Πρόγραμμα C++

Μερικά χρήσιμα τμήματα κώδικα:

- Δυναμική δέσμευση μονοδιάστατου πίνακα ακεραίων

```
 int * pinakas;
 pinakas=new int[N]; //N is a variable
 if (pinakas==NULL) {
       cerr<<"Not enough memory"; exit(9); }
...
for(i=0;i<N;i++) cin>>pinakas[i];  // use as normal

...

delete pinakas;  // free memory
```

Πρόγραμμα C++

- Δυναμική δέσμευση πίνακα 2 διαστάσεων

```
int i,N,M; N=10; M=20;  // N, M = dimensions

int** Matrix = NULL;
Matrix = new int*[N];
if (Matrix==NULL) {
    cerr<<"Error allocating memory. Exiting...\n\n";
    exit(9); }

for(i=0;i<N;i++) {
    Matrix[i]=new int[M];
    if (Matrix[i]==NULL) {
       cerr<<"Error allocating memory. Exiting...\n\n";
       exit(9); }
}
```

Πρόγραμμα C++

- (συνέχεια)

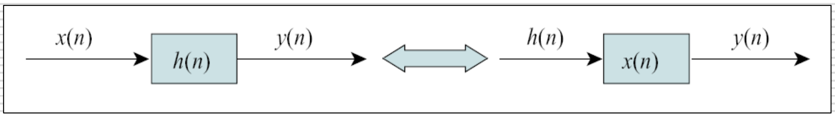
```
// free memory
for(i=0;i<N;i++)
  delete[] Matrix[i];

delete[] Matrix;
```

Ιδιότητες της συνέλιξης

- Αντιμεταθετική: $x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$
- Προσεταιριστική: $[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$
- Επιμεριστική: $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$

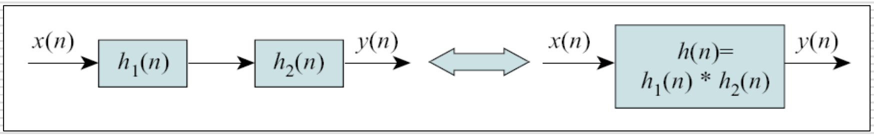


Ερμηνεία:

Η απόκριση θα είναι ίδια, ανεξάρτητα από το αν θεωρούμε ως σύστημα το $h(n)$ ή το $x(n)$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$

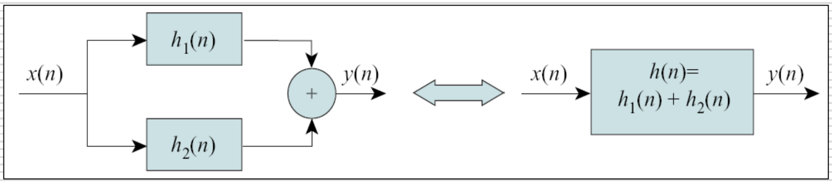


Ερμηνεία:

Η σύνδεση διαδοχικών LTI συστημάτων ισοδυναμεί με ένα LTI σύστημα με κρουστική απόκριση τη συνέλιξη των επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων

Επιμεριστική ιδιότητα

$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$



Ερμηνεία:

Η παράλληλη σύνδεση LTI συστημάτων ισοδυναμεί με LTI σύστημα με κρουστική απόκριση το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων των επιμέρους συστημάτων

Δύο σημαντικές σχέσεις

Συνέλιξη με την κρουστική ακολουθία

1. $a\delta(n)*bg(n)=abg(n)$

2. $a\delta(n-m)*bg(n)=abg(n-m)$

Παράδειγμα

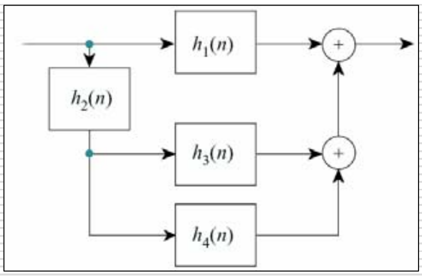
Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος του σχήματος, όταν

$h_1(n)=\delta(n)+1/2\ \delta(n-1)$

$h_2(n)=1/2\ \delta(n)-1/4\ \delta(n-1)$

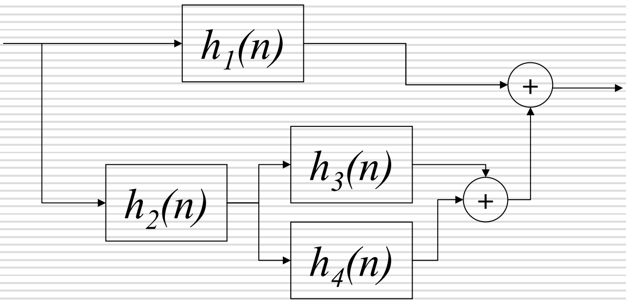
$h_3(n)=2\ \delta(n)$

$h_4(n)=-2(1/2)^n\ u(n)$



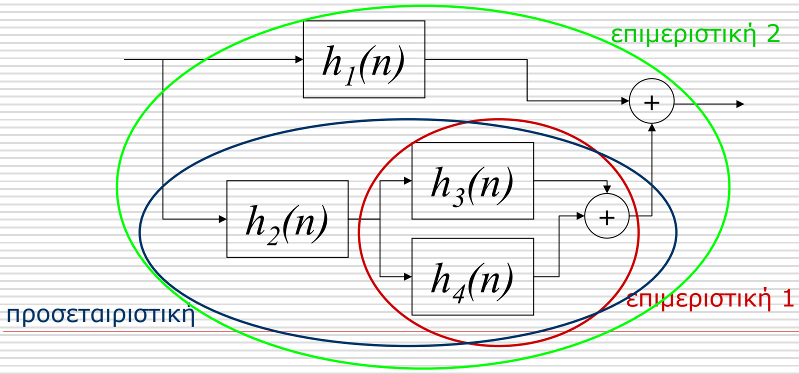
Παράδειγμα

Σχεδιάζω κάπως διαφορετικά το σύστημα ώστε να γίνει προφανές ποιες ιδιότητες της συνέλιξης θα χρησιμοποιήσω

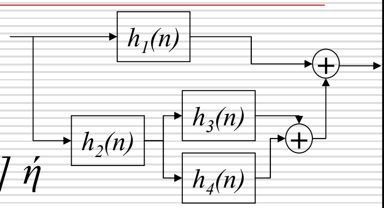


Παράδειγμα

Σχεδιάζω κάπως διαφορετικά το σύστημα ώστε να γίνει προφανές ποιες ιδιότητες της συνέλιξης θα χρησιμοποιήσω



Παράδειγμα



Οπότε:

$h(n)=h_1(n)+h_2(n)*[h_3(n)+h_4(n)]$ *ή*

$h(n)=h_1(n)+h_2(n)*h_3(n)+h_2(n)*h_4(n)$

$$h_2(n)*h_3(n)=\left[\frac{1}{2}\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)\right]*2\delta(n)=$$

$$\frac{1}{2}\delta(n)*2\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)*2\delta(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

Παράδειγμα

$$h_2(n)*h_4(n)=\left[\frac{1}{2}\delta(n)-\frac{1}{4}\delta(n-1)\right]*\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\delta(n)*\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]-\frac{1}{4}\delta(n-1)*\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]=$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)=$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-1)]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(n)=-\delta(n)$$

Παράδειγμα

και τελικά

$$h\ (n)=\left[\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)\right]+\left[\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)\right]+[-\delta(n)]=\delta(n)$$

και αυτά διότι

$$a\delta(n)*bg(n)=abg(n)$$
$$a\delta(n-m)*bg(n)=abg(n-m)$$

Συσχέτιση (correlation)

- Φυσική σημασία
  - Η αναζήτηση του μέτρου της ομοιότητας σημάτων $y(n)$ και $x(n)$ επιτυγχάνεται μέσω της συσχέτισης $r(n)$ των σημάτων.
  - Η συσχέτιση είναι ένα σήμα του οποίου η τιμή μεγιστοποιείται εκεί όπου μεγιστοποιείται η πιθανότητα το $y(n)$ να "ομοιάζει" προς το $x(n)$.

Συσχέτιση (ορισμός)

$$r(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l), \quad -\infty < l < \infty$$

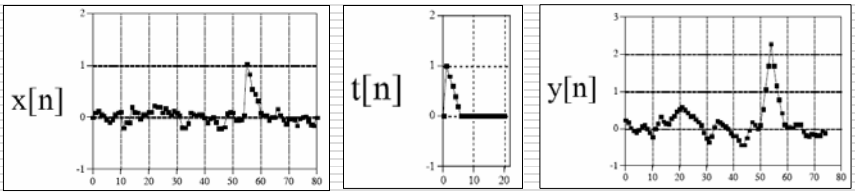
l: καθυστέρηση (lag)

Συντελεστής συσχέτισης ρ_{xy}

$$\rho_{xy} = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{E_x}\sqrt{E_y}} \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) \quad E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n)$$

Συσχέτιση

- Παράδειγμα



Συσχέτιση

Υπολογισμός της συσχέτισης

- Υπολογίζουμε τη συνέλιξη των σημάτων
- Χωρίς να κάνουμε αναδίπλωση του ενός σήματος όπως στη συνέλιξη

- Συνέλιξη: $y(n)=a(n)*b(n)$

- Συσχέτιση: $c(n)=a(n)*b(-n)$

Συσχέτιση

- ΠΡΟΣΟΧΗ
  - Η **συνέλιξη** μας δίνει το σήμα εξόδου ενός συστήματος όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση αυτού.
  - Η **συσχέτιση** συνήθως εντοπίζει ένα γνωστό σήμα μέσα σε ένα σήμα που περιέχει θόρυβο
  - Τα παρεμφερή μαθηματικά στον υπολογισμό είναι "ευτυχής σύμπτωση"

Μετασχηματισμοί Fourier

Ιστορία

Ο Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) ήταν Γάλλος μαθηματικός και φυσικός που πρότεινε ότι οποιοδήποτε συνεχές περιοδικό σήμα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ημιτονικών κυματομορφών. Την εργασία έκριναν οι Lagrange (1726-1813) και Laplace (1749-1827). Ο Lagrange απέρριψε την εργασία του Fourier η οποία τελικά δημοσιεύτηκε μετά το θάνατο του Lagrange...

Μερικά σχόλια

- Η ύπαρξη και η μοναδικότητα μιας σειράς ημιτονικών συναρτήσεων είναι θέματα που απασχολούν τους **μαθηματικούς**
- Οι **μηχανικοί** αποκτούν ένα εργαλείο
  - Σύνθεσης σημάτων
  - Ανάλυσης σημάτων

  το οποίο έχει πολλές εφαρμογές

Είδη μετασχηματισμών Fourier

Σήματα	Μετασχηματισμός Fourier
Μη περιοδικά, συνεχή	Fourier Transform (FT)
Περιοδικά, συνεχή	Fourier Series (FS)
Μη περιοδικά, διακριτά	Discrete Time Fourier Transform (DTFT)
Περιοδικά, διακριτά	**Discrete Fourier Transform (DFT)**

Χρήσιμα μαθηματικά

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j(-\omega)t} + \frac{1}{2}e^{j\omega t}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2}je^{j(-\omega)t} - \frac{1}{2}je^{j\omega t}$$

Discrete Fourier Transform

- Συμβολισμοί
  - "Χρόνος": $x(n)$, Συχνότητα: $X(n)$
- DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}, \ 0 \le \omega \le 2\pi$$

- Ο **DFT** είναι μια ειδική περίπτωση του DTFT με δείγματα που λαμβάνονται σε ισαπέχουσες διακριτές συχνότητες

Discrete Fourier Transform

Θεωρούμε σήμα x(n)

- N δείγματα (0 έως N-1)
- Η $X(e^{i\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π
- Ισαπέχοντα σημεία: $\Delta\omega=2\pi/N$

Ορισμός του DFT

$$X(k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N}$$

Discrete Fourier Transform

Ορισμός του DFT (ευθύς)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

Αντίστροφος DFT (Inverse DFT - IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Discrete Fourier Transform

Από τον ορισμό

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

$x(n+N)=x(n)$ διότι περιοδικό

$X(k+N)=X(k)$

Discrete Fourier Transform

Συμβολισμοί: $x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$

$$X(\mathrm{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\mathrm{k}}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

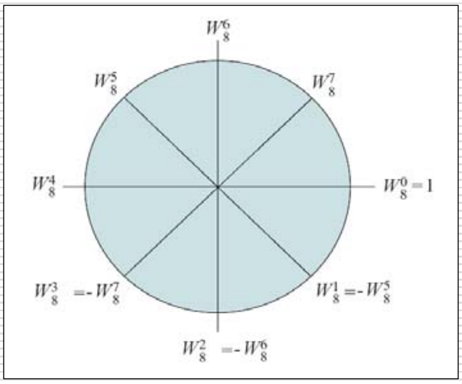
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\mathrm{k}) W_N^{-nk}, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

όπου W_N λέγονται "παράγοντες στροφής"

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Discrete Fourier Transform

Παράγοντες Στροφής για N=8



Discrete Fourier Transform

Παράδειγμα:

Υπολογισμός του DFT του x(n)={1,1,0,0}

Θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό

$$X(\mathrm{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\mathrm{k}}, \;\; k = 0, \; 1, \; \ldots, \;\; N-1,$$

και θα υπολογίσω τα W $\mathrm{W}_N = e^{-j2\pi/N}$

Παράδειγμα

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}}$$

$$W_4^0 = e^{-j\frac{2\pi}{4}0} = \cos(0) - j\sin(0) = 1$$

$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = \cos(\frac{\pi}{2}) - j\sin(\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$W_4^2 = e^{-j\frac{2\pi}{4}2} = \cos(\pi) - j\sin(\pi) = -1$$

$$W_4^3 = e^{-j\frac{2\pi}{4}3} = \cos(\frac{3\pi}{2}) - j\sin(\frac{3\pi}{2}) = 0 - j(-1) = -j$$

Παράδειγμα

...οπότε

$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_4^{n0} = x(0)W_4^{00} + x(1)W_4^{10} + x(2)W_4^{20} + x(3)W_4^{30} =$$
$$= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 1 + 1 + 0 + 0 = 2$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_4^{n1} = x(0)W_4^{01} + x(1)W_4^{11} + x(2)W_4^{21} + x(3)W_4^{31} =$$
$$= x(0) + x(1)\cdot(-j) + x(2)\cdot(-1) + x(3)\cdot j = 1 + 1\cdot(-j) + 0\cdot(-1) + 0\cdot j = 1 - j$$

και συνεχίζοντας έτσι: $X(2)=0,\ X(3)=1+j$

Ο DFT της $\delta(n)$

Από τον ορισμό της δ(n):

$\delta(n)=1$ για $n=0$ και $\delta(n)=0$ αλλού

Οπότε

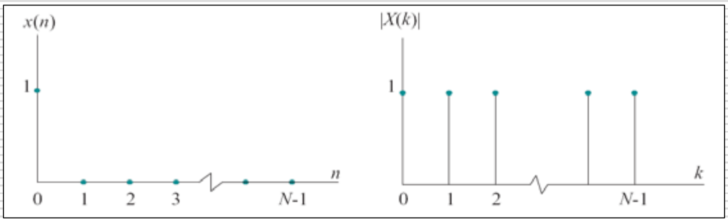
$$X(\mathrm{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n\mathrm{k}} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{n\mathrm{k}}$$

$$= \delta(0)\mathrm{W}_N^{0\mathrm{k}} + \delta(1)\mathrm{W}_N^{1\mathrm{k}} + \ldots + \delta(\mathrm{N}-1)\mathrm{W}_N^{(N-1)\mathrm{k}} =$$

$$= 1 \cdot 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 1$$

Ο DFT της $\delta(n)$

- Η δ(n) δίνει συχνότητες για όλες τις τιμές του k, δηλαδή καλύπτει όλο το φάσμα συχνοτήτων ("Λευκό" φάσμα)
- Να γιατί χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της απόκρισης



Ο DFT της σταθερής ακολουθίας

Από τον ορισμό της σταθερής ακολουθίας:

- $x(n)=A$ για $n=0,1,\ldots N\text{-}1$ και $x(n)=0$ αλλού

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}A\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\;,\; k=0,1,2,3,\ldots,N-1$$

Για $k=0$ προκύπτει: $$X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}A\cdot e^{-j0}=\sum_{n=0}^{N-1}A\cdot 1=A\sum_{n=0}^{N-1}1=A\cdot N$$

Για $k\neq 0$ προκύπτει: $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}Ae^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=A\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\;,\; k=1,2,3,\ldots,N-1$$

Ο DFT της σταθερής ακολουθίας

και με λίγα μαθηματικά…

$$X(k)=A\cdot\frac{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)N}}{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}}=A\cdot\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}=0 \text{ για } k=1,2,3,\ldots,N-1$$

οπότε τελικά $X(k)=AN\delta(\kappa),\; k=0,1,\ldots,N\text{-}1$