

## Δύο χρήσιμες επεκτάσεις

---

### Κυκλική ολίσθηση

- Μετατόπιση σήματος μήκους  $N$  κατά  $n_0$  με πλήρωση των κενών θέσεων από τις  $n_0$  τελευταίες τιμές του σήματος

### Κυκλική συνέλιξη

- Επέκταση της συνέλιξης με χρήση της κυκλικής ολίσθησης
- 

## Κυκλική ολίσθηση

---

### □ Συμβολισμός modulo

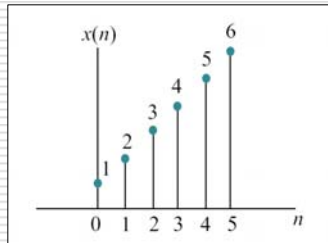
- $\langle a \rangle_b$ :  $a$  modulo  $b$  = το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a$  με το  $b$

### □ Κυκλική ολίσθηση

$$x'(n) = x(\langle n - n_0 \rangle_N)$$

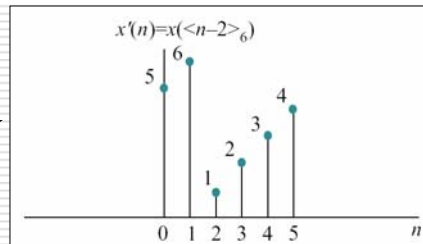
- Αν  $n_0 > N$  η κυκλική ολίσθηση ισοδυναμεί με την κυκλική ολίσθηση κατά  $\langle n_0 \rangle_N$
-

## Κυκλική ολίσθηση

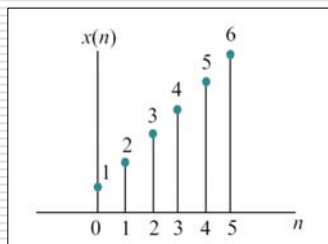


Αρχική ακολουθία  $x(n)$  [ $N=6$ ]

Κυκλική ολίσθηση της  $x(n)$   
για  $n_0=2$

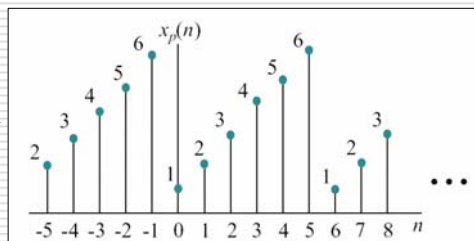


## Κυκλική ολίσθηση

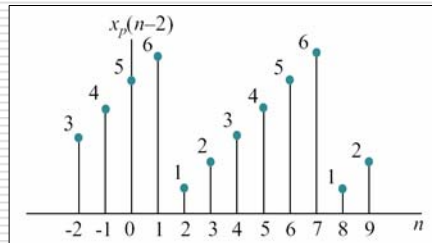


Αρχική ακολουθία  $x(n)$  [ $N=6$ ]

Περιοδική επέκταση της  $x(n)$

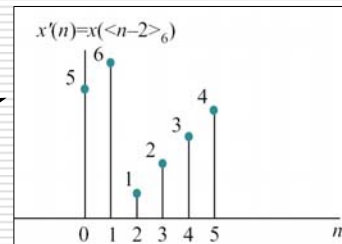


## Κυκλική ολίσθηση



Γραμμική ολίσθηση της  
περιοδικής επέκτασης της  $x(n)$   
για  $n_0=2$

Κυκλική ολίσθηση της  $x(n)$   
για  $n_0=2$



## Κυκλική συνέλιξη

Εστω

- Σήματα  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  με  $N$  τιμές ( $0$  έως  $N-1$ )

Ορισμός κυκλικής συνέλιξης  $\otimes$

- Ακολουθία με επίσης  $N$  τιμές

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m \rangle_N), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Αντιμεταθετική ιδιότητα  
 $x_1(n) \otimes x_2(n) = x_2(n) \otimes x_1(n)$

## Υπολογισμός κυκλικής συνέλιξης

---

- Παρομοίως με τη συνέλιξη
    - Κατοπτρισμός της μίας ακολουθίας
    - Κυκλική ολίσθηση της κατοπτρισμένης
    - Αθροισμα γινομένων
  - Ευκολότερος προγραμματισμός
    - Παράδειγμα:  $x_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $x_2 = \{4, 5, 6\}$
    - $x_1 \otimes x_2 = \{31, 31, 28\}$
- 

## Ιδιότητες του DFT

---

- Για  $x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k)$   $x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k)$
  - Ισχύουν οι ιδιότητες
    - Γραμμικότητα
    - Κυκλική ολίσθηση στο χρόνο
    - Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα
    - Συζυγής ακολουθία
    - Κατοπτρισμός στο χρόνο
    - Κυκλική συνέλιξη
-

## Ιδιότητες του DFT

---

### □ Γραμμικότητα

<i>Σήμα</i>	<i>DFT</i>
$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$

### □ Κυκλική ολίσθηση στο χρόνο

<i>Σήμα</i>	<i>DFT</i>
$x(\langle n - n_0 \rangle_N)$	$W^{kn_0} X(k)$

## Ιδιότητες του DFT

---

### □ Κυκλική ολίσθηση στη συχνότητα

<i>Σήμα</i>	<i>DFT</i>
$W^{-k_0n} x(n)$	$X(\langle k - k_0 \rangle_N)$

### □ Συζυγής ακολουθία

<i>Σήμα</i>	<i>DFT</i>
$x^*(n)$	$X^*(\langle -k \rangle_N)$

## Ιδιότητες του DFT

- Κατοπτρισμός στο χρόνο

<i>Σήμα</i>	<i>DFT</i>
$x(\langle -n \rangle_N)$	$X^*(k)$

- Κυκλική συνέλιξη

<i>Σήμα</i>	<i>DFT</i>
$x_1(n) \otimes x_2(n)^{[1]}$	$X_1(k)X_2(k)$

## Ο DFT σε μορφή πινάκων

- Θεωρούμε ότι

$\mathbf{x} = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1)]^T$	$\mathbf{X} = [X(0) \ X(1) \ \dots \ X(N-1)]^T$
---	---

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Στοιχείο  $(i,j)$   
για  $i=0..N-1$   
 $j=0..N-1$ :  $W_N^{i*j}$

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
------------------------------

## Ο DFT σε μορφή πινάκων

---

Τότε

- $\mathbf{X}=\mathbf{W}\mathbf{x}$  διατύπωση DFT
- $\mathbf{x}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$  αντίστροφος DFT (IDFT)
- $\mathbf{x}=(1/N)\mathbf{W}^*\mathbf{X}$   $\mathbf{W}^*$ =συζυγής μιγαδικός
- $\mathbf{W}^{-1}=(1/N)\mathbf{W}^*$
- $\mathbf{W}\mathbf{W}^*=\mathbf{N}\mathbf{I}$

Απαιτούνται  $\mathbf{N}^2$  μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί  
και  $\mathbf{N}(\mathbf{N}-1)$  μιγαδικές προσθέσεις!

---

## Ο DFT σε μορφή πινάκων

---

## Αλγόριθμοι FFT

- Γρήγοροι τρόποι υπολογισμού του DFT βασιζόμενοι
  - σε ιδιότητες των πινάκων και
  - σε περιορισμούς επί των σημάτων
- Πολυπλοκότητα:  $(N/2) \log_2 N$

## Αλγόριθμοι FFT

- DFT με αλγόριθμο FFT

Σήμα (N)	DFT	FFT	DFT/FFT
256	65.536	1.024	64
512	262.144	2.304	114
1.024	1.048.576	5.120	205
2.048	4.194.304	11.264	372
4.096	16.777.216	24.576	683
8.192	67.108.864	53.248	1.260
16.384	268.435.456	114.688	2.341
32.768	1.073.741.824	245.760	4.369
65.536	4.294.967.296	524.288	8.192

1,5 sec μονοκαναλικής  
μουσικής ποιότητας CD