Βασικές πράξεις

- Ολίσθηση ή μετατόπιση στο χρόνο (time shift)

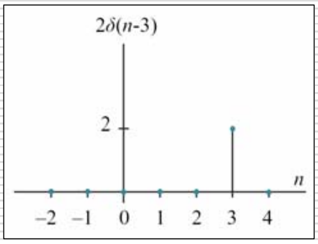
$$y(n) = x(n\text{-}k)$$

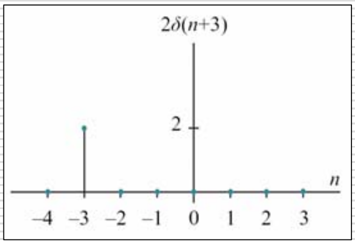
- Περιπτώσεις:
  - k>0 χρονική καθυστέρηση
  - k<0 χρονική προπόρευση

Παραδείγματα ολίσθησης

- Ολίσθηση κρουστικής ακολουθίας

$$\delta(n-n_o)=\begin{cases}1, & n=n_o\\ 0, & n\neq n_o\end{cases}$$

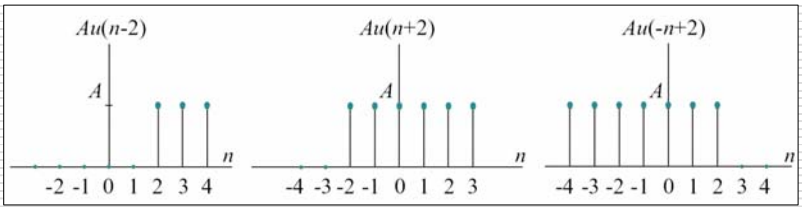




Παραδείγματα ολίσθησης

- Ολίσθηση βηματικής ακολουθίας

$$u(n-n_o)=\begin{cases}1, & n\geq n_o\\ 0, & n<n_o\end{cases}$$



Βασικές πράξεις

- Σχέση μεταξύ κρουστικού σήματος *δ(n)* και βηματικής ακολουθίας *u(n)*
  - Η βηματική ακολουθία είναι ένα άθροισμα κρουστικών σημάτων $$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)$$
  - Το κρουστικό σήμα είναι μια διαφορά βηματικών ακολουθιών που διαφέρουν κατά μία χρονική μονάδα $$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

Βασικές πράξεις

- Οποιοδήποτε σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων κρουστικών σημάτων με συντελεστές βάρους

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

Παράδειγμα

Εστω το σήμα x(n)={-2, 2, **3**, 2, 0, -1, 2}

Για χρόνους *-2, -1,* ***0****, 1, 2, 3, 4*

Γράφεται ως:

x(n)= **-2**δ(n+2) **+2**δ(n+1) **+3**δ(n) **+2**δ(n-1) **+0**δ(n-2) **-1**δ(n-3)+**2**δ(n-4) ή

x(n)= x(-2)δ(n+2)+ x(-1)δ(n+1)+ x(0)δ(n)+ x(1)δ(n-1)+ x(2)δ(n-2)+ x(3)δ(n-3)+ x(4)δ(n-4)

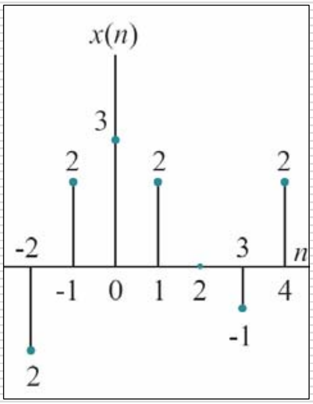
δηλαδή $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$

Παράδειγμα

x(n)={-2, 2, **3**, 2, 0, -1, 2}

x(n)= x(-2)δ(n+2)+
x(-1)δ(n+1)+ x(0)δ(n)+
x(1)δ(n-1)+ x(2)δ(n-2)+
x(3)δ(n-3)+ x(4)δ(n-4)

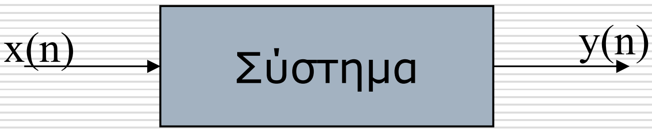
$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$



Συστήματα

- *Σύστημα* είναι οποιαδήποτε διάταξη η οποία δέχεται ως είσοδο ένα (ή περισσότερα) σήματα και παράγει ως έξοδο ένα (ή περισσότερα) σήματα
  - Σύστημα διακριτού χρόνου: όταν οι είσοδοι και οι έξοδοι είναι σήματα διακριτού χρόνου

Συστήματα



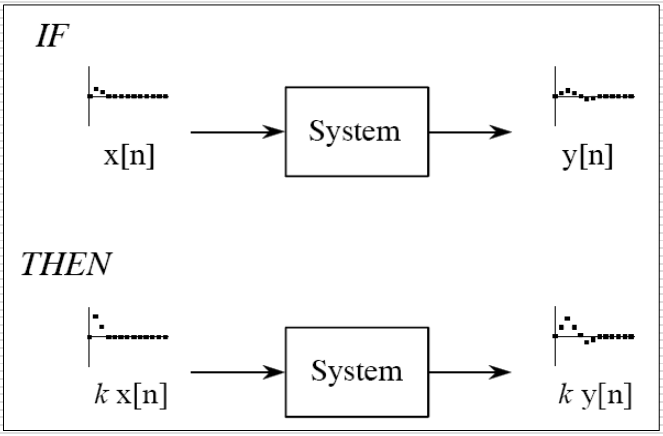
Συστήματα

- Γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα διακριτού χρόνου (LTI: Linear, Time-Invariant)

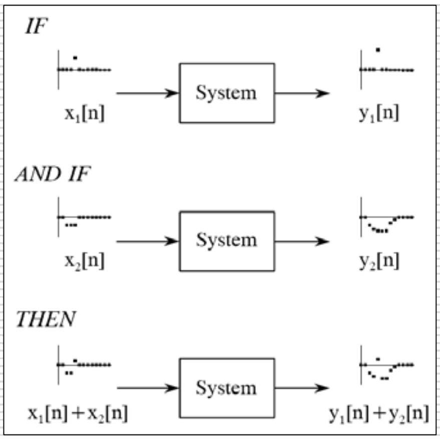
  Γραμμικό σύστημα

  - Αν σε είσοδο $x_1(n)$ έχει απόκριση $y_1(n)$ και σε είσοδο $x_2(n)$ έχει απόκριση $y_2(n)$ τότε σε είσοδο $ax_1(n)+bx_2(n)$ έχει απόκριση $ay_1(n)+by_2(n)$

Συστήματα



Συστήματα



Συστήματα

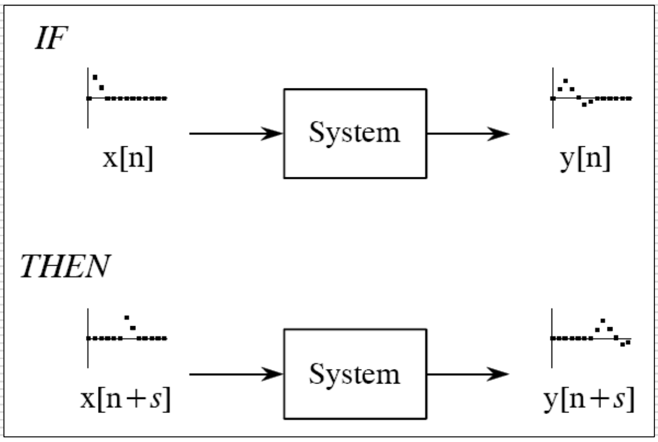
Χρονικά αμετάβλητο σύστημα

- Χρονική ολίσθηση της εισόδου προκαλεί χρονική ολίσθηση της εξόδου:
  Αν σε είσοδο $x(n)$ έχει απόκριση $y(n)$ τότε σε είσοδο $x(n-k)$ έχει απόκριση $y(n-k)$

Ευσταθές σύστημα (stable)

- Μια φραγμένη είσοδος παράγει μια φραγμένη έξοδο

Συστήματα



Συστήματα

Αιτιατό σύστημα (causal)

- Η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα ή και προηγούμενες τιμές της εισόδου

- Εχουμε:
  - γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα,
  - Ευσταθή, αιτιατά

  συστήματα διακριτού χρόνου

Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε κάποια σήματα ως προς τη γραμμικότητα, την ευστάθεια, τη χρονική μεταβλητότητα και την αιτιατότητα

α. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1)$

β. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$

γ. $y(n) = nx(n-2) - x(n+3)$

δ. $y(n) = \cos[x(n)]$

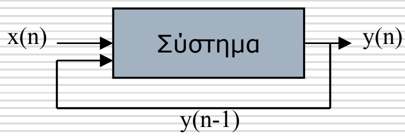
Παράδειγμα

α. $y(n) = 3x(n) - 2x(n-1)$

- Προφανώς γραμμικό,
  ευσταθές,
  χρονικά αμετάβλητο και
  αιτιατό

Παράδειγμα

β. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$



- Γραμμικό
- Αιτιατό
- Χρονικά αμετάβλητο
- Ευσταθές:
  Εφαρμόζω ως είσοδο τον κρουστικό σήμα θεωρώντας ότι y(-1)=0 δηλαδή το σύστημα αρχικά ήταν σε ισορροπία

Παράδειγμα

β. $y(n) = x(n) + 2y(n-1)$

- $y(0)=\delta(0)+2y(-1)=1+2\cdot 0=1$
- $y(1)=\delta(1)+2y(0)=0+2\cdot 1=2$
- $y(2)=\delta(2)+2y(1)=0+2\cdot 2=4$
- $y(3)=\delta(3)+2y(2)=0+2\cdot 4=8$
- …
- $y(n)=2^n$ δηλαδή απειρίζεται για φραγμένη είσοδο, δηλαδή <u>μη ευσταθές</u>

Παράδειγμα

γ. $y(n) = nx(n-2)-x(n+3)$

- Γραμμικό
- Μη αιτιατό διότι απαιτεί γνώση μελλοντικών τιμών εισόδου
- Μεταβλητό με το χρόνο (αποδείξτε!)
- Ευσταθές;

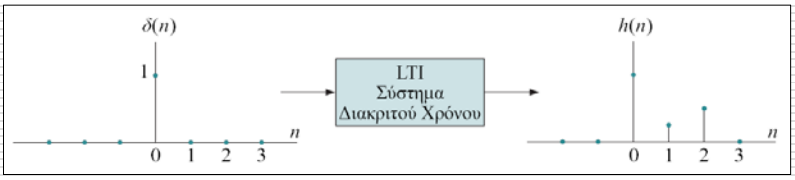
Παράδειγμα

δ. $y(n) = \cos[x(n)]$

- Μη γραμμικό διότι...
- Αιτιατό διότι...
- Μη μεταβλητό με το χρόνο διότι...
- Ευσταθές διότι...

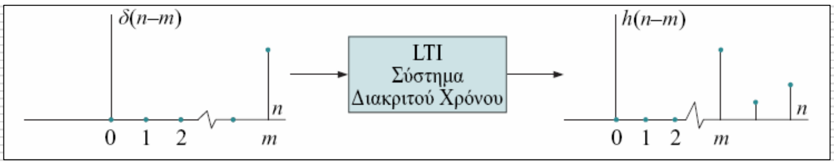
Κρουστική απόκριση

- Ορισμός
  - Το σήμα εξόδου ενός LTI συστήματος με είσοδό τη μοναδιαία κρουστική ακολουθία δ(n), ονομάζεται κρουστική απόκριση h(n) του συστήματος και το χαρακτηρίζει (επίσης: φυσική απόκριση)



Κρουστική απόκριση

- Σημαντική ιδιότητα
  - Αν μεταφέρουμε χρονικά την εφαρμογή της δ(n) στην είσοδο του συστήματος, θα έχουμε αντίστοιχη χρονική μεταφορά της εξόδου (γιατί;)



Συνέλιξη

- Ισχυρισμός
  - Αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση *h(n)* ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος (LTI), τότε μπορούμε να βρούμε την απόκρισή του σε οποιαδήποτε είσοδο *x(n)*.
- Συνέλιξη (convolution)

$$\boxed{y(n)=x(n)*h(n)}$$

Συνέλιξη

- Είδαμε ότι
  - Μπορούμε να γράψουμε οποιοδήποτε σήμα x(n) ως άθροισμα γινομένων της κρουστικής συνάρτησης με τις τιμές του x(n) ολισθημένες χρονικά.

$$\boxed{x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)}$$

Συνέλιξη

- Για κάθε όρο του γινομένου

  $\boxed{x(m)\delta(n-m)}$

- Η απόκριση του συστήματος (έξοδος) θα είναι:

  $\boxed{x(m)h(n-m)}$

- Γράψαμε τους όρους της απόκρισης σε συνάρτηση με την κρουστική απόκριση του συστήματος

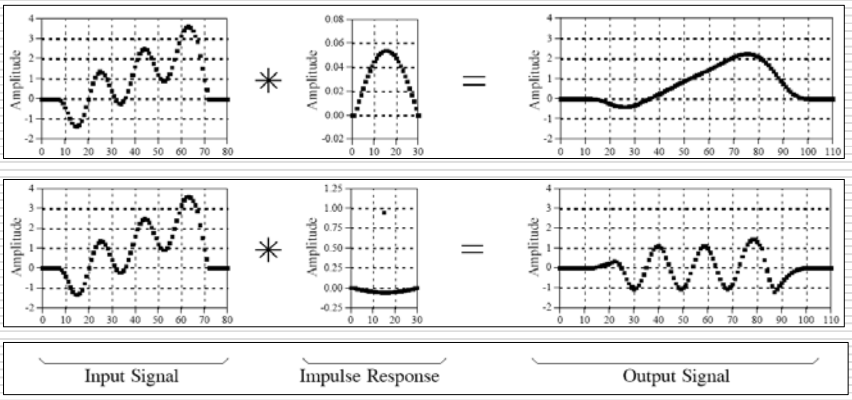
Συνέλιξη

- Και τελικά

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

- Δηλαδή
  - Με τη βοήθεια της συνέλιξης μπορούμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος σε οποιαδήποτε είσοδο, αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος

Συνέλιξη



Υπολογισμός της συνέλιξης

Προσεχώς!