα είναι μια διαφορά βηματικών ακολουθιών που διαφέρουν κατά μία χρονική μονάδα $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

Βασικές πράξεις

- Οποιοδήποτε σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων κρουστικών σημάτων με συντελεστές βάρους

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)$$

Παράδειγμα

Εστω το σήμα x(n)={-2, 2, **3**, 2, 0, -1, 2}

Για χρόνους *-2, -1, **0**, 1, 2, 3, 4*

Γράφεται ως:

x(n)= **-2**δ(n+2) **+2**δ(n+1) **+3**δ(n) **+2**δ(n-1) **+0**δ(n-2) **-1**δ(n-3)**+2**δ(n-4) ή

x(n)= x(-2)δ(n+2)+ x(-1)δ(n+1)+ x(0)δ(n)+ x(1)δ(n-1)+ x(2)δ(n-2)+ x(3)δ(n-3)+ x(4)δ(n-4)

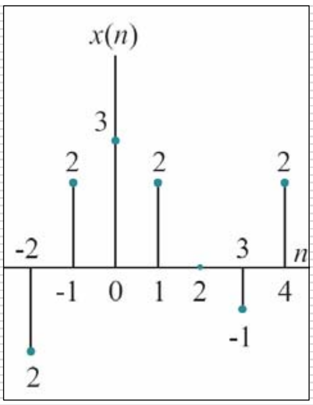
δηλαδή $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$

Παράδειγμα

x(n)={-2, 2, **3**, 2, 0, -1, 2}

x(n)= x(-2)δ(n+2)+
x(-1)δ(n+1)+ x(0)δ(n)+
x(1)δ(n-1)+ x(2)δ(n-2)+
x(3)δ(n-3)+ x(4)δ(n-4)

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$



Συστήματα

- *Σύστημα* είναι οποιαδήποτε διάταξη η οποία δέχεται ως είσοδο ένα (ή περισσότερα) σήματα και παράγει ως έξοδο ένα (ή περισσότερα) σήματα
  - Σύστημα διακριτού χρόνου: όταν οι είσοδοι και οι έξοδοι είναι σήματα διακριτού χρόνου

Συστήματα

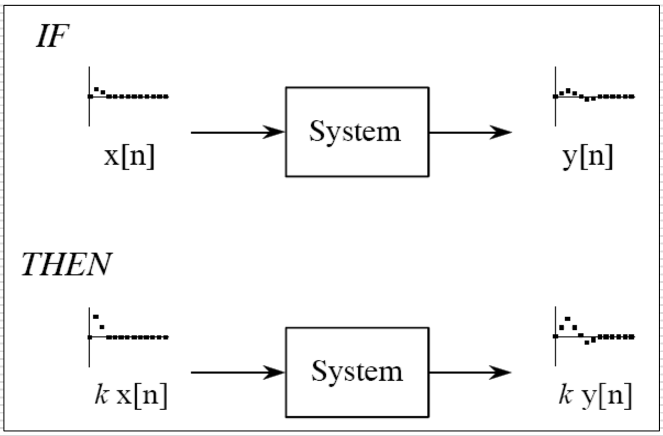
Συστήματα

- Γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα διακριτού χρόνου (**LTI**: Linear, Time-Invariant)

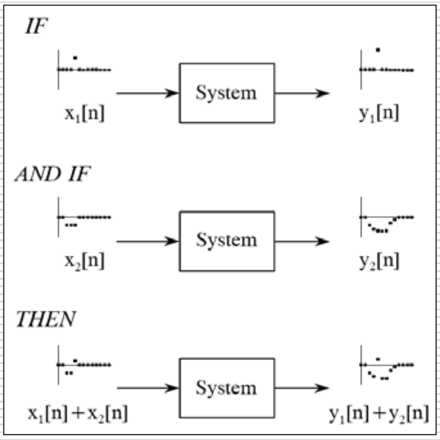
  Γραμμικό σύστημα

  - Αν σε είσοδο $x_1(n)$ έχει απόκριση $y_1(n)$ και σε είσοδο $x_2(n)$ έχει απόκριση $y_2(n)$ τότε
    σε είσοδο $ax_1(n)+bx_2(n)$
    έχει απόκριση $ay_1(n)+by_2(n)$

Συστήματα



Συστήματα



Συστήματα

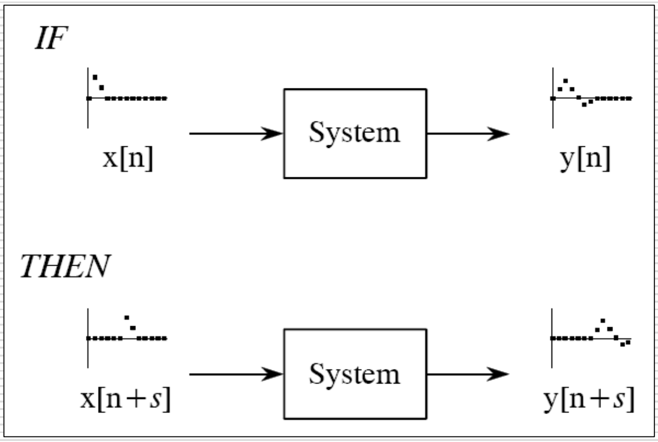
Χρονικά αμετάβλητο σύστημα

- Χρονική ολίσθηση της εισόδου προκαλεί χρονική ολίσθηση της εξόδου:
  Αν σε είσοδο $x(n)$ έχει απόκριση $y(n)$ τότε σε είσοδο $x(n\text{-}k)$ έχει απόκριση $y(n\text{-}k)$

Ευσταθές σύστημα (stable)

- Μια φραγμένη είσοδος παράγει μια φραγμένη έξοδο

Συστήματα



Συστήματα

Αιτιατό σύστημα (causal)

- Η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα ή και προηγούμενες τιμές της εισόδου
- Εχουμε:
  - γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα,
  - Ευσταθή, αιτιατά

  συστήματα διακριτού χρόνου

Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε κάποια σήματα ως προς τη γραμμικότητα, την ευστάθεια, τη χρονική μεταβλητότητα και την αιτιατότητα

α. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1)$

β. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$

γ. $y(n) = nx(n-2) - x(n+3)$

δ. $y(n) = \cos[x(n)]$

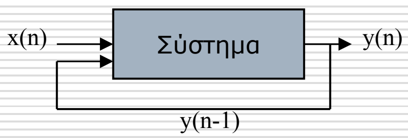
Παράδειγμα

α. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1)$

- Προφανώς γραμμικό, ευσταθές,
  χρονικά αμετάβλητο και αιτιατό

Παράδειγμα

β. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$



- Γραμμικό
- Αιτιατό
- Χρονικά αμετάβλητο
- Ευσταθές:
  Εφαρμόζω ως είσοδο τον κρουστικό σήμα θεωρώντας ότι y(-1)=0 δηλαδή το σύστημα αρχικά ήταν σε ισορροπία

Παράδειγμα

β. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$

- $y(0)=\delta(0)+2y(-1)=1+2\cdot 0=1$
- $y(1)=\delta(1)+2y(0) =0+2\cdot 1=2$
- $y(2)=\delta(2)+2y(1) =0+2\cdot 2=4$
- $y(3)=\delta(3)+2y(2) =0+2\cdot 4=8$
- …
- $y(n)=2^n$ δηλαδή απειρίζεται για φραγμένη είσοδο, δηλαδή <u>μη ευσταθές</u>

Παράδειγμα

γ. $y(n) = nx(n-2) - x(n+3)$

- Γραμμικό
- Μη αιτιατό διότι απαιτεί γνώση μελλοντικών τιμών εισόδου
- Μεταβλητό με το χρόνο (αποδείξτε!)
- Ευσταθές;

Παράδειγμα

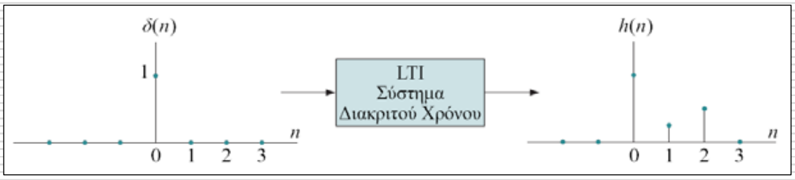
δ. $y(n) = \cos[x(n)]$

- Μη γραμμικό διότι...
- Αιτιατό διότι...
- Μη μεταβλητό με το χρόνο διότι...
- Ευσταθές διότι...

Κρουστική απόκριση

Ορισμός

- Το σήμα εξόδου ενός LTI συστήματος με είσοδό τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία δ(n), ονομάζεται *κρουστική απόκριση h(n)* του συστήματος και το χαρακτηρίζει (επίσης: φυσική απόκριση)



Κρουστική απόκριση

Σημαντική ιδιότητα

- Αν μεταφέρουμε χρονικά την εφαρμογή της δ(n) στην είσοδο του συστήματος, θα έχουμε αντίστοιχη χρονική μεταφορά της εξόδου (γιατί;)

Συνέλιξη

Ισχυρισμός

- Αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση *h(n)* ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος (LTI), τότε μπορούμε να βρούμε την απόκρισή του σε οποιαδήποτε είσοδο *x(n)*.

- Συνέλιξη (convolution)

$$\boxed{y(n)=x(n)*h(n)}$$

Συνέλιξη

Είδαμε ότι

- Μπορούμε να γράψουμε οποιοδήποτε σήμα x(n) ως άθροισμα γινομένων της κρουστικής συνάρτησης με τις τιμές του x(n) ολισθημένες χρονικά.

$$\boxed{x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)}$$

Συνέλιξη

- Για κάθε όρο του γινομένου

  $$\boxed{x(m)\delta(n-m)}$$

- Η απόκριση του συστήματος (έξοδος) θα είναι:

  $$\boxed{x(m)h(n-m)}$$

- Γράψαμε τους όρους της απόκρισης σε συνάρτηση με την κρουστική απόκριση του συστήματος

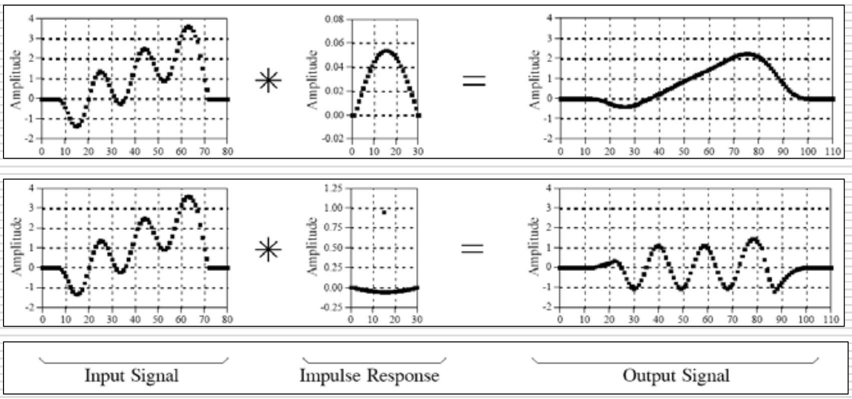
Συνέλιξη

- Και τελικά

  $$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)}$$

- Δηλαδή
  - Με τη βοήθεια της συνέλιξης μπορούμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος σε οποιαδήποτε είσοδο, αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος

Συνέλιξη



Υπολογισμός της συνέλιξης

- Με τη μέθοδο της ολισθαίνουσας ράβδου
- Με τη μέθοδο των διαγωνίων
- Με τη Matlab
- Με πρόγραμμα (C, C++)

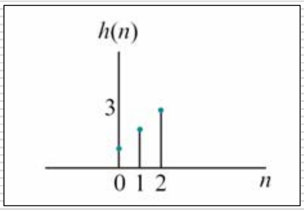
Ολισθαίνουσα ράβδος

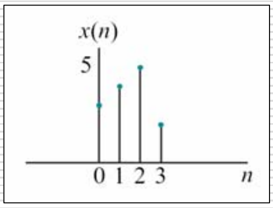
- Παίρνουμε τον αντικατοπτρισμό του ***h(n)*** ως προς το σημείο 0 ώστε να υπολογίσουμε το ***h(-m)***
- Τον τοποθετούμε κάτω από την πρώτη τιμή του σήματος εισόδου ***x(n)*** έτσι ώστε η δεξιότερη τιμή του αντικατοπτρισμού να επικαλύπτεται χρονικά με την πρώτη τιμή του σήματος εισόδου
- Αθροίζουμε τα γινόμενα των επικαλυπτόμενων τιμών: αυτή είναι η απόκριση ***y(n)***
- Ολισθαίνουμε δεξιά μέχρι να πάρουμε μόνο ένα γινόμενο

Οποιος κατάλαβε, στον πίνακα!!! ☺

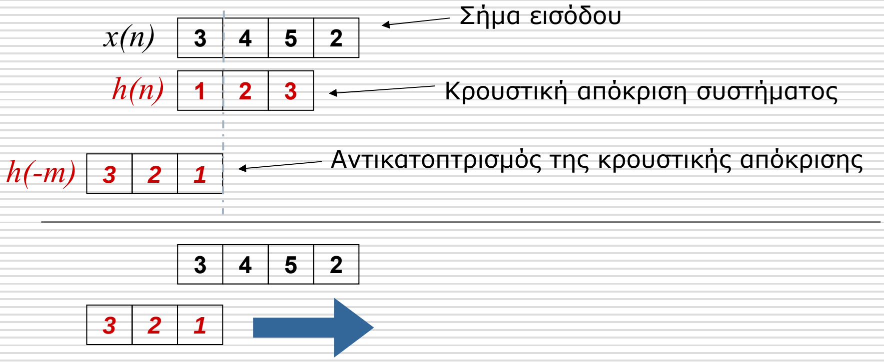
Παράδειγμα

- Εστω
  - σύστημα με h(n)={1, 2, 3}
  - σήμα εισόδου x(n) = {3, 4, 5, 2}
- Ζητάμε την απόκριση y(n)

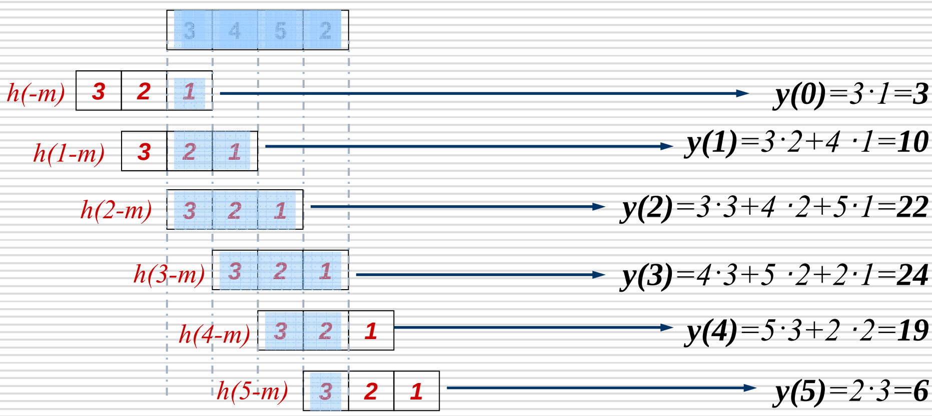




Παράδειγμα

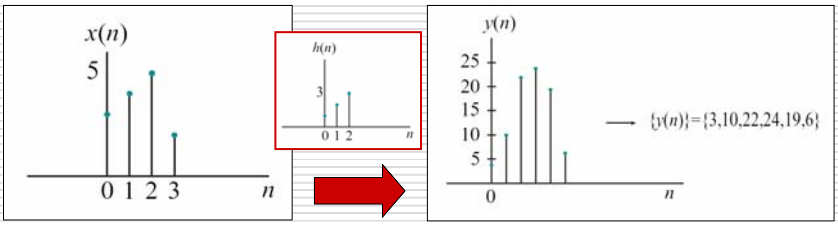


Παράδειγμα



Παράδειγμα

- Με αυτόν τον απλό τρόπο…
  - υπολογίσαμε την έξοδο $y(n)$ του συστήματος με $h(n)=\{1, 2, 3\}$ σε είσοδο $x(n)=\{3, 4, 5, 2\}$ ως τη συνέλιξη $\mathbf{x(n)*h(n)}$



Μέθοδος των διαγωνίων

- Γράφουμε τις N τιμές του σήματος εισόδου στις στήλες ενός πίνακα
- Γράφουμε τις M τιμές της κρουστικής απόκρισης στις γραμμές του ίδιου πίνακα
- Στα κελιά του πίνακα γράφουμε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών
- Η συνέλιξη είναι τα αθροίσματα όλων των διαγωνίων του πίνακα "πάνω δεξιά -> κάτω αριστερά"

Οποιος κατάλαβε, στον πίνακα!!! ☺

Παράδειγμα

- Εστω
  - σύστημα με h(n)={1, 2, 3}
  - σήμα εισόδου x(n) = {3, 4, 5, 2}

		x(0)	x(1)	x(2)	x(3)
		3	4	5	2
h(0)	1	3	4	5	2
h(1)	2	6	8	10	4
h(2)	3	9	12	15	6

3

10 22 24 19 6

Πρόγραμμα C++

Μερικά χρήσιμα τμήματα κώδικα:

- Δυναμική δέσμευση μονοδιάστατου πίνακα ακεραίων

```
 int * pinakas;
 pinakas=new int[N]; //N is a variable
 if (pinakas==NULL) {
       cerr<<"Not enough memory"; exit(9); }
...
for(i=0;i<N;i++) cin>>pinakas[i];  // use as normal

...

delete pinakas;  // free memory
```

Πρόγραμμα C++

- Δυναμική δέσμευση πίνακα 2 διαστάσεων

```
int i,N,M; N=10; M=20;  // N, M = dimensions

int** Matrix = NULL;
Matrix = new int*[N];
if (Matrix==NULL) {
    cerr<<"Error allocating memory. Exiting...\n\n";
    exit(9); }

for(i=0;i<N;i++) {
    Matrix[i]=new int[M];
    if (Matrix[i]==NULL) {
       cerr<<"Error allocating memory. Exiting...\n\n";
       exit(9); }
}
```

Πρόγραμμα C++

- (συνέχεια)

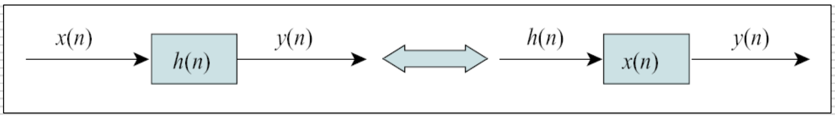
```
// free memory
for(i=0;i<N;i++)
  delete[] Matrix[i];

delete[] Matrix;
```

Ιδιότητες της συνέλιξης

- Αντιμεταθετική: $x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$
- Προσεταιριστική:
  $[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$
- Επιμεριστική:
  $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$

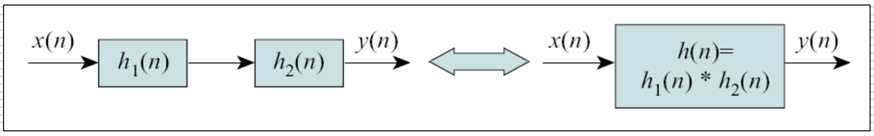


Ερμηνεία:

Η απόκριση θα είναι ίδια, ανεξάρτητα από το αν θεωρούμε ως σύστημα το $h(n)$ ή το $x(n)$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$

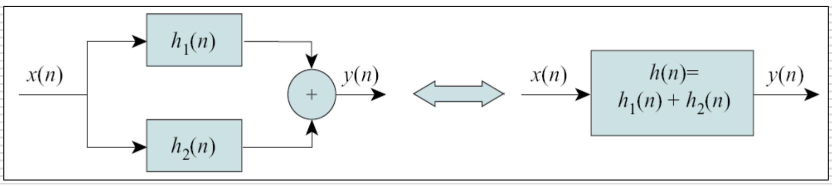


Ερμηνεία:

Η σύνδεση διαδοχικών LTI συστημάτων ισοδυναμεί με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση τη συνέλιξη των επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων

Επιμεριστική ιδιότητα

$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$



Ερμηνεία:

Η παράλληλη σύνδεση LTI συστημάτων ισοδυναμεί με LTI σύστημα με κρουστική απόκριση το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων των επιμέρους συστημάτων

Δύο σημαντικές σχέσεις

Συνέλιξη με την κρουστική ακολουθία

1. $a\delta(n) * bg(n) = abg(n)$

2. $a\delta(n-m) * bg(n) = abg(n-m)$

Παράδειγμα

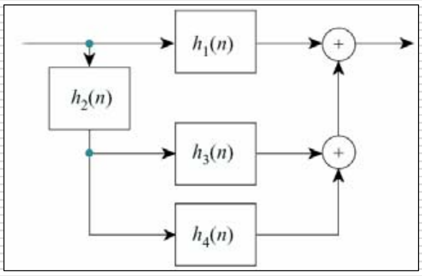
Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος του σχήματος, όταν

$h_1(n)=\delta(n)+1/2\ \delta(n-1)$

$h_2(n)=1/2\ \delta(n)-1/4\ \delta(n-1)$

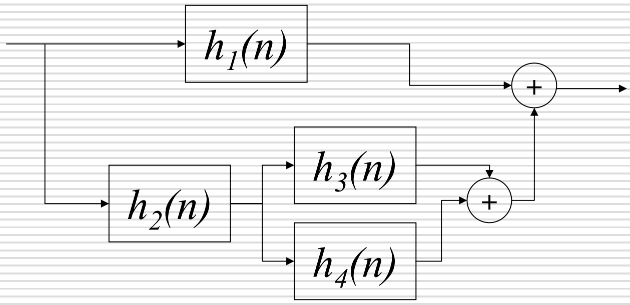
$h_3(n)=2\ \delta(n)$

$h_4(n)=-2(1/2)^n\ u(n)$



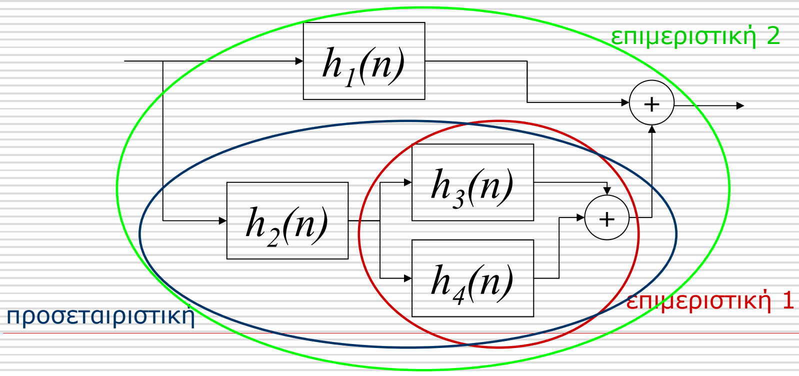
Παράδειγμα

Σχεδιάζω κάπως διαφορετικά το σύστημα ώστε να γίνει προφανές ποιες ιδιότητες της συνέλιξης θα χρησιμοποιήσω

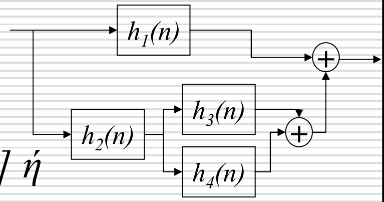


Παράδειγμα

Σχεδιάζω κάπως διαφορετικά το σύστημα ώστε να γίνει προφανές ποιες ιδιότητες της συνέλιξης θα χρησιμοποιήσω



Παράδειγμα



Οπότε:

$h(n)=h_1(n)+h_2(n)*[h_3(n)+h_4(n)]$ ή

$h(n)=h_1(n)+h_2(n)*h_3(n)+h_2(n)*h_4(n)$

$$h_2(n)*h_3(n)=\left[\frac{1}{2}\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)\right]*2\delta(n)=$$

$$\frac{1}{2}\delta(n)*2\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)*2\delta(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

Παράδειγμα

$$h_2(n)*h_4(n)=\left[\frac{1}{2}\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)\right]*\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\delta(n)*\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]-\frac{1}{4}\delta(n-1)*\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]=$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)=$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-1)]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n)=-\delta(n)$$

Παράδειγμα

και τελικά

$$h(n)=\left[\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)\right]+\left[\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)\right]+\left[-\delta(n)\right]=\delta(n)$$

και αυτά διότι

$$a\delta(n)*bg(n)=abg(n)$$
$$a\delta(n-m)*bg(n)=abg(n-m)$$

Συσχέτιση (correlation)

- Φυσική σημασία
  - Η αναζήτηση του μέτρου της ομοιότητας σημάτων $y(n)$ και $x(n)$ επιτυγχάνεται μέσω της συσχέτισης $r(n)$ των σημάτων.
  - Η συσχέτιση είναι ένα σήμα του οποίου η τιμή μεγιστοποιείται εκεί όπου μεγιστοποιείται η πιθανότητα το $y(n)$ να "ομοιάζει" προς το $x(n)$.

Συσχέτιση (ορισμός)

$$r(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l), \quad -\infty < l < \infty$$

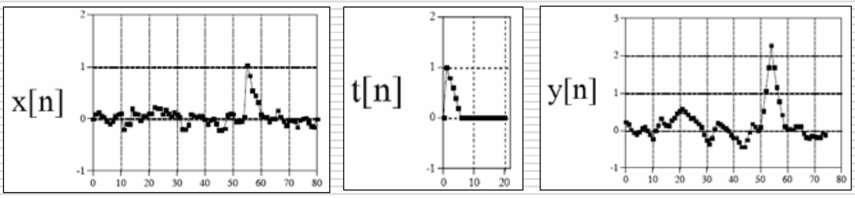
l: καθυστέρηση (lag)

Συντελεστής συσχέτισης ρ_{xy}

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{E_x}\sqrt{E_y}} \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) \quad E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n)$$

Συσχέτιση

- Παράδειγμα



Συσχέτιση

Υπολογισμός της συσχέτισης

- Υπολογίζουμε τη συνέλιξη των σημάτων
- Χωρίς να κάνουμε αναδίπλωση του ενός σήματος όπως στη συνέλιξη

- Συνέλιξη: $y(n)=a(n)*b(n)$
- Συσχέτιση: $c(n)=a(n)*b(-n)$

Συσχέτιση

- ΠΡΟΣΟΧΗ
  - Η **συνέλιξη** μας δίνει το σήμα εξόδου ενός συστήματος όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση αυτού.
  - Η **συσχέτιση** συνήθως εντοπίζει ένα γνωστό σήμα μέσα σε ένα σήμα που περιέχει θόρυβο
  - Τα παρεμφερή μαθηματικά στον υπολογισμό είναι "ευτυχής σύμπτωση"

Μετασχηματισμοί Fourier

Ιστορία

Ο Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) ήταν Γάλλος μαθηματικός και φυσικός που πρότεινε ότι οποιοδήποτε συνεχές περιοδικό σήμα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ημιτονικών κυματομορφών. Την εργασία έκριναν οι Lagrange (1726-1813) και Laplace (1749-1827). Ο Lagrange απέρριψε την εργασία του Fourier η οποία τελικά δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του Lagrange...

Μερικά σχόλια

- Η ύπαρξη και η μοναδικότητα μιας σειράς ημιτονικών συναρτήσεων είναι θέματα που απασχολούν τους **μαθηματικούς**
- Οι **μηχανικοί** αποκτούν ένα εργαλείο
  - Σύνθεσης σημάτων
  - Ανάλυσης σημάτων

  το οποίο έχει πολλές εφαρμογές

Είδη μετασχηματισμών Fourier

Σήματα	**Μετασχηματισμός Fourier**
Μη περιοδικά, συνεχή	Fourier Transform (FT)
Περιοδικά, συνεχή	Fourier Series (FS)
Μη περιοδικά, διακριτά	Discrete Time Fourier Transform (DTFT)
Περιοδικά, διακριτά	**Discrete Fourier Transform (DFT)**

Χρήσιμα μαθηματικά

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j(-\omega)t} + \frac{1}{2}e^{j\omega t}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2}je^{j(-\omega)t} - \frac{1}{2}je^{j\omega t}$$

Discrete Fourier Transform

- Συμβολισμοί
  - "Χρόνος": $x(n)$, Συχνότητα: $X(n)$
- DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}\ ,\ \ 0 \le \omega \le 2\pi$$

- Ο **DFT** είναι μια ειδική περίπτωση του DTFT με δείγματα που λαμβάνονται σε ισαπέχουσες διακριτές συχνότητες

Discrete Fourier Transform

Θεωρούμε σήμα x(n)

- N δείγματα (0 έως N-1)
- Η $X(e^{i\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π
- Ισαπέχοντα σημεία: $\Delta\omega=2\pi/N$

Ορισμός του DFT

$$X(k) \equiv X(\frac{2\pi k}{N}) = X(\mathrm{e}^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}$$

Discrete Fourier Transform

Ορισμός του DFT (ευθύς)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Αντίστροφος DFT (Inverse DFT - IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Discrete Fourier Transform

Από τον ορισμό

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

$x(n+N)=x(n)$ διότι περιοδικό

$X(k+N)=X(k)$

Discrete Fourier Transform

Συμβολισμοί: $x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$

$$X(\mathrm{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\mathrm{k}}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

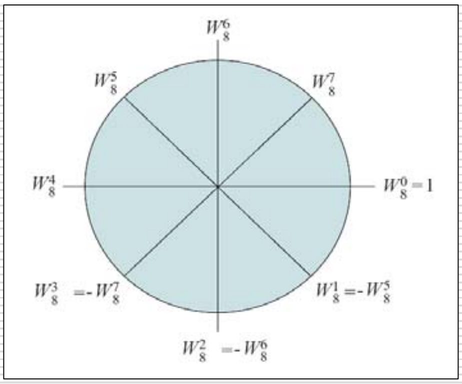
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\mathrm{k}) W_N^{-nk}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

όπου W_N λέγονται "παράγοντες στροφής"

$$\mathrm{W}_N = e^{-j2\pi/N}$$

Discrete Fourier Transform

Παράγοντες Στροφής για N=8



Discrete Fourier Transform

Παράδειγμα:

Υπολογισμός του DFT του $x(n)=\{1,1,0,0\}$

Θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό

$$X(\mathrm{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\mathrm{k}}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

και θα υπολογίσω τα W $\quad \mathrm{W}_N = e^{-j2\pi/N}$

Παράδειγμα

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

$$W_4^0 = e^{-j\frac{2\pi}{4}0} = \cos(0) - j\sin(0) = 1$$

$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = \cos(\frac{\pi}{2}) - j\sin(\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$W_4^2 = e^{-j\frac{2\pi}{4}2} = \cos(\pi) - j\sin(\pi) = -1$$

$$W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi}{4}3} = \cos(\frac{3\pi}{2}) - j\sin(\frac{3\pi}{2}) = 0 - j(-1) = j$$

Παράδειγμα

...οπότε

$$X(0)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{n0}=x(0)W_4^{00}+x(1)W_4^{10}+x(2)W_4^{20}+x(3)W_4^{30}=$$
$$=x(0)+x(1)+x(2)+x(3)=1+1+0+0=2$$

$$X(1)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{n1}=x(0)W_4^{01}+x(1)W_4^{11}+x(2)W_4^{21}+x(3)W_4^{31}=$$
$$=x(0)+x(1)\cdot(-j)+x(2)\cdot(-1)+x(3)\cdot j=1+1\cdot(-j)+0\cdot(-1)+0\cdot j=1-j$$

και συνεχίζοντας έτσι: $X(2)=0,\ X(3)=1+j$

Ο DFT της $\delta(n)$

Από τον ορισμό της δ(n):

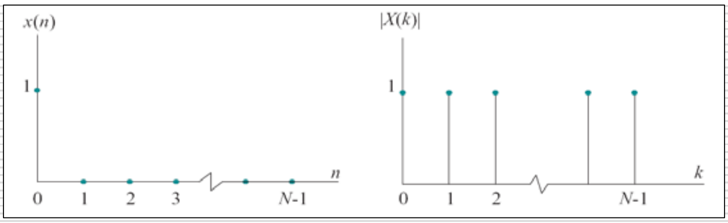
$\delta(n)=1$ για $n=0$ και $\delta(n)=0$ αλλού

Οπότε

$$X(\mathrm{k})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n\mathrm{k}}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{n\mathrm{k}}$$
$$=\delta(0)\mathrm{W}_N^{0\mathrm{k}}+\delta(1)\mathrm{W}_N^{1\mathrm{k}}+\ldots+\delta(\mathrm{N-1})\mathrm{W}_N^{(N-1)\mathrm{k}}=$$
$$=1\cdot1+0+0+\ldots+0=1$$

Ο DFT της $\delta(n)$

- Η δ(n) δίνει συχνότητες για όλες τις τιμές του k, δηλαδή καλύπτει όλο το φάσμα συχνοτήτων ("Λευκό" φάσμα)
- Να γιατί χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της απόκρισης



Ο DFT της σταθερής ακολουθίας

Από τον ορισμό της σταθερής ακολουθίας:

- *x(n)=A* για *n=0,1,...N-1* και *x(n)=0* αλλού

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, N\text{–}1$$

Για k=0 προκύπτει: $$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot e^{-j0} = \sum_{n=0}^{N-1} A \cdot 1 = A \sum_{n=0}^{N-1} 1 = A \cdot N$$

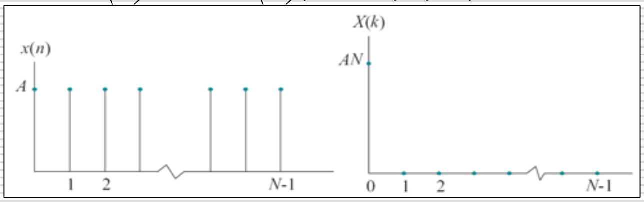
Για $k \neq 0$ προκύπτει: $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = A \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad, k = 1, 2, 3, \ldots, N\text{–}1$$

Ο DFT της σταθερής ακολουθίας

και με λίγα μαθηματικά…

$$X(k) = A \cdot \frac{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)N}}{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}} = A \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = 0 \text{ για } k = 1, 2, 3, \ldots, N-1$$

οπότε τελικά $X(k)=AN\delta(\kappa),\ k=0,1,\ldots,N-1$



Δύο χρήσιμες επεκτάσεις

Κυκλική ολίσθηση

- Μετατόπιση σήματος μήκους N κατά n_0 με πλήρωση των κενών θέσεων από τις n_0 τελευταίες τιμές του σήματος

Κυκλική συνέλιξη

- Επέκταση της συνέλιξης με χρήση της κυκλικής ολίσθησης

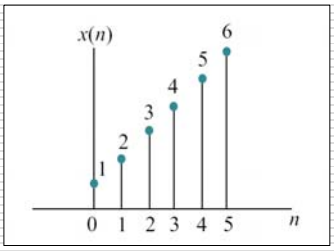
Κυκλική ολίσθιση

- Συμβολισμός modulo
  - $<a>_b$: a modulo b = το υπόλοιπο της διαίρεσης του a με το b
- Κυκλική ολίσθηση

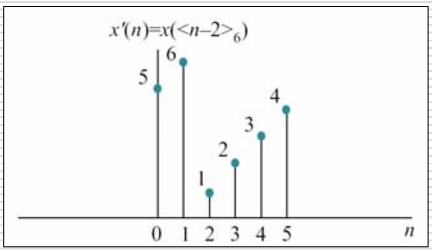
$$\boxed{x'(n) = x(< n - n_0 >_N)}$$

  - Αν $n_0 > N$ η κυκλική ολίσθηση ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση κατά $<n_0>_N$

Κυκλική ολίσθηση

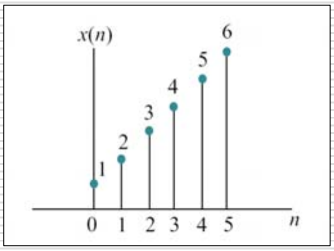


Αρχική ακολουθία *x(n)* [N=6]

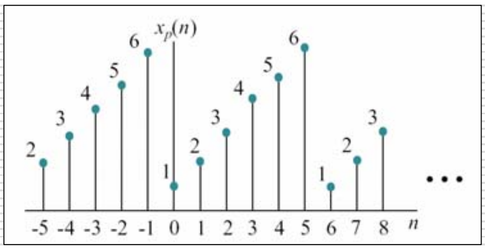


Κυκλική ολίσθηση της *x(n)* για $n_0=2$

Κυκλική ολίσθιση

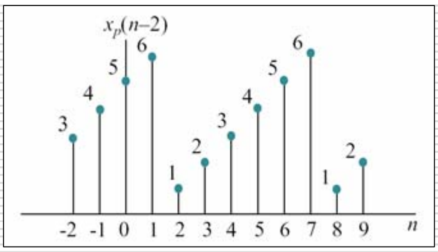


Αρχική ακολουθία $x(n)$ [N=6]

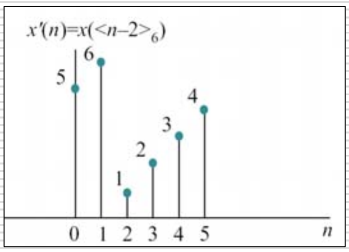


Περιοδική επέκταση της $x(n)$

Κυκλική ολίσθιση



Γραμμική ολίσθηση της περιοδικής επέκτασης της $x(n)$ για $n_0=2$



Κυκλική ολίσθηση της $x(n)$ για $n_0=2$

Κυκλική συνέλιξη

Εστω

- Σήματα $x_1(n)$, $x_2(n)$ με N τιμές (0 έως N-1)

Ορισμός κυκλικής συνέλιξης ⊗

- Ακολουθία με επίσης N τιμές

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(<n-m>_N), \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

- Αντιμεταθετική ιδιότητα
  $x_1(n) \otimes x_2(n) = x_2(n) \otimes x_1(n)$

Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης

- Παρομοίως με τη συνέλιξη
  - Κατοπτρισμός της μίας ακολουθίας
  - Κυκλική ολίσθηση της κατοπτρισμένης
  - Αθροισμα γινομένων
- Ευκολότερος προγραμματισμός
  - Παράδειγμα: $x_1=\{1,2,3\}$, $x_2=\{4,5,6\}$
  - $x_1 \otimes x_2=\{31,31,28\}$

Ιδιότητες του DFT

- Για $x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \quad x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k)$
- Ισχύουν οι ιδιότητες
  - Γραμμικότητα
  - Κυκλική ολίσθηση στο χρόνο
  - Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα
  - Συζυγής ακολουθία
  - Κατοπτρισμός στο χρόνο
  - Κυκλική συνέλιξη

Ιδιότητες του DFT

- Γραμμικότητα

Σήμα	DFT
$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$

- Κυκλική ολίσθηση στο χρόνο

Σήμα	DFT
$x(< n - n_0 >_N)$	$W^{kn_0}X(k)$

Ιδιότητες του DFT

- Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα

Σήμα	DFT
$W^{-k_0 n}x(n)$	$X(<k-k_0>_N)$

- Συζυγής ακολουθία

Σήμα	DFT
$x^*(n)$	$X^*(<-k>_N)$

Ιδιότητες του DFT

- Κατοπτρισμός στο χρόνο

Σήμα	DFT
$x(<-n>_N)$	$X^*(k)$

- Κυκλική συνέλιξη

Σήμα	DFT
$x_1(n) \otimes x_2(n)$[1]	$X_1(k)X_2(k)$

Ο DFT σε μορφή πινάκων

- Θεωρούμε ότι

$\mathbf{x} = [x(0)\ x(1)\ \ldots\ x(N-1)]^{\mathrm{T}}$ $\quad$ $\mathbf{X} = [X(0)\ X(1)\ \ldots\ X(N-1)]^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \ldots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \ldots & W_N^{2(N-1)} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Στοιχείο *(i,j)*
για $i=0..N-1$
$j=0..N-1$: W_N^{i*j}

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Ο DFT σε μορφή πινάκων

Τότε

- $\mathbf{X}=\mathbf{W}\mathbf{x}$ — διατύπωση DFT
- $\mathbf{x}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$ — αντίστροφος DFT (IDFT)
- $\mathbf{x}=(1/N)\mathbf{W}^*\mathbf{X}$ — W*=συζυγής μιγαδικός
- $\mathbf{W}^{-1}=(1/N)\mathbf{W}^*$
- $\mathbf{W}\mathbf{W}^*=N\mathbf{I}$

Απαιτούνται **N^2** μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και **N(N-1)** μιγαδικές προσθέσεις!

Ο DFT σε μορφή πινάκων

Αλγόριθμοι FFT

- Γρήγοροι τρόποι υπολογισμού του DFT βασιζόμενοι
  - σε ιδιότητες των πινάκων και
  - σε περιορισμούς επί των σημάτων
- Πολυπλοκότητα: $(N/2)\log_2 N$

Αλγόριθμοι FFT

- DFT με αλγόριθμο FFT

Σήμα (N)	DFT	FFT	DFT/FFT
256	65.536	1.024	64
512	262.144	2.304	114
1.024	1.048.576	5.120	205
2.048	4.194.304	11.264	372
4.096	16.777.216	24.576	683
8.192	67.108.864	53.248	1.260
16.384	268.435.456	114.688	2.341
32.768	1.073.741.824	245.760	4.369
65.536	4.294.967.296	524.288	8.192

1,5 sec μονοκαναλικής μουσικής ποιότητας CD