ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ

Βύρωνας Νάκος

1. Εισαγωγή

Η θεωρία της *κλασματικής γεωμετρίας* (fractal geometry) έχει προταθεί από τον B. B. Mandelbrot, για να περιγράψει γεωμετρικούς νόμους που διέπουν τη φύση και να ερμηνεύσει ορισμένα από τα μαθηματικά παράδοξα που ενέχουν οι νόμοι αυτοί. Η κλασματική γεωμετρία της φύσης είναι διατυπωμένη σε τρία βιβλία του Mandelbrot (1975a; 1977; 1982a), και σε μια εκτεταμένη συλλογή από δημοσιεύσεις, που περιέχεται στις αναφορές ειδικότερα του τελευταίου από τα τρία αυτά βιβλία. Πρωταρχικό αντικείμενο της κλασματικής γεωμετρίας συνιστά η περιγραφή των φυσικών εκείνων δομών που χαρακτηρίζονται από ακανόνιστη, τραχεία ή τεμαχισμένη μορφή (Mandelbrot et al. 1984). Οι ανωμαλίες των δομών αυτών ποικίλουν ως προς το μέγεθος και χαρακτηρίζονται από μια ειδική σχέση μεταβολής της κλίμακας. Η κλασματική γεωμετρία χαρακτηρίζει τη δομή ενός συνόλου σημείων του χώρου εκφρασμένου μέσω ενός αριθμού D, ο οποίος ονομάζεται *κλασματική διάσταση* (fractal dimension).

Η θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας αν και σχετικά πρόσφατη βρίσκει εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών περιοχών (Barnsley 1988; Feder 1988). Το φάσμα αυτό εκτείνεται από την οικονομία (κλασματικό μοντέλο κλιμάκωσης τιμών) και τη στατιστική (σφάλματα σε τηλεφωνικά μηνύματα), ως τη φυσική (κρυσταλλογραφία), τη βιολογία (μοριακή βιολογία), αλλά και τη χαρτογραφία (γενίκευση).

Παρ' όλο το γενικό χαρακτήρα της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας, η θεωρία αυτή χρησιμοποιείται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές των οποίων βασική αναφορά αποτελεί το τελευταίο βιβλίο του Mandelbrot (1982a), το οποίο διαπνέεται απο έντονο μαθηματικό και φιλοσοφικό πνεύμα. Πεποίθηση του γράφοντα είναι ότι η θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας μπορεί να αποτελέσει θεωρητικό μοντέλο ορισμένων χαρτογραφικών διεργασιών. Ένας από τους σκοπούς του κειμένου είναι να τεκμηριώσει αυτήν ακριβώς την πεποίθηση. Η διεθνής χαρτογραφική κοινότητα, άλλωστε, φαίνεται να αποδέχεται τη συγκεκριμένη θεωρία καθώς συναντώνται συχνά στη χαρτογραφική βιβλιογραφία ενθαρρυντικά σχόλια γι' αυτήν (Goodchild 1980; Dutton 1981; Buttenfield 1985; 1989; Müller 1986; 1987a; 1987b). Για την καλύτερη κατανόηση των θεμελιακών αρχών της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας αναπτύσσονται κατ' αρχήν ορισμένα στοιχεία προερχόμενα από την περιοχή της γεωμετρίας και ειδικότερα της θεωρίας διαστάσεων. Στη συνέχεια, ορίζονται η έννοια της κλασματικής διάστασης και οι ιδιότητες της αυτο-ομοιότητας και αυτο-ομοπαραλληλίας, έννοιες θεμελιακής σημασίας για την κατανόηση της κλασματικής γεωμετρίας. Στη θεωρητική αυτή εισαγωγή στηρίζεται η ανάπτυξη της μεθοδολογίας ένταξης της κλασματικής γεωμετρίας στις διεργασίες της χαρτογραφίας.

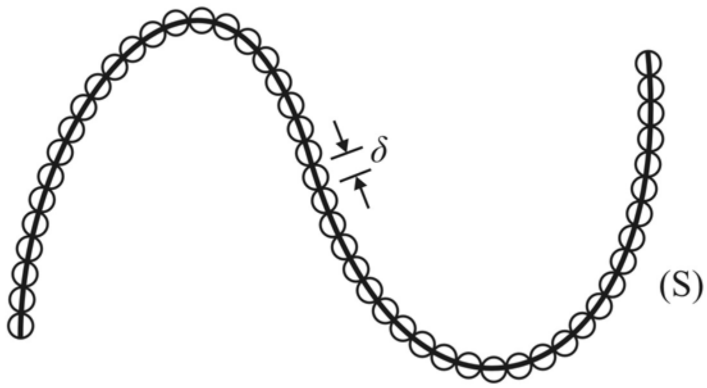
2. Στοιχεία από τη θεωρία διαστάσεων της γεωμετρίας

Στην ενότητα αυτή ορίζεται η έννοια της διάστασης Hausdorff-Besicovitch (Hurewicz and Wallman 1948) και οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί ομοιότητας (similarity) και ομοπαραλληλίας (affinity) για την καλύτερη κατανόηση των θεμελιακών αρχών της κλασματικής γεωμετρίας.

2.1 Διάσταση Hausdorff-Besicovitch

Η θεμελίωση της κλασματικής γεωμετρίας, όπως διατυπώνεται από τον Mandelbrot, προϋποθέτει τον ορισμό της διάστασης Hausdorff-Besicovitch. Η διάσταση Hausdorff-Besicovitch σχετίζεται άμεσα με τη διαδικασία μέτρησης του μεγέθους ενός συνόλου σημείων του χώρου στο επίπεδο. Για παράδειγμα, το μέγεθος ενός συνόλου σημείων που αποτελούν μια γραμμή ή μια επιφάνεια στο επίπεδο είναι αντίστοιχα το μήκος (ανάπτυγμα) της γραμμής ή το εμβαδόν της επιφάνειας.

Αν θεωρηθεί ότι ζητείται να μετρηθεί το μέγεθος, δηλαδή το μήκος της καμπύλης S που απεικονίζεται στο Σχήμα 1, ο προσδιορισμός του μήκους της καμπύλης προϋποθέτει την ακόλουθη διαδικασία. Η καμπύλη καλύπτεται από διαδοχικά εφαπτόμενους μικρούς (στοιχειώδεις) δίσκους διαμέτρου δ. Το μήκος της καμπύλης υπολογίζεται αθροίζοντας τους δίσκους και λαμβάνοντας υπόψη τη διάμετρό τους (δ).



Σχήμα 1. Προσδιορισμός μήκους καμπύλης (S).

Γενικεύοντας τη διαδικασία που περιγράφηκε για τη μέτρηση του μήκους της καμπύλης, ο προσδιορισμός του μεγέθους ενός συνόλου S σημείων του χώρου μπορεί να γίνει καλύπτοντας το σύνολο αυτό με διαδοχικά εφαπτόμενα στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα. Το μέγεθος των στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων εκφράζεται από μια θετική συνάρτηση $h(\delta)$, η οποία ονομάζεται *συνάρτηση ελέγχου* (test function), η οποία έχει τη μορφή (Mandelbrot 1982a; Feder 1988):

$$h(\delta) = \gamma\, \delta^{d}\,.$$

Ο γεωμετρικός συντελεστής γ στη συνάρτηση αυτή εκφράζει τη μορφή του στοιχειώδους γεωμετρικού σχήματος. Πιο συγκεκριμένα, αν το στοιχειώδες γεωμετρικό σχήμα είναι ευθύγραμμο τμήμα, τετράγωνο ή κύβος, τότε ο συντελεστής γ έχει την τιμή μονάδα (γ=1). Αν είναι δίσκος, τότε: $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$ ή σφαίρα, τότε: $\gamma = \dfrac{\pi}{6}$. Η παράσταση: δ^d εκφράζει τη συμμετοχή των διαστάσεων του στοιχειώδους γεωμετρικού σχήματος στο μέγεθός του.

Το μέγεθος, λοιπόν, του συνόλου S των σημείων του χώρου μπορεί να προκύψει από την άθροιση της συνάρτησης ελέγχου σε ολόκληρη την έκταση που καταλαμβάνει το σύνολο S στο χώρο και ονομάζεται *μετρική* M_{d} (Mandelbrot 1982a; Feder 1988):

$$M_{\mathrm{d}} = \sum h(\delta) = \sum \gamma\, \delta^{d} \; .$$

Ο εκθέτης d ονομάζεται *διάσταση* της μετρικής M_{d}.

Θεωρώντας τα μεγέθη των στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων να μειώνονται ώστε να τείνουν στο μηδέν, δηλαδή για: $\delta \to 0$, η μετρική M_{d} είτε μηδενίζεται ($M_{\mathrm{d}} \to 0$) είτε τείνει στο άπειρο ($M_{\mathrm{d}} \to \infty$), εξαρτώμενη από την επιλογή της τιμής της διάστασης d.

Ως διάσταση Hausdorff-Besicovitch (D) του συνόλου S ορίζεται η κρίσιμη εκείνη τιμή της διάστασης d κατά την οποία η μετρική M_d περνά από την τιμή μηδέν στο άπειρο (Mandelbrot 1982a, σελ. 364; Feder 1988, σελ. 14):

$$M_{\mathrm{d}} = \sum \gamma\, \delta^{d} = \gamma\, N(\delta)\, \delta^{d} \xrightarrow{\delta \to 0} \begin{cases} 0, \text{ όταν } d>D \\ \infty, \text{ όταν } d<D \end{cases}$$

Όπου, $N(\delta)$ είναι ο αριθμός των στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων με τα οποία καλύπτεται το σύνολο S.

Η μετρική M_{d} για $d=D$ συνήθως έχει πεπερασμένη τιμή, αλλά είναι δυνατό σε ειδικές περιπτώσεις να έχει είτε την τιμή μηδέν ή άπειρο.

Επειδή η διάσταση Hausdorff-Besicovitch (D) ορίζεται με τη βοήθεια ορίου, όταν το μέγεθος των στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων τείνει στο μηδέν ($\delta \to 0$), ουσιαστικά εκφράζει, ως διάσταση, μια τοπική ιδιότητα των σημειακών συνόλων του χώρου (Feder 1988). Σε συνήθεις περιπτώσεις κανονικών συνόλων σημείων του χώρου η διάσταση Hausdorff-Besicovitch λαμβάνει τις τιμές D=1 για γραμμές, D=2 για επίπεδα ή επιφάνειες και D=3 για σφαίρες ή άλλους πεπερασμένους όγκους. Όπως θα φανεί στα παρακάτω υπάρχουν σύνολα σημείων του χώρου για τα οποία η διάσταση Hausdorff-Besicovitch δεν έχει ακέραια τιμή. Τα σύνολα αυτά είναι τα κλασματικά σύνολα.

2.2 Μετασχηματισμός ομοιότητας

Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbf{R}^{\mathrm{E}}$ για κάθε πραγματικό θετικό λόγο r ορίζεται ένας μετασχηματισμός που ονομάζεται μετασχηματισμός *ομοιότητας* (similarity transformation). Σύμφωνα με το μετασχηματισμό ομοιότητας κάθε σημείο $x=(x_1, x_2,\ldots, x_{\mathrm{E}})$ μετασχηματίζεται στο σημείο $r(x)=(rx_1, rx_2,\ldots, rx_{\mathrm{E}})$ και κατ' επέκταση κάθε σύνολο σημείων S στο σύνολο r(S), (Mandelbrot 1982a; Feder 1988).

2.3 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός

Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbf{R}^{\mathrm{E}}$ για κάθε συλλογή από πραγματικούς θετικούς λόγους $r= (r_1, r_2,\ldots, r_{\mathrm{E}})$ ορίζεται ένας μετασχηματισμός που ονομάζεται *ομοπαράλληλος* μετασχηματισμός (affine transformation). Σύμφωνα με τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό κάθε σημείο $x=(x_1, x_2,\ldots,$

x_E) μετασχηματίζεται στο σημείο $r(x)=(r_1x_1, r_2x_2,\dots, r_Ex_E)$ και κατ' επέκταση κάθε σύνολο σημείων S στο σύνολο r(S), (Mandelbrot 1982a; Feder 1988).

3. Βασικές έννοιες κλασματικής γεωμετρίας

Η εισαγωγή στις θεμελιακές έννοιες της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας μπορεί να βασιστεί στη διατύπωση και αντιμετώπιση του προβλήματος προσδιορισμού του μήκους ακανόνιστων γραμμών.

3.1 Το πρόβλημα προσδιορισμού του μήκους ακανόνιστων γραμμών

Ας θεωρηθεί ότι ζητείται να προσδιοριστεί το μήκος μιας ακτογραμμής από ένα χάρτη. Για λόγους απλούστευσης της διαδικασίας και ευκολότερης κατανόησης της ουσίας του προβλήματος στη φάση αυτή μπορούν να αγνοηθούν οι παραμορφώσεις που τυχόν έχει υποστεί το μέγεθος του μήκους της ακτογραμμής στο συγκεκριμένο χάρτη από το σύστημα απεικόνισης (προβολή του χάρτη). Εάν επιθυμείται να ακολουθηθεί μια συμβατική διαδικασία μέτρησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα διαστημόμετρο του οποίου το άνοιγμα ορίζεται ως βήμα μέτρησης και συμβολίζεται με ε. Το μήκος της ακτογραμμής $L(\varepsilon)$ υπολογίζεται από τον αριθμό των διαδοχικών βημάτων $N(\varepsilon)$ που απαιτούνται για τη σάρωση της γραμμής, από την αρχή μέχρι τέλους της, με το διαστημόμετρο. Δηλαδή:

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon)\,\varepsilon\,.$$

Σε περίπτωση που επιθυμείται να ακολουθηθεί μια διαδικασία μέτρησης του μήκους της ακτογραμμής με τη βοήθεια ενός υπολογιστή, για παράδειγμα έχοντας ψηφιοποιήσει τη γραμμή με ένα σαρωτή, οι απαιτούμενες εργασίες είναι αντίστοιχες της συμβατικής με τη διαφορά ότι το βήμα ε θα αντιπροσωπεύει τη διακριτική ανάλυση του σαρωτή.

Είναι γεγονός ότι κάθε μέτρηση με διαφορετικό βήμα θα δίνει και διαφορετικό μήκος για την ακτογραμμή. Το μήκος δηλαδή μιας ακανόνιστης γραμμής εξαρτάται κάθε φορά από το βήμα μέτρησής του. Πιο συγκεκριμένα, όσο το βήμα μικραίνει σε μέγεθος, και επομένως αυξάνεται η κλίμακα παρατήρησης του φαινομένου, τόσο το υπολογιζόμενο μήκος της γραμμής θα αυξάνει σε μέγεθος, καθώς όλο και περισσότερες λεπτομέρειες της γραμμής θα λαμβάνονται υπόψη.

Ο προσδιορισμός του μήκους ακανόνιστων γραμμών, ως μαθηματικό πρόβλημα, μελετήθηκε σε μεγάλο βάθος από τον Richardson. Ο Richardson (1961) διατύπωσε μια εμπειρική σχέση συναρτώντας το υπολογιζόμενο μήκος ακανόνιστων γραμμών από το βήμα μέτρησής τους διεξάγοντας μετρήσεις σε χάρτες διαφόρων κλιμάκων:

$$L(\varepsilon) = k\,\varepsilon^{1-D}\,,$$

όπου $k>0$ και $D \geq 1$, σταθερές για κάθε συγκεκριμένη γραμμή.

Η σταθερά D, αν και δεν σχολιάστηκε περισσότερο από τον Richardson, έχει μεγάλη σημασία για τη θεωρία του Mandelbrot. Προσδιορίζοντας την τιμή της σταθεράς D για διάφορες ακανόνιστες γραμμές, παρατηρείται ότι όσο περισσότερο πολύπλοκη είναι η μορφή της γραμμής τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της σταθεράς D για τη γραμμή (Mandelbrot 1967).

Σε σχολιασμό της έρευνας που διεξήχθη από τον Richardson, ο Mandelbrot (1967) επισημαίνει ότι η πολύπλοκη σε μορφή δυτική ακτογραμμή της νήσου Βρεττανίας έχει *D*=1.25, η λιγότερο πολύπλοκη σε μορφή συνοριακή γραμμή μεταξύ Ισπανίας και Πορτογαλίας έχει *D*=1.14, η ομαλή σε μορφή ακτογραμμή της Νοτίου Αφρικής έχει *D*=1.02, ανώ τέλος ένας κύκλος (μιά απόλυτα ομαλή γραμμή) έχει *D*=1.00. Στο Σχήμα 2 απεικονίζονται σε διπλό λογαριθμικό διάγραμμα τα αποτελέσματα των υπολογισμών των μηκών (άξονας Y) διαφόρων ακανόνιστων γραμμών ως προς διάφορα βήματα μέτρησης (άξονας X), όπως προέκυψαν στα πλαίσια της εμπειρικής έρευνας που διεξήχθη από τον Richardson.

Σχήμα 2. Διαγραμματική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εμπειρικής έρευνας του Richardson (1961).

3.2 Κλασματικό σύνολο, κλασματική διάσταση, αυτο-ομοιότητα, αυτο-ομοπαραλληλία

Σύμφωνα με τον Mandelbrot (1982a, σελ. 15) ορίζεται ως *κλασματικό σύνολο* (fractal set) κάθε σύνολο του χώρου του οποίου η διάσταση Hausdorff-Besicovitch (*D*) έχει τιμή μεγαλύτερη απ' αυτήν της τοπολογικής διάστασης (D_T). Η *κλασματική διάσταση* ενός κλασματικού συνόλου ταυτίζεται με τη διάσταση Hausdorff-Besicovitch.

Η κλασματική διάσταση (*D*) γραμμών κυμαίνεται μεταξύ της τοπολογικής διάστασης (D_T) και της ευκλείδιας διάστασης (D_E), (D_T=1<D<2=D_E). Ανάλογα, η κλασματική διάσταση επιφανειών κυμαίνεται μεταξύ: D_T=2<D<3=D_E. Η κλασματική διάσταση *D* εκφράζει το βαθμό με τον οποίο μια γραμμή «γεμίζει» το ευκλείδιο επίπεδο, και αντίστοιχα, μια επιφάνεια τον ευκλείδιο χώρο (Mandelbrot 1982a).

Για μια μη αυστηρά διατυπωμένη μαθηματική περιγραφή, προτεινόμενη από τον ίδιο τον Mandelbrot, τα κλασματικά σύνολα είναι σχήματα των οποίων τα επί μέρους τμήματα είναι όμοια προς το όλον, σύμφωνα με μια ορισμένη διαδικασία (Feder 1988). Η βασική αυτή ιδιότητα των κλασματικών συνόλων ονομάζεται *αυτο-ομοιότητα*. Ένας αυστηρότερος μαθηματικά ορισμός των αυτο-όμοιων συνόλων δίνεται παρακάτω. Ο λόγος ομοιότητας $r(N)$ για τα κλασματικά σύνολα ικανοποιεί τη σχέση (Mandelbrot 1982a):

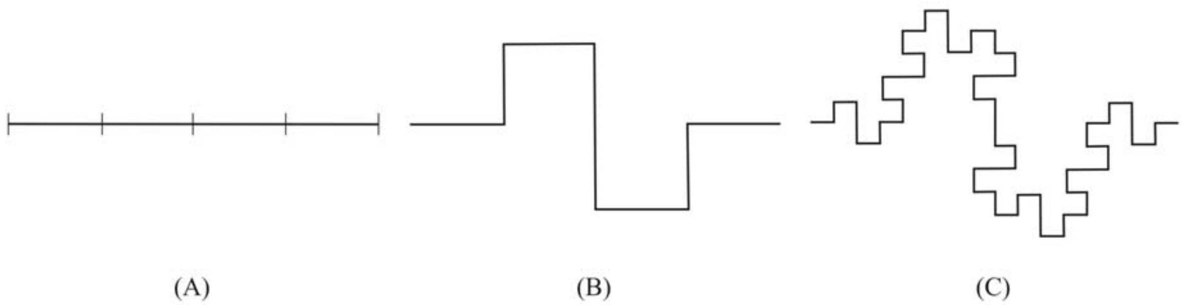
$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D}},$$

όπου το N εκφράζει τον αριθμό των μη επικαλυπτόμενων τμημάτων, προερχομένων από το λόγο ομοιότητας $r(N)$, από τα οποία συντίθεται το κλασματικό σύνολο.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ως παράγωγη μια χαρακτηριστική σχέση για την κλασματική διάσταση D, η οποία εκφράζει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r(N)}}.$$

Στο Σχήμα 3 απεικονίζονται οι διαδοχικές φάσεις δημιουργίας μιας κλασματικής γραμμής. Αρχικά θεωρείται ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα (Σχήμα 3A), το οποίο χωρίζεται σε πρώτη φάση με λόγο ομοιότητας $r(N) = \frac{1}{4}$, η κλασματική γραμμή αποτελείται από N=8 τμήματα (Σχήμα 3B). Στη συνέχεια, επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία αλλά με λόγο ομοιότητας $r(N) = \frac{1}{16}$ αυτή τη φορά, οπότε η κλασματική γραμμή αποτελείται από N=64 τμήματα (Σχήμα 3C).



Σχήμα 3. Διαδικασία δημιουργίας κλασματικών γραμμών

Η κλασματική διάσταση της γραμμής αυτής είναι D=1.50. Η γραμμή που απεικονίζεται στο Σχήμα 3C ονομάζεται τετραγωνική νήσος του Koch (quadratic Koch island) και μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το γεωμετρικό μοντέλο μιάς ακτογραμμής (Mandelbrot 1982a). Τα μήκη των γραμμών που απεικονίζονται στα Σχήματα 3B και 3C είναι αντίστοιχα: $L(\frac{1}{4}) = 8\,(\frac{1}{4}) = 2$ και $L(\frac{1}{16}) = 64\,(\frac{1}{16}) = 4$. Φαίνεται έτσι, ότι τα μήκη της κλασματικής γραμμής ακολουθούν την εμπειρική σχέση που διατύπωσε ο Richardson δεδομένου ότι:

$$L(\frac{1}{4}) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1.5} = 2 \;\text{ και }\; L(\frac{1}{16}) = \left(\frac{1}{16}\right)^{1-1.5} = 4.$$

Παρατηρείται λοιπόν ότι, η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας χαρακτηρίζει τις παράγωγες γραμμές που δημιουργούνται από τις τομές μιάς κλασματικής επιφάνειας με «οριζόντια» επίπεδα. Εάν κλασματικές γραμμές δημιουργηθούν από τις τομές «κατακορύφων» επιπέδων ως προς την κλασματική επιφάνεια, τότε η ιδιότητα που ισχύει γι' αυτές τις παράγωγες γραμμές ονομάζεται αυτο-ομοπαραλληλία (Mandelbrot 1982a; 1985). Η ιδιότητα της αυτό-ομοπαραλληλίας αποτελεί γενικευμένη έννοια της ιδιότητας της αυτο-ομοιότητας, επειδή μπορεί να εκφράσει, την ύπαρξη στρεβλής μεταξύ «οριζόντιας» και «κατακόρυφης» διεύθυνσης.

Ας θεωρηθεί, για παράδειγμα, η επιφάνεια του τοπογραφικού ανάγλυφου. Συμπεραίνεται, πράγματι, ότι οι οριζόντιες τομές είναι «ισότροπες», εμφανίζεται δηλαδή η ίδια κλίμακα κατά τις διευθύνσεις των αξόνων X και Y των τομών. Οι κατακόρυφες τομές, αντίθετα, είναι «ανισότροπες», εμφανίζονται δηλαδή διαφορετικές κλίμακες κατά τις διευθύνσεις των αξόνων X (ή Y) και Z των τομών. Υπενθυμίζεται, χαρακτηριστικά, ότι η σχεδίαση των διαγραμμάτων των μηκοτομών στις μελέτες οδοποιίας γίνεται σε στρεβλή κλίμακα, με λόγο συνήθως 1:10, για την καλύτερη αναπαράσταση των κλίσεων της ερυθράς.

Κλασικό παράδειγμα αυτο-ομοπαράλληλης κλασματικής γραμμής αποτελεί η καταγραφή της κλασματικής συνάρτησης Brown ως προς το χρόνο (Mandelbrot 1982a). Η συνάρτηση αυτή περιγράφει το ίχνος της χαρακτηριστικής κίνησης Brown ενός σωματιδίου στο χώρο συναρτήσει του χρόνου.

Οι ορισμοί των χαρακτηριστικών αυτών ιδιοτήτων των κλασματικών συνόλων σημείων του χώρου, είναι:

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *αυτο-όμοιο* (self-similar), ως προς ένα λόγο r, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία είτε ταυτίζεται άμεσα είτε μετά από στροφή ή και μετάθεση με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από μετασχηματισμό ομοιότητας με λόγο r (Mandelbrot 1982a; Feder 1988).

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *αυτο-ομοπαράλληλο* (self-affine), ως προς ένα διανυσματικό λόγο $r=(r_1, r_2,\ldots, r_E)$, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία είτε ταυτίζεται άμεσα είτε μετά από στροφή ή και μετάθεση με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από ομοπαράλληλο μετασχηματισμό με λόγο το διάνυσμα r (Mandelbrot 1982a; Feder 1988).

Οι ορισμοί των αυτο-όμοιων και αυτο-ομοπαράλληλων κλασματικών συνόλων μπορούν να επεκταθούν (δηλαδή να γενικευθούν) και για μη φραγμένα σύνολα σημείων του χώρου, δεν είναι όμως αναγκαίο κάτι τέτοιο να παρουσιαστεί στο κείμενο αυτό, γιατί οι περισσότερες εφαρμογές της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας στη χαρτογραφία αφορούν πεπερασμένα σχήματα.

Η θεμελίωση των βασικών αρχών της κλασματικής γεωμετρίας, που αναπτύχθηκε, είναι χρήσιμη για θεωρητικά προβλήματα της γεωμετρίας, καθώς επιτρέπει τη διαχείριση ιδεατών συνόλων σημείων του χώρου. Με τον ορισμό, όμως, των στατιστικά αυτο-όμοιων ή αυτο-ομοπαράλληλων συνόλων σημείων ανοίγει ο δρόμος σε εφαρμογές της θεωρίας σε πραγματικά σύνολα σημείων του χώρου, όπως είναι για παράδειγμα οι χαρτογραφικές γραμμές.

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *στατιστικά αυτο-όμοιο* (statistical self-similar), ως προς ένα λόγο r, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία ταυτίζεται σε όλες τις στατιστικές εκτιμήτριες με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από μετασχηματισμό ομοιότητας με λόγο r (Mandelbrot 1982a; Feder 1988).

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *στατιστικά αυτο-ομοπαράλληλο* (statistical self-affine), ως προς ένα διανυσματικό λόγο $r=(r_1, r_2,\dots, r_E)$, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία ταυτίζεται σε όλες τις στατιστικές εκτιμήτριες με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από ομοπαράλληλο μετασχηματισμό με λόγο το διάνυσμα r (Mandelbrot 1982a; Feder 1988).

4. Μέθοδοι προσδιορισμού κλασματικής διάστασης

Σημαντικό βήμα στη διαπίστωση και μελέτη του κλασματικού χαρακτήρα γραμμών ή επιφανειών αποτελεί η διαδικασία προσδιορισμού της κλασματικής τους διάστασης D. Σε ορισμένες μεθόδους ο προσδιορισμός της κλασματικής διάστασης μιας επιφάνειας γίνεται έμμεσα από την τιμή της κλασματικής διάστασης χαρακτηριστικών γραμμών-τομών της επιφάνειας με «κατακόρυφα» ή «οριζόντια» επίπεδα, δηλαδή μηκοτομών ή ισαριθμικών καμπυλών αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση που συνδέει την τιμή της κλασματικής διάστασης της επιφάνειας (D_S) ως προς την κλασματική διάσταση της αντίστοιχης με αυτήν γραμμής-τομής (D_L) (Mandelbrot et al. 1984):

$$D_S = D_L + 1 .$$

Για τα κλασματικά σύνολα σημείων που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας ο προσδιορισμός της κλασματικής διάστασης μπορεί να βασιστεί στη συσχέτιση του μήκους ως προς το βήμα μέτρησης αλλά και στη συσχέτιση εμβαδού-περιμέτρου αν πρόκειται για κλειστές γραμμές. Αντίστοιχα, για τα κλασματικά σύνολα σημείων που χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της αυτο-ομοπαραλληλίας ο προσδιορισμός της κλασματικής διάστασης μπορεί να βασιστεί στη φασματική ανάλυση και στη συνάρτηση μεταβλητότητας. Οι τέσσερεις αυτές μέθοδοι αναλύονται παρακάτω.

Ειδικότερα γιά την περίπτωση των αυτο-ομοπαράλληλων γραμμών γίνεται διάκριση μεταξύ *ολικής* (global) και *τοπικής* (local) κλασματικής διάστασης, (Mandelbrot 1985). Η τιμή της ολικής κλασματικής διάστασης είναι πάντοτε ίση με τη μονάδα. Η ολική κλασματική διάσταση εκφράζει τις «μακροσκοπικές» ιδιότητες της γραμμής, δηλαδή με άλλα λόγια «μακροσκοπικα» μια αυτο-ομοπαράλληλη γραμμή δεν έχει κλασματικές ιδιότητες, ενώ η τοπική κλασματική διάσταση εκφράζει τις «μικροσκοπικές» ιδιότητες των αυτο-ομοπαράλληλων γραμμών (Mandelbrot 1985).

Κάθε μέθοδος προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης συνόλων σημείων του χώρου βασίζεται στον υπολογισμό διαφορετικών εκτιμητριών στατιστικών συναρτήσεων που αφορούν δείγματα ακανόνιστων γραμμών ή επιφανειών. Τα δείγματα αυτά πρέπει να προέρχονται από όσο το δυνατόν ευρύτερο φάσμα κλιμάκων. Η διαδικασία υπολογισμού των εκτιμητριών πρέπει να ακολουθεί αυστηρά τους στατιστικούς κανόνες για να προκύπτουν αξιόπιστα και ανεπηρέαστα αποτελέσματα.

Σε κάθε μέθοδο η διαδικασία προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης καταλήγει πάντα στον υπολογισμό της κλίσης μιας ευθείας που προσαρμόζεται στα δεδομένα ενός διπλού λογαριθμικού διαγράμματος. Οι παράμετροι της ευθείας υπολογίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης σε συνδυασμό με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Με την ίδια ακριβώς διαδικασία διαπιστώνεται και ο κλασματικός χαρακτήρας ακανόνιστων γραμμών ή επιφανειών. Η επιβεβαίωση της διαπίστωσης του κλασματικού χαρακτήρα, σε πειραματικές εφαρμογές τεκμηριώνεται με τη βοήθεια στατιστικών ελέγχων των παραμέτρων της ευθείας παλινδρόμησης, σε πολύ υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης. Τα δείγματα είτε αποτελούνται από σημειοσειρές, όταν πρόκειται για ακανόνιστες γραμμές (διανυσματικά δεδομένα), είτε από στοιχεία ενός πίνακα, για επιφάνειες (ψηφιακά μοντέλα). Η συλλογή των δεδομένων μπορεί να γίνει με χειροκίνητη ψηφιοποίηση ή σάρωση.

4.1 Συσχέτιση μήκους με βήμα μέτρησης

Η μέθοδος αυτή αναπαριστά τη διαδικασία των εμπειρικών ερευνών του Richardson (1961) για τη μέτρηση του μήκους ακανόνιστων γραμμών και στηρίζεται στην ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοιότητας.

Σύμφωνα με τον Mandelbrot (1967) η κλασματική διάσταση ακανόνιστων γραμμών (D) συναρτάται με την κλίση (b_1) της ευθείας παλινδρόμησης που προσαρμόζεται στο διπλό λογαριθμικό διάγραμμα (Σχήμα 2) του μήκους της γραμμής ως προς το βήμα μέτρησης, από τη σχέση:

$$D = 1 - b_1 .$$

Η οριακή τιμή της κλίσης της ευθείας για τις ευκλείδιες γραμμές είναι b_1=0, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του κύκλου που απεικονίζεται στο ίδιο σχήμα.

Στον καθορισμό των βημάτων λαμβάνονται υπόψη, αφενός η αντιπροσώπευση του ευρύτερου δυνατού φάσματος κλιμάκων κατά τη συλλογή των δειγμάτων των γραμμών, αφετέρου η κλιμάκωση των μεγεθών των βημάτων κατά γεωμετρική πρόοδο. Οι Shelberg et al. (1983) τονίζουν ότι στη διαδικασία προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης πρέπει να γίνονται μετρήσεις του μήκους της γραμμής με τουλάχιστον πέντε διαφορετικά βήματα. Οσο πιο κοντά στις μετρήσεις βρίσκεται η ευθεία που προσαρμόζεται στο λογαριθμικό διάγραμμα τόσο περισσότερο έντονος είναι κλασματικός χαρακτήρας των ακανόνιστων γραμμών. Η τιμή της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης είναι πάντοτε αρνητική και επομένως η προσδιοριζόμενη κλασματική διάσταση D είναι πάντα μεγαλύτερη της μονάδας (D>1).

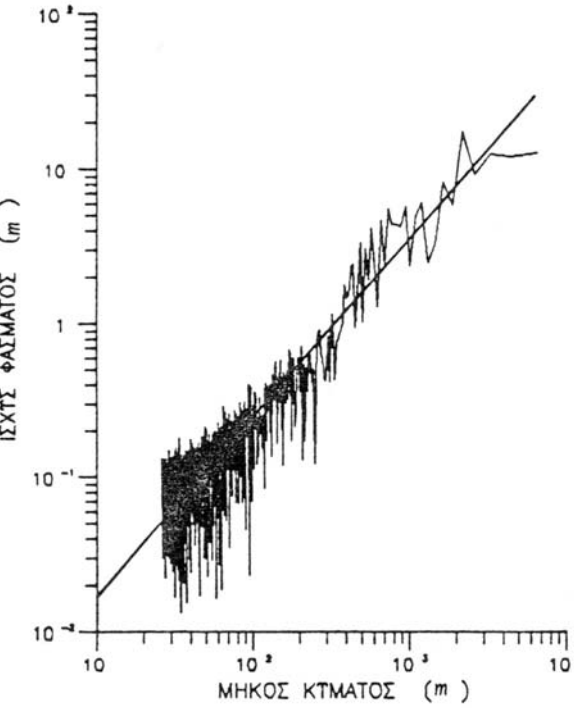
4.2 Φασματική ανάλυση

Η δεύτερη μέθοδος προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης βασίζεται στη μαθηματική διαδικασία της φασματικής ανάλυσης των δεδομένων μιάς επιφάνειας που προέρχονται από μηκοτομές ή διατομές της (Mandelbrot et al. 1984). Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοπαραλληλίας του ίχνους της μηκοτομής ή της διατομής.

Ο υπολογισμός της ισχύος του φάσματος μπορεί να γίνει με τον αλγόριθμο FFT–Fast Fourier Transform, (Newland 1975). Η κλασματική διάσταση της επιφάνειας εκφράζεται ως συνάρτηση της κλίσης (b_2) της ευθείας παλινδρόμησης, που προσαρμόζεται στο διπλό λογαριθμικό διάγραμμα (Σχήμα 4) της ισχύος του φάσματος ως προς το μήκος κύματος, από τη σχέση, (Mandelbrot et al. 1984):

$$D = 3 - \frac{b_2}{2}.$$

Στο Σχήμα 4 απεικονίζεται η φασματική ανάλυση μηκοτομής του αναγλύφου, τα δεδομένα της οποίας προέρχονται από ψηφιοποίηση των υψομετρικών καμπυλών ενός τοπογραφικού χάρτη (Φιλίππου 1988).



Σχήμα 4. Γραμμική παλινδρόμιση του φάσματος μηκοτομής.

Η μέθοδος της φασματικής ανάλυσης εμφανίζει έντονες αποκλίσεις των σημείων του φάσματος στα πολύ μικρά και στα πολύ μεγάλα μήκη κύματος. Οι αποκλίσεις αυτές εντοπίζονται και από τους Mandelbrot et al. (1984), όπου αποδίδονται σε εγγενείς αδυναμίες της μεθόδου, δεδομένου ότι επηρεάζεται έντονα από διακυμάνσεις τοπικού χαρακτήρα. Προτείνεται, λοιπόν, ένα πάνω και κάτω κατώφλι στις τιμές που θα μετέχουν στην προσαρμογή της ευθείας. Απαιτείται, επίσης, μεγάλη προσοχή στον εντοπισμό των μηκών κύματος κατά τα οποία η κλασματική διάσταση περνά από την τοπική στην ολική της τιμή.

Η κλίση της ευθείας κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 0-2 ($0<b_2<2$). Επομένως, η προσδιοριζόμενη τιμή της κλασματικής διάστασης επιφανειών βρίσκεται μεταξύ των 2-3 ($2<D<3$). Για τις ευκλείδιες επιφάνειες η οριακή τιμή της κλίσης της ευθείας είναι $b_2=2$.

4.3 Συνάρτηση μεταβλητότητας

Η συνάρτηση μεταβλητότητας αποτελεί συνάρτηση στατιστικού χαρακτήρα που εκφράζει το βαθμό συσχέτισης των σημείων μιάς γραμμής ή επιφάνειας ως προς την απόσταση που τα συνδέει. Η συνάρτηση μεταβλητότητας έχει χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό βέλτιστων μεθόδων περεμβολής όπως είναι η μέθοδος Kriging (Burrough 1986).

Η συνάρτηση μεταβλητότητας (V) ορίζεται από τη σχέση:

$$V(d) = \mathrm{E}\{(Z_{\mathrm{i}} - Z_{\mathrm{j}})^2\},$$

όπου η μεταβλητή Z εκφράζει τις τιμές των «υψομέτρων» των γραμμών-τομών της επιφάνειας ή της ίδιας της επιφάνειας και οι δείκτες i,j εκφράζουν τις θέσεις που απέχουν κατά το μήκος συσχέτισης (d). Με το σύμβολο Ε{ } δηλώνεται η αναμενόμενης τιμή, της οποίας η εκτιμήτρια για τα διακριτά δεδομένα ενός δείγματος προσδιορίζεται από τη μέση τιμή (Sakellariou et al. 1991):

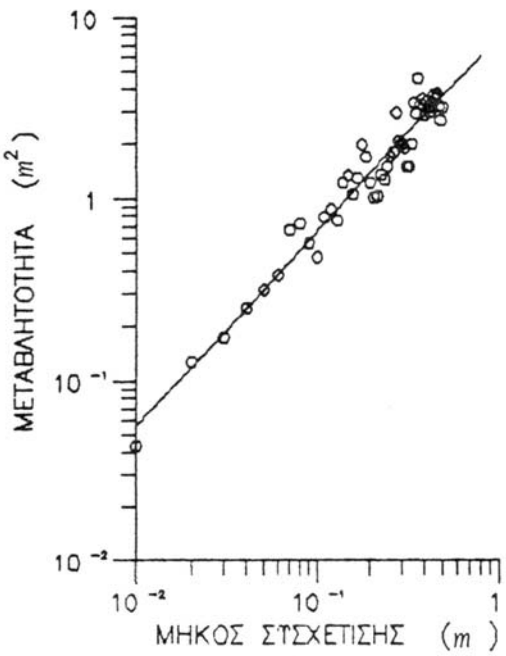
$$V(d) = \frac{\sum (Z_{\mathrm{i}} - Z_{\mathrm{j}})^2}{\mathrm{n}}.$$

Η μέθοδος της συνάρτησης μεταβλητότητας αναφέρεται και αυτή στην ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοπαραλληλίας του ίχνους των γραμμών-τομών. Η κλασματική διάσταση της γραμμής (μηκοτομή ή διατομή της επιφάνειας) προσδιορίζεται και πάλι από την κλίση (b_{31}) της ευθείας παλινδρόμησης του διπλού λογαριθμικού διαγράμματος (Σχήμα 5) των τιμών της συνάρτησης μεταβλητότητας ως προς τις αντίστοιχες τιμές των μηκών συσχέτισης από τη σχέση (Burrough 1981):

$$D = 2 - \frac{b_{31}}{2}.$$

Αντίστοιχα για την κλίση (b_{32}) σε περιπτώσεις άμεσου προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης επιφανειών, θα ισχύει η σχέση (Berry and Lewis 1980; Mark and Aronson 1984):

$$D = 3 - \frac{b_{32}}{2}.$$



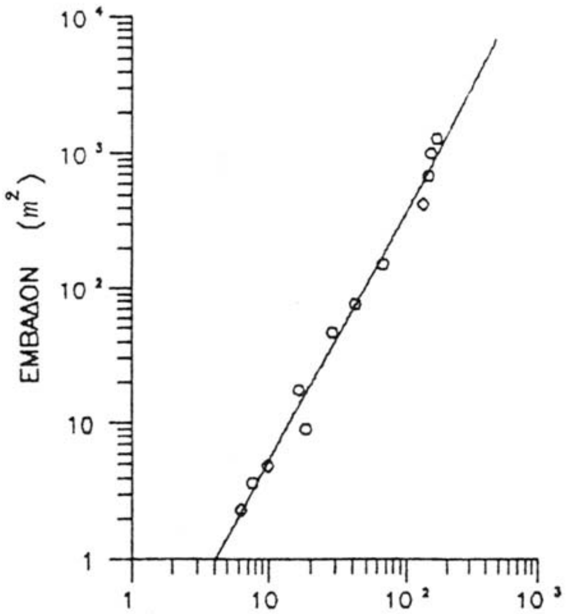
Σχήμα 5. Γραμμική παλινδρόμηση συνάρτησης μεταβλητότητας.

Οι κλίσεις κυμαίνονται μεταξύ των τιμών 0-2 ($0<b_{31}$, $b_{32}<2$). Επομένως οι προσδιοριζόμενες τιμές της κλασματικής διάστασης D μεταβάλλονται μεταξύ των τιμών 1-2 ($1<D<2$) για τις γραμμές-τομές και μεταξύ των τιμών 2-3 ($2<D<3$) για τις επιφάνειες. Οι οριακές τιμές για τις ευκλείδιες γραμμές και επιφάνειες της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης είναι: $b_{31}=b_{32}=2$.

Προβλήματα απόκλισης των τιμών της συνάρτησης μεταβλητότητας από την ευθεία παλινδρόμησης του λογαριθμικού διαγράμματος εμφανίζονται σε μεγάλα μήκη συσχέτισης. Τα προβλήματα αυτά αποδίδονται στον επηρεασμό των τιμών της συνάρτησης από τις διευθύνσεις και τα διαστήματα δειγματοληψίας (Burrough 1981; Roy et al. 1987), καθώς επίσης στη μείωση της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος στις πολύ μεγάλες αποστάσεις. Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίζονται με τους παρακάτω τρόπους (Roy et al. 1987):

1. Καθορισμός του μέγιστου μήκους συσχέτισης στο $\frac{1}{4}$ της μεγίστης διάστασης του δείγματος.
2. Οι τιμές της συνάρτησης μεταβλητότητας να υπολογίζονται στις τέσσερεις βασικές διευθύνσεις.
3. Οι τιμές των μηκών συσχέτισης να ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο.

Μια επιπρόσθετη ερμηνεία των προβλημάτων της απόκλισης των τιμών της συνάρτησης μεταβλητότητας από ευθεία γραμμή οφείλεται στο γεγονός της εμφάνισης στο διάγραμμα των δύο περιοχών που αντιπροσωπεύουν την ολική και τοπική κλασματική διάσταση. Το τμήμα του διαγράμματος που αντιπροσωπεύει την ολική κλασματική διάσταση απομονώνεται με σχετική ευκολία γιατί εμφανίζει κλίση ίση με την τιμή 2, η οποία αντιστοιχεί σε τιμή κλασματικής διάστασης ίση με τη μονάδα.



Σχήμα 6. Γραμμική παλινδρόμηση εμβαδού-περιμέτρου.

4.4 Συσχέτιση εμβαδού-περιμέτρου

Με τη μέθοδο αυτή προσδιορίζεται η κλασματική διάσταση κλειστών γραμμών για τις οποίες ισχύει η ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοιότητας. Κλασική περίπτωση τέτοιων γραμμών αποτελούν οι τομές επιφανειών με οριζόντια επίπεδα (ισαριθμικές καμπύλες) ή ακτογραμμές. Η σχέση του εμβαδού ως προς την περίμετρο ενός συνόλου κλειστών γραμμών μιάς κλασματικής επιφάνειας, μετρημένων με το ίδιο βήμα, απεικονίζεται σε διπλό λογαριθμικό διάγραμμα με ευθεία γραμμή. Από την κλίση (b_4) της ευθείας παλινδρόμησης (Σχήμα 6) προσδιορίζεται η κλασματική διάσταση των γραμμών με τη σχέση (Mandelbrot 1982a):

$$D = \frac{2}{b_4}.$$

Η οριακή τιμή για ευκλείδιες γραμμές της κλίσης της ευθείας είναι: b_4=2.

Η μέθοδος αυτή φαίνεται να εμφανίζει τη μεγαλύτερη σταθερότητα και τα καλύτερα αποτελέσματα απ’ όλες τις προηγούμενες (Mandelbrot et al. 1984; Sakellariou et al. 1991).

5. Εφαρμογές θεωρίας κλασματικής γεωμετρίας στη χαρτογραφία

Η θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας αποτελεί σήμερα ένα ανοικτό θέμα έρευνας στη χαρτογραφία. Στην ενότητα αυτή γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση των κυριότερων ερευνητικών χαρτογραφικών εργασιών που είναι προσανατολισμένες από την οπτική της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας.

Αρχικά ο Beckett (1977) διατυπώνει μέσω εμπειρικής έρευνας το πρόβλημα της μείωσης του μήκους (αναπτύγματος) γραμμικών συμβόλων (δρόμων, ακτών ή ποταμών) μετρημένων από χάρτες, όσο η κλίμακα των χαρτών μικραίνει. Ο ίδιος τονίζει ότι η μείωση αυτή εξαρτάται από τη γενίκευση και την πολυπλοκότητα της μορφής των γραμμών. Η προσπάθειά του εστιάζεται στη δυνατότητα διατύπωσης ενός απλού εμπειρικού νόμου με τη βοήθεια του οποίου να προσδιορίζεται η απαιτούμενη διόρθωση του μήκους των γραμμών, όπως αυτό μετράται από τους χάρτες. Χρησιμοποιώντας μια σχέση ανάλογη με την εμπειρική σχέση του Richardson, διεξήγαγε μετρήσεις σε χάρτες κλιμάκων από 1:2,500 ως 1:2,000,000 προσδιορίζοντας για το οδικό δίκτυο της Μ. Βρεττανίας η τιμή της σταθεράς D=1.017. Στα συμπεράσματα τονίζεται ότι είναι αδύνατο προσδιοριστούν σε παγκόσμια κλίμακα οι τιμές των σταθερών k και D της εμπειρικής αυτής σχέσης, και προτείνει προσδιορισμός τους να γίνεται ανεξάρτητα για κάθε περίπτωση. Η σύσταση αυτή υποδηλώνει ότι για τον Beckett, έστω και άδηλα, οι συντελεστές αυτοί έχουν κάποια σχέση με τη μορφή (πολυπλοκότητα) των γραμμών, αλλά δεν κατέστει δυνατό να την εκφράσει.

Στον Goodchild (1980) διαπιστώνεται ότι η σταθερή τιμή της κλασματικής διάστασης D γεωγραφικών γραμμών ισχύει γιά ένα περιορισμένο εύρος κλιμάκων. Το συμπέρασμα αυτό όμως, συνδέεται άμεσα με το γεγονός ότι, σε χάρτες διαφορετικών κλιμάκων ενσωματώνεται και διαφορετικός βαθμός γενίκευσης κάθε φορά, ο οποίος επηρεάζει τη μορφή και την ποσότητα των λεπτομερειών τους. Διατυπώνεται επίσης η άποψη ότι, γνωρίζοντας την τιμή της κλασματικής διάστασης (D) μπορούν να προσδιοριστούν κατάλληλα διαστήματα δειγματοληψίας κατά την ψηφιοποίηση, ανάλογα με την πολυπλοκότητα των γεωγραφικών γραμμών.

Στον Dutton (1981) διαπιστώνεται ότι, για τις γεωγραφικές γραμμές φαίνεται να ισχύουν οι δύο βασικές ιδιότητες της κλασματικής γεωμετρίας. Οι ισχυρισμοί αυτοί αποδεικνύονται από το ότι οι περισσότερες γεωγραφικές γραμμές έχουν διάσταση μεταξύ των τιμών 1 και 2 και οι ακτογραμμές φαίνονται όμοιες αν ειδωθούν σε διαφορετικές κλίμακες. Η πρώτη ιδιότητα αναφέρεται στην κλασματική διάσταση των χαρτογραφικών γραμμών και η δεύτερη στην αυτο-ομοιότητα.

Το πρόβλημα των αδρών γραμμών, αποτέλεσμα ψηφιοποίησης χαρτών ή της μεγέθυνσης ορισμένων γραμμών σε θεματικούς κυρίως χάρτες, μπορεί να αντιμετωπιστεί στη χαρτογραφία με την ενίσχυση των λεπτομερειών των γραμμών (enhancement). Προτείνεται, λοιπόν, στην εργασία αυτή (Dutton 1981), ένας επαναληπτικός αλγόριθμος αύξησης των λεπτομερειών των χαρτογραφικών γραμμών βασισμένος στην ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας. Η εφαρμογή της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας στο χαρτογραφικό αυτό πρόβλημα επιτρέπει τη μεγέθυνση ορισμένων από τα χαρακτηριστικά των γραμμών, την ένταξη στις γραμμές λεπτομερειών με χαρακτηριστικά μικρότερου μεγέθους καθώς επίσης και την απαλοιφή ορισμένων χαρακτηριστικών. Οι συντεταγμένες των σημείων που αποτελούν τη χαρτογραφική γραμμή μετασχηματίζονται ως προς τέσσερεις παραμέτρους: (α) την ημιτονική διάσταση (*SD*), (β) το συντελεστή ομοιομορφίας (*UC*), (γ) το όριο ευθυγραμμίας (*ST*), και (δ) το όριο εξομάλυνσης (*SM*). Ο αλγόριθμος του Dutton διατηρεί το χαρακτήρα των χαρτογραφικών γραμμών δημιουργώντας λεπτομέρειες με χαρακτηριστικά μικροτέρου μεγέθους, όμως στην εργασία του δεν αναφέρεται σε συγκεκριμένες οδηγίες για την επιλογή των τιμών των τεσσάρων παραμέτρων που χρησιμοποιεί (Buttenfield 1985).

Γύρω από το ίδιο θέμα, ο Müller (1986) διερευνά την επίδραση της κλασματικής διάστασης γεωγραφικών γραμμών στη χαρτογραφική γενίκευση. Στην εργασία αυτή διαπιστώνεται ότι η κλασματική διάσταση των γεωγραφικών γραμμών δεν διατηρείται σταθερή στις διάφορες κλίμακες, λόγω της μη διατήρησης σταθερών γεωμετρικών προτύπων κατά τη διαδικασία της χαρτογραφικής γενίκευσης. Για παράδειγμα, πολλές φορές οι χαρτογράφοι χρησιμοποιούν το γεωμετρικό τελεστή γενίκευσης της μετάπτωσης που έχει ως αποτέλεσμα επιφανειακά σύμβολα με γραμμική διάταξη σε χάρτες μεγάλων κλιμάκων να απεικονίζονται ως γραμμές σε χάρτες μικρών κλιμάκων.

Σε διαφορετική εργασία του ίδιου ερευνητή (Müller 1987b) διερευνάται η διατήρηση της κλασματικής διάστασης επτά αλγορίθμων απλοποίησης που χρησιμοποιούνται συχνά σε εφαρμογές γενίκευσης γραμμών. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι κανένας από τους αλγορίθμους αυτούς δεν διατηρεί με συνεπή τρόπο την κλασματική διάσταση των γραμμών που γενικεύονται. Ενσωματώνοντας τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της κλασματικής διάστασης σε μια διαδικασία απλοποίησης γραμμών, προτείνεται ένας νέος αλγόριθμος απλοποίησης, με τον οποίο διατηρείται η τιμή της κλασματικής διάστασης των γενικευόμενων γραμμών. Τα αποτελέσματα της απλοποίησης των γραμμών με εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου βρίσκονται πολύ κοντά στα καλύτερα αποτελέσματα άλλων αλγορίθμων απλοποίησης.

Σε τρίτη εργασία του ιδίου ερευνητή (Müller 1987a) η κλασματική γεωμετρία χρησιμοποιείται στον καθορισμό του απαιτούμενου μεγίστου αριθμού σημείων που χρειάζονται για τη σχεδίαση μιάς χαρτογραφικής γραμμής με ένα αυτόματο μέσο (π.χ. αυτόματο σχεδιαστή - plotter). Δεδομένα αποτελούν η ελάχιστη απόσταση μεταξύ διακριτών σημείων της γραμμής και η κλασματική διάσταση. Παράλληλα, προτείνεται ένας νέος αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών (Müller 1987b), για όσες χαρτογραφικές γραμμές ισχύει η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας. Στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων διατυπώνεται ένα γνωστό πρόβλημα της ανάπτυξης αυτοματοποιημένων μεθόδων γενίκευσης γραμμών, της απαίτησης δηλαδή κατά τη διαδικασία αυτή να υπάρχει κάποια «ευφυία», ικανή να εξομοιώνει σε υπολογιστικό περιβάλλον τις γνώσεις των χαρακτηριστικών μορφών των γεωγραφικών γραμμών ενός έμπειρου χαρτογράφου. Με την υλοποίηση του στόχου αυτού οι πολύπλοκες χαρτογραφικές γραμμές θα γενικεύονται αυτόματα χωρίς το ανεπιθύμητο φαινόμενο της αλληλεπικάλυψης των διαφόρων τμημάτων τους.

Μια άλλη χαρακτηριστική χαρτογραφική ομάδα εφαρμογών αφορά τη δυνατότητα απεικόνισης σε υπολογιστικό περιβάλλον εικόνων που προσομοιώνουν το τοπογραφικό ανάγλυφο. Οι πρώτες εφαρμογές προσομοίωσης ανάγλυφου σε εικόνες Η/Υ στηρίζονται σε αιτιοκρατικά μοντέλα. Η αποτελεσματικότητα των εφαρμογών αυτών σε περιπτώσεις προσομοίωσης φυσικών φαινομένων είναι περιορισμένη ως προς την αξιοπιστία και την ακρίβεια. Ένα βασικό πρόβλημα της προσομοίωσης είναι η ανάγκη ύπαρξης μεγάλου όγκου δεδομένων (Fuchs et al. 1977). Ένα δεύτερο βασικό πρόβλημα, είναι ο ίδιος ο χαρακτήρας των φυσικών αυτών δεδομένων που επηρεάζεται από την τραχύτητά τους. Η τραχύτητα των δεδομένων παρακολουθείται με μεγάλη δυσκολία από έναν αιτιοκρατικό νόμο. Εφαρμόζοντας ένα στοχαστικό μοντέλο η προσομοίωση των φυσικών δεδομένων μπορεί να γίνει σύμφωνα θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας. Στα πλαίσια της συλλογιστικής αυτής έχει προταθεί ένα στοχαστικό μοντέλο για την προσομοίωση εικόνων φυσικών φαινομένων σε υπολογιστικό περιβάλλον (Fournier et al. 1982). Στην εργασία αυτή τονίζεται ότι κάθε μοντέλο προσομοίωσης εικόνων σε Η/Υ πρέπει να στηρίζεται σε πρότυπα για τα οποία να ισχύουν δύο ιδιότητες: η εσωτερική και η εξωτερική συνοχή. Με την εσωτερική συνοχή εξασφαλίζεται η αναπαραγωγή του πρότυπου σε κάθε θέση και σε κάθε επίπεδο λεπτομερειών. Με την εξωτερική συνοχή εξασφαλίζεται η συνέχεια των γειτονικών προτύπων στην εικόνα. Βασικός στόχος του προτεινόμενου αλγορίθμου είναι να δημιουργείται μιά σειρά από νέα σημεία της γραμμής διατηρώντας την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας. Η δημιουργία των νέων σημείων γίνεται με μια επαναληπτική διαδικασία. Στο ενδιάμεσο κάθε ευθύγραμμου τμήματος της γραμμής ορίζεται ένα νέο σημείο μετατοπισμένο κατά την αναλογία μιάς τυχαίας μεταβλητής Gauss (με μέση τιμή 0 και μεταβλητότητα 1) ως προς το βαθμό της τραχύτητας της γραμμής. Ο συντελεστής με τον οποίο εκφράζεται ο βαθμός της τραχύτητας υπολογίζεται από την κλασματική διάσταση της γραμμής. Ο αλγόριθμος αυτός, που ονομάζεται «στοχαστικός αλγόριθμος παρεμβολής» επεκτείνεται διδιάστατες εφαρμογές. Στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου τονίζεται οτι στις εφαρμογές που έγιναν οι εικόνες παρουσιάζουν φυσικές και συμπαγείς περιγραφές των χωρικών φαινομένων, σε πολύ σύντομα χρονικά διαστήματα επεξεργασίας σε σύγκριση με άλλες υπάρχουσες μεθόδους. Σε μιά κριτική του αλγορίθμου από τον Mandelbrot (1982b), διατυπώνονται σοβαρές διαφωνίες στο ότι όντος διατηρείται σταθερή η τιμή της κλασματικής διάστασης των γραμμών με την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου.

Σε μεταγενέστερη προσπάθεια προσομοίωσης του τοπογραφικού ανάγλυφου (Clarke 1987; 1988) προτείνεται μια μέθοδος βασισμένη και σε αιτιοκρατικό αλλά και κλασματικό μοντέλο. Τα εξαρτώμενα από την κλίμακα χαρακτηριστικά του ανάγλυφου περιγράφονται από το αιτιοκρατικό μοντέλο μέσω σειρών Fourier, ενώ τα ανεξάρτητα από την κλίμακα χαρακτηριστικά από ένα μοντέλο στηριγμένο στην θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας. Ο κλασματικός χαρακτήρας της προσομοίωσης εξασφαλίζεται από τον επανακαθορισμό των συντελεστών Fourier μέσω της κλασματικής διάστασης. Η προσομοίωση πραγματοποιείται από την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier.

Τέλος, μια άλλη σχετική εφαρμογή αναφέρεται στο αντικείμενο της φωτοερμηνείας. Η ανάλυση των ταξινομημένων περιοχών ψηφιακών εικόνων από δορυφόρους μπορεί να μελετηθεί με τη θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας (De Cola 1989), λόγω της μορφής και του μεγέθους που παρουσιάζουν οι περιοχές αυτές. Σε πολύγωνα που αντιστοιχούν σε δασικές περιοχές εμφανίζεται μεγάλη τιμή κλασματικής διάστασης, όπως επίσης και σε πολύγωνα αστικών περιοχών, ενώ σε πολύγωνα γεωργικών εκτάσεων η τιμή της κλασματικής διάστασης εξαρτάται αντίστροφα ως προς την ένταση της καλλιέργειας. Η κλασματική διάσταση προσδιορίζεται από την συσχέτιση εμβαδού-περιμέτρου.

Ένα σημαντικό συμπέρασμα των χαρτογραφικών εφαρμογών που αναλύθηκαν αφορά το γεγονός ότι αποτελούν, είτε διαδικασία γενίκευσης (απλοποίησης γραμμών), είτε την ακριβώς αντίστροφη διαδικασία (δηλαδή αύξηση λεπτομερειών ή προσομοίωση). Παρ' όλο ότι διατυπώνονται ορισμένες επιφυλάξεις όσο αφορά τη διαπίστωση του κλασματικού χαρακτήρα των γεωγραφικών φαινομένων, δηλαδή δεν διαπιστώνεται η ίδια ακριβώς τιμή για την κλασματική διάσταση σε ένα ευρύ φάσμα κλιμάκων (Goodchild 1980; Müller 1986; Buttenfield 1989), σε μιά εκτεταμένη σειρά μελετών (Mandelbrot 1967; 1975b; Sayles and Thomas 1978; Burrough 1981; Mark and Aronson 1984; Kubik and Leberl 1986; Sakellariou et al. 1991; De Cola 1989; Huang and Turcotte 1989; Νάκος 1990) επιβεβαιώνεται ο κλασματικός χαρακτήρας των γεωγραφικών φαινομένων. Τα περισσότερα από τα γεωγραφικά φαινόμενα με επιβεβαιωμένο τον κλασματικό τους χαρακτήρα αφορούν το τοπογραφικό ανάγλυφο.

6. Το πρόβλημα της χαρτογραφικής γενίκευσης γραμμών

Σύμφωνα με το Πολύγλωσσο Λεξικό Τεχνικών Όρων της Χαρτογραφίας (Multilingual Dictionary of Technical Terms in Cartography), η χαρτογραφική *γενίκευση* ορίζεται ως (ICA 1973):

> « η επιλεγμένη και απλοποιημένη αναπαράσταση των λεπτομερειών που κρίνονται κατάλληλες ως προς την κλίμακα ή και το σκοπό του χάρτη».

Η γενίκευση επιτυγχάνεται με την επιλεκτική αφαίρεση ή και τροποποίηση της πληροφορίας που αντιστοιχεί είτε στον πραγματικό κόσμο, είτε σε ένα χάρτη μεγαλύτερης κλίμακας. Η επιλεκτική αυτή αφαίρεση πληροφορίας υλοποιείται μέσα από συγκεκριμένες διεργασίες, οι οποίες αν επιχειρηθεί να ομαδοποιηθουν, μπορούν ταξινομηθούν σε τέσσερεις ομάδες (Robinson et al. 1984). Οι ομάδες αυτές είναι:

(α) η απλοποίηση,
(β) η ταξινόμηση,
(γ) ο συμβολισμός και
(δ) η επαγωγή.

Δεδομένου ότι, η πληροφορία που απεικονίζεται στο χάρτη χαρακτηρίζεται από δύο συνιστώσες, τη θέση και τη σημασία, τότε η γενίκευση ως διαδικασία επιδρά και στις δύο συνιστώσες (Keates 1973). Το αποτέλεσμα της γενίκευσης, επομένως, είναι προϊόν αντικειμενικών (αφαίρεση) αλλά και υποκειμενικών (επιλεκτική αφαίρεση) λειτουργιών. Η εμπειρία των χαρτογράφων έχει καταγράψει με κατηγορηματικό τρόπο ότι, η σημασία των υποκειμενικών λειτουργιών είναι τόσο μεγάλη, ώστε να καθορίζει αυτή σε μεγάλο βαθμό τη δημιουργία επιτυχημένων χαρτών. Για να είναι το αποτέλεσμα της γενίκευσης από διαφορετικούς χαρτογράφους ομοιόμορφο, χωρίς να είναι διαφοροποιημένη οπτικά η εικόνα των χαρτογραφικών χαρακτηριστικών, δημιουργούνται ανάλογα με το σκοπό και την κλίμακα του χάρτη, κοινά αποδεκτοί κανόνες-προδιαγραφές.

Με την εισαγωγή του Η/Υ ως «χαρτογραφικού εργαλείου» στις συμβατικές διεργασίες της γενίκευσης διαμορφώθηκε για το χαρτογράφο, σε μεγάλο βαθμό, μια διαφορετική αντίληψη για την ίδια τη γενίκευση. Ήδη από τη δεκαετία ’70-’80 είχε απορριφθεί η αντίληψη που επικρατούσε στη χαρτογραφική κοινότητα, ότι η γενίκευση είναι μια διαδικασία που δεν μπορεί να αυτοματοποιηθεί (Tobler 1989). Σημαντικό βάρος στην εξέλιξη αυτή είχε η εμφάνιση ενός επιτυχημένου αλγόριθμου απλοποίησης γραμμών από τους Douglas και Peucker (1973). Το περιεχόμενο της γενίκευσης υποβοηθούμενης από υπολογιστή αποδίδεται σήμερα με τον όρο *αυτοματοποιημένη γενίκευση*. Η χρήση του Η/Υ είναι απόλυτα κατάλληλη για τις αντικειμενικές λειτουργίες της γενίκευσης. Συνήθως οι λειτουργίες αυτές απαιτούν επαναληπτικές επεξεργασίες μεγάλου όγκου δεδομένων. Για τις υποκειμενικές, όμως, λειτουργίες της γενίκευσης το πρόβλημα της αυτοματοποίησης της διαδικασίας είναι περισσότερο σύνθετο. Σήμερα, επικτατεί η αντίληψη ότι οι λειτουργίες αυτές μπορούν να υποβοηθηθούν μερικώς σε υπολογιστικό περιβάλλον.

Ο χαρτογράφος σήμερα μπορεί να χρησιμοποιεί συστήματα λογισμικών πακέτων, με τα οποία συνήθως είναι δυνατή η επιλογή και εφαρμογή κατάλληλων αλγορίθμων απλοποίησης γραμμών για όσες από τις υποκειμενικές λειτουργίες της γενίκευσης έχει επιτευχθεί να εκφραστούν ποσοτικά. Τα σύστηματα αυτά τις περισσότερες φορές λειτουργούν σε περιβάλλον αλληλοεπίδρασης με τους χρήστες. Ο ισχυρισμός, σύμφωνα με τον οποίο μπορεί να υπάρξει ένας ιδανικός αλγόριθμος, κατάλληλος γιά την απλοποίηση οποιασδήποτε γραμμής είναι αδύνατος. Επιπλέον, η αναλογία της γραμμικής πληροφορίας στους χάρτες είναι της τάξης του 80% (Thapa 1988). Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι τα ζητήματα παραγωγής που αφορούν τη διαδικασία της γενίκευσης υποβοηθούμενης από τη χρήση Η/Υ, κατά βάση, είναι προσανατολισμένα στην αξιοποίηση αλγορίθμων απλοποίησης γραμμών. Σύμφωνα με τον McMaster (1987) οι τέσσερεις πιό σημαντικές διαδικασίες που απαιτούνται γιά τη γενίκευση των γραμμικών οντοτήτων διανυσματικής δομής σε υπολογιστικό περιβάλλον είναι:

(α) η απλοποίηση,
(β) η εξομάλυνση.
(γ) η μετάθεση και
(δ) η ενίσχυση λεπτομερειών.

Το συμπέρασμα της διερεύνησης (McMaster 1989b) ενός μεγάλου αριθμού αντιπροσωπευτικών αλγορίθμων γενίκευσης, οι περισσότεροι από τους οποίους είναι αλγόριθμοι απλοποίησης γραμμών στηριγμένοι σε γεωμετρικού χαρακτήρα κριτήρια (White 1985; McMaster 1987; 1989a), καταλήγει στο ότι ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker συγκεντρώνει τα περισσότερα πλεονεκτήματα. Μεταξύ των κριτηρίων της αξιολόγησης των αλγορίθμων αναφέρεται η ελαχιστοποίηση των μεταθέσεων που υφίστανται οι γενικευμένες γραμμές, δηλαδή η ελαχιστοποίηση της αλλοίωσης της πληροφορίας κατά τη γενίκευση. Στην περίπτωση αυτή, το αποτέλεσμα της γενίκευσης παρουσιάζει την καλύτερη οπτικά εικόνα, δηλαδή διατηρούνται τα ίδια χαρακτηριστικά σημεία που θα επέλεγε και ο χαρτογράφος. Παραμένει, όμως, για τον αλγόριθμο αυτόν το σημαντικό μειονέκτημα να είναι απαγορευτικός στην εφαρμογή για μεγάλες μεταβολές μεταξύ της κλίμακας του αρχικού και του παράγωγου χάρτη (Thapa 1988). Τέλος, διατυπώνοναι από τον McMaster (1987) μια σειρά ερευνητικών ερωτημάτων σχετικών με τα ανοικτά ζητήματα της γενίκευσης γραμμών σε υπολογιστικό περιβάλλον. Τα ερωτήματα αυτά αφορούν τον επηρεασμό της γενίκευσης από την πολυπλοκότητα των γραμμών, τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μετρηθεί η πολυπλοκότητα και τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους οι τέσσερεις διαδικασίες της αυτοματοποιημένης γενίκευσης γραμμών. Το πρόβλημα των αλγορίθμων απλοποίησης σε μεγάλες μεταβολές της κλίμακας και τα υπόλοιπα ερευνητικά ερωτήματα που σχετίζονται με την πολυπλοκότητα των γραμμών μπορούν να αντιμετωπιστούν θετικά με την υιοθέτηση ενός μοντέλου γενίκευσης βασισμένου στη θεωρία της κλασματικής γεωμετρίας (Νάκος 1990).

Με τη διεργασία της απλοποίησης καθορίζονται τα σημαντικά χαρακτηριστικά των χαρτογραφικών φαινομένων που πρόκειται να απεικονιστούν στο παράγωγο –δηλαδή γενικευμένο– χάρτη, με παράλληλη αφαίρεση των ανεπιθύμητων λεπτομερειών (Robinson et al. 1984). Ο εμπειρικός νόμος των Töpfer και Pillewizer (1966), γνωστός ως «αρχές της επιλογής», αποτελεί τη βασικότερη ποσοτική έκφραση της διεργασίας της απλοποίησης στη χαρτογραφική γενίκευση. Ο εμπειρικός αυτός νόμος συναρτά τον αριθμό N των στοιχείων της πληροφορίας ενός φαινομένου του παράγωγου χάρτη κλίμακας $1{:}m$, με τον αντίστοιχο αριθμό N_0 του βασικού χάρτη κλίμακας $1{:}m_0$, σύμφωνα με τη σχέση:

$$N = c_{\mathrm{E}}\, c_{\mathrm{F}}\, N_0 \sqrt{\frac{m_0}{m}}\,.$$

Οι παράμετροι c_{E} και c_{F} ονομάζονται παράμετροι *μεγέθυνσης* και *μορφής* του συμβολισμού, αντίστοιχα.

Σε περιπτώσεις γενίκευσης γεωγραφικών φαινομένων που απεικονίζονται με ίσου πάχους γραμμικά σύμβολα στο βασικό και τον παράγωγο χάρτη (όπως για παράδειγμα είναι οι υψομετρικές καμπύλες, οι ακτογραμμές κλπ.), η παράμετρος μεγέθυνσης συμβολισμού έχει την τιμή μονάδα (c_{E}=1), ενώ η παράμετρος μορφής συμβολισμού λαμβάνει την τιμή: $c_{\mathrm{F}} = \sqrt{\frac{m_0}{m}}$. Τότε η σχέση που εκφράζει τον εμπειρικό αυτό νόμο απλοποιείται στην παρακάτω μορφή (Jones and Abraham 1987) :

$$N = N_0 \frac{m_0}{m}\,.$$

Με τον εμπειρικό νόμο των Töpfer και Pillewizer προσδιορίζεται αποκλειστικά ο αριθμός των στοιχείων του χαρτογραφικού φαινομένου που περιλαμβάνονται στον παράγωγο χάρτη. Απαντά, δηλαδή, στο ερώτημα *πόσα* στοιχεία του γεωγραφικού φαινομένου θα αφαιρεθούν, δεν απαντά όμως στο ερώτημα *ποιά*, (McMaster 1989a). Για την επιλογή των συγκεκριμένων στοιχείων απαιτείται μια ανεξάρτητη διαδικασία. Στην περίπτωση απλοποίησης γραμμών η επιλογή αυτή, μπορεί να γίνει με παράλληλη εφαρμογή ενός αλγορίθμου βασισμένου σε γεωμετρικού χαρακτήρα κριτήρια διατήρησης των κορυφών των γραμμών. Για τον εμπειρικό αυτό νόμο υπάρχει μια ακόμα σημαντική παρατήρηση. Κατά τη γενίκευση των χαρτογραφικών φαινομένων λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή μεταξύ βασικής και παράγωγης κλίμακας, ενώ δεν λαμβάνεται υπόψη η πολυπλοκότητα ή η τραχύτητα του χαρτογραφικού φαινομένου.

7. Θεωρία κλασματικής γεωμετρίας και χαρτογραφική γενίκευση

Η χαρτογραφική γενίκευση μπορεί να ειδωθεί ως μια διαδικασία μετασχηματισμού ομοιότητας της οποίας ο λόγος ομοιότητας καθορίζεται από το λόγο των κλιμάκων του βασικού και του παράγωγου χάρτη. Ένα κλασματικό μοντέλο γενίκευσης εμπλουτίζει τις χαρτογραφικές διεργασίες με την έννοια της κλασματικής διάστασης (D) και την ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοιότητας. Με το κλασματικό μοντέλο γενίκευσης εξασφαλίζεται επίσης η δυνατότητα ποσοτικής έκφρασης ορισμένων από τις υποκειμενικές λειτουργίες της συμβατικής γενίκευσης, γεγονός πολύ σημαντικό καθώς όλο και περισσότερο αξιοποιούνται καθημερινά σε παραγωγικές διαδικασίες συστήματα λογισμικών πακέτων που λειτουργούν σε υπολογιστικό περιβάλλον που στηρίζονται σε ανάλογες προϋποθέσεις. Η διαπίστωση αυτή βασίζεται στη θεώρηση ότι η πολυπλοκότητα ή η τραχύτητα των χαρτογραφικών φαινομένων μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά μέσω της κλασματικής διάστασης (D). Εξ' άλλου στο αποτέλεσμα της γενίκευσης εξασφαλίζεται η ίδια με την αρχική πολυπλοκότητα στα χαρτογραφικά φαινόμενα, εφ' όσον η ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοιότητας ενταχθεί σ' αυτήν.

Το πρώτο βήμα υλοποίησης του κλασματικού μοντέλου γενίκευσης αποτελεί η διαπίστωση του κλασματικού χαρακτήρα του σχήματος με το οποίο απεικονίζεται στο χάρτη το γενικευόμενο χαρτογραφικό φαινόμενο, δηλαδή, εξετάζεται άν ο χρησιμοποιούμενος συμβολισμός μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί κλασματικό σύνολο. Η διαπίστωση του κλασματικού χαρακτήρα των χαρτογραφικών συμβόλων μπορεί να γίνει με μια από τις τέσσερεις μεθόδους προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης (δες ενότητα 4). Ο κλασματικός χαρακτήρας διαπιστώνεται κάθε φορά που το διπλό λογαριθμικό διάγραμμα προσεγγίζει την ευθεία παλινδρόμησης της κατάλληλης σχέσης, μετά από στατιστικό έλεγχο σε υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης. Στις περιπτώσεις που το χαρτογραφικό φαινόμενο απεικονίζεται στο χάρτη με ανοικτές γραμμές (ακτογραμμές, δρόμοι κλπ.) αποτελεσματικότερη και επομένως συνιστώμενη μέθοδος προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης είναι η μέθοδος της συσχέτισης του μήκους της γραμμής ως προς το βήμα ψηφιοποίησης (δες ενότητα 4.1). Εάν το χαρτογραφικό φαινόμενο απεικονίζεται με κλειστές γραμμές (τοπογραφικό ανάγλυφο-υψομετρικές καμπύλες), τότε συνιστώμενη είναι η μέθοδος συσχέτισης εμβαδού-περιμέτρου (δες ενότητα 4.4). Η αξιοποίηση των μεθόδων φασματικής ανάλυσης (δες ενότητα 4.2) και συνάρτησης μεταβλητότητας (δες ενότητα 4.3) πρέπει να γίνεται λαμβάνοντας προσεκτικά υπόψη τα προβλήματα και τις αδυναμίες που εμφανίζονται στις μικρές και μεγάλες συχνότητες και στις μικρές και μεγάλες αποστάσεις συσχέτισης αντίστοιχα. Άλλωστε, οι μέθοδοι αυτοί αφορούν γραμμές που εμφανίζουν την ιδιότητα της στατιστικής αυτο-ομοπαραλληλίας, ενώ τα περισσότερα χαρτογραφικά δεδομένα με διαπιστωμένο κλασματικό χαρακτήρα ακολουθούν τη μαθηματική σχέση που εκφράζει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας των κλασματικών συνόλων. Γράφοντας την σχέση αυτή ως προς τον αριθμό των σημείων N, που αποτελούν μια ψηφιοποιημένη γραμμή, η οποία απεικονίζει το υπό εξέταση χαρτογραφικό φαινόμενο, προκύπτει η ακόλουθη:

$$N = r^{-D} .$$

Αν εκφραστεί η σχέση αυτή ώστε να περιγράφει τις δύο καταστάσεις του χαρτογραφικού φαινομένου στο βασικό χάρτη, με λόγο ομοιότητας r_0 και σημεία N_0 και στον παράγωγο χάρτη με λόγο ομοιότητας r και σημεία N, θα προκύψει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^D .$$

Είναι γνωστό, όμως, ότι το αντίστροφο του λόγου ομοιότητας ($\frac{1}{r}$) εκφράζει την απόσταση μεταξύ αρχικού και τελικού σημείου της γραμμής μετρημένου με μοναδα μήκους ίση προς το βήμα ψηφιοποίησης (Mandelbrot 1967; Müller 1987a). Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι οι λόγοι ομοιότητας μιας κλασματικής γραμμής κατά τη γενίκευση θα είναι ανάλογοι με τους παρονομαστές των κλιμάκων των χαρτών. Εάν θεωρηθεί ότι ο βασικός χάρτης έχει κλίμακα 1:m_0 και ο παράγωγος 1:m, τότε ο συλλογισμός αυτός οδηγεί στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{m_0}{m} .$$

Επομένως, η σχέση με την οποία θα εκφράζεται ποσοτικά την απλοποίηση στα πλαίσια ενός κλασματικού μοντέλου γενίκευσης προκύπτει να είναι η παρακάτω (Νάκος 1990):

$$N = N_0 \left(\frac{m_0}{m} \right)^D .$$

Η σχέση αυτή γενικεύει τον εμπειρικό νόμο των Töpfer και Pillewizer (1966), όπως εκφράζεται από τις σχέσεις που παρουσιάζονται στην ενότητα 6, ενσωματώνοντας την πολυπλοκότητα ή την τραχύτητα των χαρτογραφικών φαινομένων μέσω της κλασματικής διάστασης (*D*). Η ίδια σχέση συνιστάται και από τον Müller (1987a) για την απλοποίηση γραμμών, χωρίς όμως να αποδεικνύεται ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει.

Στη χαρτογραφική βιβλιογραφία είναι διαπιστωμένο ότι η γενίκευση της γραμμικής πληροφορίας των χαρτών επιφέρει μείωση του μήκους των γραμμών (Robinson et al. 1984; Keates 1973). Η μείωση του μήκους των γραμμών σε κανένα από τους υφιστάμενους αλγορίθμους απλοποίησης δεν εξαρτάται από την πολυπλοκότητα των γραμμών που γενικεύονται. Με το κλασματικό μοντέλο γενίκευσης η μεταβολή, που υφίστανται τα μήκη των γραμμών κατά τη γενίκευση, εξαρτάται από τη μεταβολή της κλίμακας αφενός αλλά και την πολυπλοκότητα ή την τραχύτητα των γραμμών αφετέρου.

8. Μεθοδολογία εφαρμογής κλασματικής γεωμετρίας στη γενίκευση

Στην ενότητα αυτή αναλύεται η μεθοδολογία εφαρμογής της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας στη διαδικασία στης χαρτογραφικής γενίκευσης και ειδικότερα στην απλοποίηση γραμμών.

8.1 Επιβεβαίωση κλασματικού χαρακτήρα χαρτογαρφικών συμβόλων

Η επιβεβαίωση του κλασματικού χαρακτήρα για τα χαρτογραφικά σύμβολα αποτελεί το πρώτο στάδιο εφαρμογής της κλασματικής γεωμετρίας σε οποιοδήποτε χαρτογραφικό πρόβλημα. Η διαδικασία της επιβεβαίωσης του κλασματικού χαρακτήρα των χαρτογραφικών συμβόλων περιλαμβάνει όλες εκείνες τις απαραίτητες διαδικασίες με τις οποίες αποδεικνύεται στατιστικά ότι τα χαρτογραφικά σύνολα είναι κλασματικά σύνολα σημείων.

Όπως έχει αναφερθεί στην ενότητα 3.2, τα κλασματικά σύνολα σημείων χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας ή αυτο-ομοπαραλληλίας. Η ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας των κλασματικών συνόλων σημείων μιας γραμμής εκφράζεται από τη γραμμική εξάρτηση είτε της συσχέτισης του μήκους της γραμμής με το βήμα μέτρησης ή του εμβαδού με την περίμετρο αν η γραμμή είναι κλειστή. Η ιδιότητα της αυτο-ομοπαραλληλίας των κλασματικών συνόλων σημείων εκφράζεται, αντίστοιχα, από τη γραμμική εξάρτηση είτε της ισχύος του φάσματος με το μήκος κύματος ή της συνάρτησης μεταβλητότητας με το μήκος συσχέτισης. Σημειώνεται ότι, όλα τα μεγέθη στη γραμμική αυτή εξάρτηση είναι εκφρασμένα σε λογαριθμικές τιμές.

Για τα χαρτογραφικά σύμβολα απαιτείται η επιβεβαίωση των ιδιοτήτων της στατιστικής αυτο-ομοιότητας ή αυτο-ομοπαραλληλίας μέσω των εκτιμητριών των μεγεθών που αναφέρθηκαν. Όσο πιο ισχυρή είναι η γραμμική εξάρτηση των εκτιμητριών των μεγεθών, τόσο πιο έντονος είναι και ο κλασματικός χαρακτήρας των χαρτογραφικών συμβόλων υπό εξέταση. Για το λόγο αυτό η επιβεβαίωση του κλασματικού χαρακτήρα πρέπει να γίνεται με μια σειρά στατιστικών ελέγχων των παραμέτρων της ευθείας παλινδρόμησης των τεσσάρων μεθόδων προσδιορισμού της κλασματικής διάστασης (δες ενότητα 4), οι οποίοι να χαρακτηρίζονται από πολύ υψηλό επίπεδο εμπιστοσύνης (Νάκος 1990). Οι στατιστικοί θα πρέπει να έχουν ως στόχο να εξασφαλίσουν: ισχυρή γραμμική εξάρτηση μεταξύ των λογαριθμικών τιμών των μετρούμενων μεγεθών, την επιβεβαίωση ότι τα χαρτογραφικά σύμβολα δεν είναι ευκλείδια σχήματα, καθώς επίσης τη σημαντικότητα και ακρίβεια της προσδιοριζόμενης τιμής της κλασματικής διάστασης (Νάκος 1990). Έτσι, λοιπόν διαμορφώνεται μια μεθοδολογία επιβεβαίωσης του κλασματικού χαρακτήρα των χαρτογραφικών συμβόλων με τη βοήθεια τριών στατιστικών ελέγχων.

Με τον πρώτο στατιστικό έλεγχο διατυπώνεται η μηδενική υπόθεση: ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (ρ) της ευθείας παλινδρόμησης έχει την τιμή μηδέν (H_0: ρ=0). Για την απόρριψη της μηδενικής αυτής υπόθεσης και αποδοχή, επομένως, της εναλλακτικής υπόθεσης να υφίσταται ενισχυμένη η γραμμική συσχέτιση (H_a: $\rho \neq 0$), λαμβάνεται 99% επίπεδο εμπιστοσύνης. Με το δεύτερο στατιστικό έλεγχο διατυπώνεται η μηδενική υπόθεση: η τιμή της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης έχει την αντίστοιχη οριακή τιμή των ευκλειδίων σχημάτων ή επιφανειών (H_0: $b=b_E$). Οι οριακές τιμές των ευκλειδίων σχημάτων ή επιφανειών είναι b_E=0 για τη μέθοδο συσχέτισης μήκους με βήμα μέτρησης, b_E=2 για τις υπόλοιπες τρεις μεθόδους. Για την απόρριψη της μηδενικής αυτής υπόθεσης και αποδοχή, επομένως, της εναλλακτικής υπόθεσης: να είναι η τιμή της κλίσης διαφορετική από την οριακή που ατιστοιχεί σε ευκλείδια σχήματα ή επιφάνειες (H_a: $b \neq b_E$), λαμβάνεται 95% επίπεδο εμπιστοσύνης. Τέλος, με τον τρίτο και τελευταίο στατιστικό έλεγχο διατυπώνεται η μηδενική υπόθεση: η τιμή της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης να έχει την τιμή μηδέν (H_0: b=0), δηλαδή, η παράμετρος b να είναι στατιστικά ασήμαντη. Για την απόρριψη της μηδενικής αυτής υπόθεσης και αποδοχή, επομένως, της εναλλακτικής υπόθεσης: να είναι η τιμή της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης διάφορη του μηδενός (H_a: $b \neq 0$), δηλαδή, η παράμετρος b να είναι στατιστικά σημαντική, λαμβάνεται 99% επίπεδο εμπιστοσύνης. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο πρώτοι στατιστικοί έλεγχοι αναφέρονται στη διαπίστωση του κλασματικού χαρακτήρα των χαρτογραφικών συμβόλων υπό εξέταση, ενώ ο τρίτος στην αξιοπιστία προσδιορισμού της τιμής της κλασματικής τους διάστασης.

Ειδικότερα, η ακρίβεια της προσδιοριζόμενης τιμής της κλασματικής διάστασης εκφράζεται από τη μεταβλητότητά της (σ_D^2), που προσδιορίζεται από τη μεταβλητότητα της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης (σ_b^2), εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων στις σχέσεις που συνδέουν τα δύο αυτά μεγέθη (Νάκος 1990). Επομένως, για τη μέθοδο συσχέτισης των λογαριθμικών τιμών των μηκών με τα βήματα μέτρησης η μεταβλητότητα της τιμής της κλασματικής διάστασης ταυτίζεται με τη μεταβλητότητα της κλίσης της ευθείας παλινδρόμησης, δηλαδή:

$$\sigma_D^{\,2} = \sigma_b^{\,2}.$$

Ανάλογα, για τις μεθόδους φασματικής ανάλυσης και συνάρτησης μεταβλητότητας ισχύει:

$$\sigma_D^{\,2} = \frac{1}{4}\sigma_b^{\,2}.$$

Τέλος, για τη μέθοδο της συσχέτισης εμβαδού-περιμέτρου η μεταβλητότητα της τιμής της κλασματικής διάστασης είναι:

$$\sigma_D{}^2 = \frac{4}{b^4}\sigma_b{}^2 \ .$$

Στην τελευταία σχέση η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης συμβολίζεται με *b*.

8.2 Εφαρμογή στην απλοποίηση γραμμών

Μετά τη διαδικασία επιβεβαίωσης του κλασματικού χαρακτήρα των χαρτογραφικών γραμμών και προσδιορισμού της τιμής της κλασματικής τους διάστασης, η διαδικασία της γενίκευσης μπορεί να υλοποιηθεί εφαρμόζοντας έναν από τους υφιστάμενους αλγόριθμους απλοποίησης γραμμών. Για παράδειγμα, μπορεί να εφαρμοστεί είτε ο αλγόριθμος του ν-ιοστού σημείου ή ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker. Αξιοποιώντας τη σχέση της απλοποίησης της κλασματικής γεωμετρίας είτε μπορεί να προσδιοριστεί άμεσα ο αριθμός των κορυφών της παράγωγης γραμμής –με τη βοήθεια της τιμής της κλασματικής διάστασης– και να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος του ν-οστού σημείου ή μέσω του αριθμού των κορυφών της παράγωγης γραμμής να προσδιοριστεί ένα κατάλληλο μέγεθος ανοχής για τη γραμμή και να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker. Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εφαρμοστεί οποιοσδήποτε άλλος αλγόριθμος απλοποίησης που βασίζεται σε γεωμετρικά κριτήρια.

9. Βιβλιογραφία

Barnsley, M. 1988. *Fractals Everywhere*. Academic Press, New York.

Beckett, P. 1977. “Cartographic Generalisation”. *The Cartographic Journal*, 14(1): 49-50.

Berry, M.V., and Z.V. Lewis. 1980. “On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function”. Proceedings of *Royal Society of London*, A370:459-484.

Burrough, P.A. 1981. “Fractal dimensions of landscapes and other environmental data”, *Nature*. 294(19): 240-242.

Burrough, P.A. 1986. *Principles of Geographical Information Systems for Land Resourses Assessment*, Monographs on Soil and Resourses Survey, Oxford University Press, New York.

Buttenfield, B. 1985, “Treatment of the Cartographic Line”. *Cartographica*, 22(2): 1-26.

Buttenfield, B. 1989. “Scale-Dependence and Self-Similarity in Cartographic Lines”. *Cartographica*, 26(1): 79-100.

Clarke, K.C. 1987. “Scale-Based Simulation of Topography”. Proceedings of *AUTO CARTO 8*, Baltimore, Maryland, pp. 680-688.

Clarke, K.C. 1988. “Scale-Based Simulation of Topographic Relief”. *The American Cartographer*, 15(2): 173-181.

De Cola, L. 1989, “Fractal Analysis of a Classified LANDSAT Scene”. *P.E. & R.S.*, 55(5): 601-610.

Douglas, D.H., and T.K. Peucker. 1973. “Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature”. *The Canadian Cartographer*, 10(2): 112-122.

Dutton,G.H. 1981. “Fractal Enhancement of Cartographic Line Detail”. *The American Cartographer*, 8(1): 23-40.

Feder, J. 1988, *Fractals,* Plenum Press, New York.

Fournier, A., D. Fussell, and L. Carpenter. 1982. “Computer Rendering of Stochastic Models”. *Communications of the ACM*, 25(6): 371-384.

Fuchs, H., Z.M. Kedem, and S.P. Uselton, 1977. “Optimal Surface Reconstruction from Planar Contours”. *Communications of the ACM*, 20(10): 693-702

Goodchild, M.F. 1980. “Fractals and the Accuracy of Geographical Measures”. *Mathematical Geology*, 12(2): 85-98.

Huang, J., and D.L. Turcotte. 1989. “Fractal Mapping of Digitized Images: Application to the Topography of Arizona and Comparisons with Synthetic Images”. *J.G.R.*, 94(B6): 7491-7495.

Hurewicz, W., and H. Wallman. 1948. *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton.

International Cartographic Association (ICA). 1973. *Multilingual Dictionary of Technical Terms in Cartography. Franz Steiner Verlag*, Wiesbaden.

Jones, C.B., and I.M. Abraham, 1987, “Line generaliation in a global cartographic database”, *Cartographica*, 24(3): 32-45.

Keates, J.S. 1973. *Cartographic Design and Production*, Longman Inc., New York.

Kubik, K., and F. Leberl. 1986. “Fractal Behaviour of Terrain Topography”. *Technical Papers of ACSM/ASPRS*, 4: 187-190.

Mandelbrot. B.B. 1967. “How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension”. *Science*, 156(3775): 636-638.

Mandelbrot, B.B. 1975a. *Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Flammarion, Paris.

Mandelbrot, B.B. 1975b. “Stochastic models of the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for island”, Proceedings of *the National Academy of Science of USA*, 72: 3825-3828.

Mandelbrot, B.B. 1977. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, W.H. Freeman and Co., San Francisco.

Mandelbrot, B.B., 1982a. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Co., New York.

Mandelbrot, B.B. 1982b. “Comment on Computer Rendering of Fractal, Stochastic Models”. *Communications of the ACM*, 25(8): 581-583.

Mandelbrot, B.B. 1985. “Self Affine Fractals and Fractal Dimension". *Physica Scripta*, 32: 257-260.

Mandelbrot, B.B., D.E. Passoja, and A.J. Paullay. 1984. “Fractal Character of fracture surfaces of metals”. *Nature*, 308: 721-722.

Mark, D.M., and P.B. Aronson. 1984. “Scale-Dependent Fractal Dimensions of Topographic Surfaces: An Empirical Investigation, with Applications in Geomorphology and Computer Mapping”. *Mathematical Geology*, 16(7): 671-683.

McMaster, R.B. 1987. “Automated Line Generalization”. Cartographica, 24(2): 74-111.

McMaster, R.B. 1989a. “Introduction to Numerical Generalization in Cartography”. *Cartographica*, 26(1): 1-6.

McMaster, R.B. 1989b. “The integration of simplification and smoothing algorithms in line generalization”. *Cartographica*, 26(1): 101-121.

Müller, J.C. 1986. “Fractal Dimension and Inconcistencies in Cartographic Line Representations”. *The Cartographic Journal*, 23(2): 123-130.

Müller, J.C. 1987a. “Optimum Point Density and Compaction Rates for the Representation of Cartographic Lines”. Proceedings of *AUTO CARTO 8*, Baltimore, Maryland, pp. 221-230.

Müller, J.C. 1987b. “Fractal and Automated Line Generalization”. *The Cartographic Journal*, 24(1): 27-34.

Νάκος, Β. 1990. *Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών φαινομένων βασισμένη στη θεωρία της κλαματικής γεωμετρίας. Εφαρμογή στο τοπογραφικό ανάγλυφο με ψηφιακά μοντέλα.* Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

Newland, D.E. 1975. *An Introduction to Random Vibration and Spectra1 Ana1ysis*, Longman Group Ltd., London.

Richardson, L.F. 1961. "The Problem of Contiguity: An appendix of statistics of deadly quarrels". *General Systems Yearbook*, 6: 139-187.

Robinson, A.H., R.D. Sale, J.L. Morrison, and P.C. Muehrcke. 1984, *E1ements of Cartography*, John Wiley and Sons, New York.

Roy, A.G., G. Gravel, and C. Gauthier. 1987. "Measuring the Dimension of Surfaces: A Review and Appraisal of Different Methods". Proceedings of *AUTO CARTO 8,* Baltimore, Maryland, pp. 68-77.

Sakellariou, M., B. Nakos, and C. Mitsakaki. 1991. "On the Fractal Character of Rock Surfaces". *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 28(6): 527-533.

Sayles, R.S., and T.R. Thomas. 1987. "Surface topography as a nonstationary random process". *Nature*, 271: 431-434.

Shelberg, M.C., N. Lam, and H. Moellering. 1983. "Measuring the Fractal Dimensions of Surfaces". Proceedings of *AUTO CARTO 6*, pp. 319-328.

Thapa, K. 1988, "Automatic Line Generalization Using Zero-Crossings", *P.E.* & *R.S.*, 54(4): 511-517.

Tobler, W.R. 1989. "An update to numerical map generalization". *Cartographica*, 26(1): 7-8.

Töpfer, F., and W. Pillewizer. 1966. "Principles of Selection". *The Cartographic Journal*, 3(1): 10-16.

White, E.R. 1985. "Assessment of Line-Generalization Algorithms Using Characteristic Points". The *American Cartographer*, 12(1): 17-27.

Φιλίππου, Μ. 1988. *Διερεύνηση κριτηρίων για τη διάκριση σε κατηγορίες του ανάγλυφου.* Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.