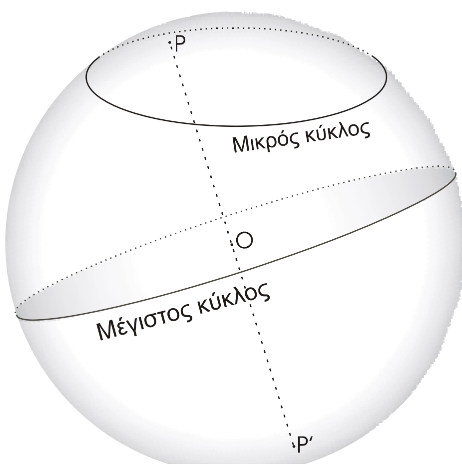
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
Τυπολόγιο Σφαιρικής Τριγωνομετρίας

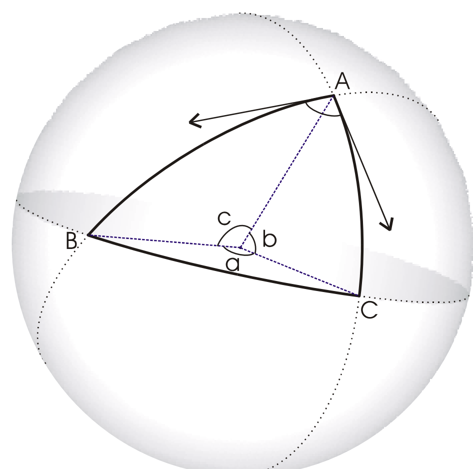
Εισαγωγή

Σε πολλά προβλήματα της Χαρτογραφίας, της Ανώτερης Γεωδαισίας, της Γεωδαιτικής Αστρονομίας και της Δορυφορικής Γεωδαισίας εμφανίζονται γεωμετρικά μεγέθη που αναφέρονται σε μια σφαιρική επιφάνεια. Σε αντιστοιχία με την (επίπεδη) Τριγωνομετρία, η ***Σφαιρική Τριγωνομετρία*** εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του βασικού σχήματος μιας σφαιρικής επιφάνειας, δηλαδή του σφαιρικού τριγώνου.

Υπενθυμίζεται πως όταν ένα επίπεδο τέμνει μια σφαίρα, η τομή είναι πάντα ένας κύκλος. Αν το επίπεδο περνά από το κέντρο της σφαίρας, ο κύκλος λέγεται *μέγιστος κύκλος,* ενώ στην αντίθετη περίπτωση λέγεται *μικρός κύκλος* (σχήμα 1). Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία, μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι αλλά μόνο ένας μέγιστος, που ορίζει και την συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων αυτών. Επομένως, οι *γεωδαισιακές γραμμές* σε μια σφαίρα είναι μέγιστοι κύκλοι. Αν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, τότε όλοι οι κύκλοι που περνούν από αυτά είναι μέγιστοι.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ένα ***σφαιρικό τρίγωνο*** ορίζεται από τρία τυχαία σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας που δεν βρίσκονται στον ίδιο μέγιστο κύκλο (*κορυφές* του τριγώνου) και από τα τρία τόξα <u>μέγιστων</u> κύκλων μεταξύ των σημείων αυτών, ανά ζεύγη (*πλευρές* του τριγώνου). Ας σημειωθεί πως κάθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι το <u>μικρότερο</u> από τα δύο τόξα στα οποία χωρίζεται κάθε μέγιστος κύκλος (σχήμα 2).

Πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ του *μέτρου* **a** κάθε πλευράς, που είναι το 'γωνιακό' μέτρο του τόξου του αντίστοιχου μέγιστου κύκλου (δηλαδή το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας) και του *μήκους* **s** της πλευράς, δηλαδή του πραγματικού μήκους του τόξου σε μονάδες μήκους (π.χ. σε μέτρα). Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μέσω της ακτίνας **R** της σφαίρας (στις ίδιες μονάδες μήκους):

$$\mathbf{s} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}$$

Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου θα εννοούμε το μέτρο της.

Τα άλλα τρία βασικά στοιχεία ενός σφαιρικού τριγώνου είναι οι τρεις *γωνίες* του, που είναι οι δίεδρες γωνίες μεταξύ των επιπέδων των μεγίστων κύκλων που ορίζουν το τρίγωνο. Ισοδύναμα, οι γωνίες αυτές είναι οι αντίστοιχες (επίπεδες) γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε κορυφή του τριγώνου.

Παραδοσιακά, οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, π.χ. A, B, C (όπως οι αντίστοιχες κορυφές), ενώ οι πλευρές του με τα αντίστοιχα πεζά γράμματα, π.χ. a, b, c έτσι ώστε στοιχεία με το ίδιο γράμμα να βρίσκονται απέναντι.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι πλευρές και οι γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου είναι αδιάστατα μεγέθη (καθαροί αριθμοί) και μετρώνται σε ακτίνια (rad) ή σε συμβατικές μονάδες μέτρησης γωνιών (μοίρες, βαθμοί κλπ.). Από τον ορισμό του σφαιρικού τριγώνου προκύπτει ότι κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από π (180°). Από την βασική ιδιότητα των πολικών τριγώνων, που αναφέρεται παρακάτω, συνάγεται ότι και κάθε γωνία του είναι μικρότερη από π.

Σφαιρική υπεροχή

Βασική ιδιότητα ενός σφαιρικού τριγώνου είναι ότι ***το άθροισμα των γωνιών του είναι <u>πάντα</u> μεγαλύτερο από*** **π**. Η διαφορά :

$$E = (A + B + C) - \pi$$

λέγεται *σφαιρική υπεροχή* και είναι ίση με την στερεά γωνία που ορίζει το τρίγωνο, όπως φαίνεται από το κέντρο της σφαίρας. Επομένως, η σφαιρική υπεροχή **E** μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν **A** του σφαιρικού τριγώνου και την ακτίνα **R** της σφαίρας :

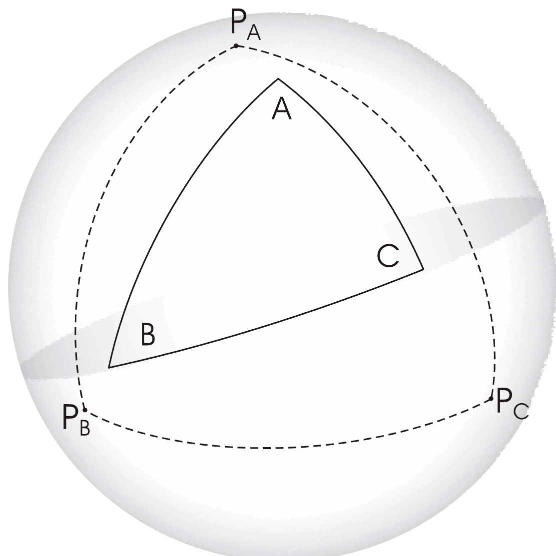
$$E = \frac{A}{R^2}$$

Η σφαιρική υπεροχή είναι και αυτή αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός), όπως και η στερεά γωνία, συνήθως όμως εκφράζεται σε μοίρες ή βαθμούς (ή υποδιαιρέσεις τους).

Πολικό τρίγωνο

Σε κάθε μέγιστο κύκλο αντιστοιχεί μία μόνο διάμετρος της σφαίρας που είναι *κάθετη* στο επίπεδό του. Τα δύο σημεία της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η διάμετρος αυτή λέγονται *πόλοι* του μέγιστου κύκλου.

Σε κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου αντιστοιχούν δύο πόλοι. Για παράδειγμα, στην πλευρά a (BC) αντιστοιχούν οι πόλοι P_A και $P_{A'}$, όπου ο πόλος P_A είναι ο πλησιέστερος προς την κορυφή A. Με όμοιο τρόπο ορίζονται και τα σημεία (πόλοι) P_B και P_C. Το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία P_A , P_B και P_C λέγεται *πολικό τρίγωνο* του τριγώνου ABC (σχήμα 3).



Σχήμα 3

Μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων ισχύει η σπουδαία ιδιότητα ότι: *οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού τριγώνου και αντίστροφα* :

$$\mathbf{a = \pi - A'} \quad \text{και} \quad \mathbf{A = \pi - a'} \quad \text{κλπ.}$$

Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων σφαιρικού τριγώνου

Σε όλες τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου, που ακολουθούν, μπορεί να εφαρμοσθεί κυκλική μετάθεση των συμβόλων (δηλαδή $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ κλπ).

1. <u>Ανισώσεις</u>

a. $A < B \Leftrightarrow a < b$

b. $A+B > \pi \Leftrightarrow a+b > \pi$

c. $| b-c | < a < b+c$

d. $a+ \pi > b+c$

2. <u>Εξισώσεις</u>

a. $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$ [νόμος ημιτόνου]

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

b. και [νόμος συνημιτόνου ή Gauss]

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

c. και [τύπος των 5 στοιχείων]

$$\sin A \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a$$

d. $\cos a \cdot \cos B = \sin a \cdot \cot c - \sin B \cdot \cot C$

$$\tan\frac{a}{2} = \tan\frac{b-c}{2} \cdot \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}} = \tan\frac{b+c}{2} \cdot \frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

e. και [αναλογίες του Neper]

$$\tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B-C}{2} \cdot \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}} = \cot\frac{B+C}{2} \cdot \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{a}{2} \cdot \frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}} = \sin\frac{a}{2} \cdot \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}$$

f. και [αναλογίες του Delambre]

$$\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}} = \sin\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{b-c}{2}}$$

3. <u>Άλλες σχέσεις</u>

Έστω **p** η ημιπερίμετρος του τριγώνου, δηλ. : p = ½ (a + b + c) . Τότε :

a. $\tan^2\frac{E}{4} = \tan\frac{p}{2} \cdot \tan\frac{p-a}{2} \cdot \tan\frac{p-b}{2} \cdot \tan\frac{p-c}{2}$

b. $$\tan^2\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{E}{2}\cdot\sin\left(A-\frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{E}{2}\right)\cdot\sin\left(C-\frac{E}{2}\right)}$$, όπου E είναι η σφαιρική υπεροχή.

c. $$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p)\cdot\sin(p-a)}{\sin(b)\cdot\sin(c)}$$

d. $$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}{\sin(p)\cdot\sin(p-a)}$$ [τύποι του Borda]

Ορθογώνια - ορθόπλευρα τρίγωνα

Αν κάποια (-ες) γωνία ή πλευρά του τριγώνου είναι ορθή (90°) έχουμε ένα *ορθογώνιο* (ή δισ- ή τρισορθογώνιο) ή ένα *ορθόπλευρο* (ή δισ- ή τρισορθόπλευρο) σφαιρικό τρίγωνο. Στην περίπτωση αυτή οι τύποι που συνδέουν τα στοιχεία του τριγώνου απλοποιούνται σημαντικά, π.χ.

Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (A = 90°) :

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c=\cot B\cdot\cot C$$
$$\sin b=\sin a\cdot\sin B=\tan c\cdot\cot C$$
$$\sin c=\sin a\cdot\sin C=\tan b\cdot\cot B$$
$$\cos B=\cos b\cdot\sin C=\tan c\cdot\cot a$$
$$\cos C=\cos c\cdot\sin B=\tan b\cdot\cot a$$

Με τη βοήθεια της βασικής ιδιότητας των πολικών τριγώνων μπορούν να γραφούν αντίστοιχες σχέσεις για ένα ορθόπλευρο τρίγωνο (a = 90°).

Επιλύσεις σφαιρικών τριγώνων

Αν είναι γνωστά **τρία** από τα βασικά στοιχεία ενός σφαιρικού τριγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα. Η εργασία αυτή λέγεται *επίλυση* του σφαιρικού τριγώνου και γίνεται με χρήση των κατάλληλων από τους τύπους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Λόγω του πλήθους των ισοδυνάμων τύπων, η διαδικασία επίλυσης μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Για διευκόλυνση, αναφέρουμε μερικούς.

Α. Γενικά: 1) Όπου είναι δυνατόν, ο υπολογισμός των αγνώστων να γίνεται από το συνημίτονο ή την εφαπτομένη, που δίνουν μονοσήμαντη λύση στην περιοχή -90° ως +90°.

2) Επίσης, όπου είναι δυνατόν, ο υπολογισμός να γίνεται από την εφαπτομένη σε μορφή λόγου δύο μεγεθών, οπότε υπολογίζεται μονοσήμαντα το σωστό τεταρτημόριο της λύσης (από τα πρόσημα αριθμητή και παρανομαστή).

3) Στις περιπτώσεις διπλών λύσεων, χρήση των σχέσεων ανισότητας μεταξύ των στοιχείων επιτρέπει την απόρριψη κάποιας λύσης που δεν είναι δεκτή.

Β. Προτάσεις για ειδικές περιπτώσεις :

1) *Δίνονται τα* ***a , b , c*** *και ζητούνται τα* ***A , B , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.1)

2) *Δίνονται τα* ***A , B , C*** *και ζητούνται τα* ***a , b , c*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.2)

3) *Δίνονται τα* ***A , b , c*** *και ζητούνται τα* ***a , B , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.1) για την πλευρά ***a*** και τον τύπο των 5 στοιχείων (2.c.1) για τα ***B*** και ***C***.

4) *Δίνονται τα* ***a , B , C*** *και ζητούνται τα* ***A , b , c*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.2) για την γωνία ***A*** και τον τύπο των 5 στοιχείων (2.c.2) για τα ***b*** και ***c***.

5) *Δίνονται τα* ***a , b , A*** *και ζητούνται τα* ***c , B , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο ημιτόνου (2.a.) για την γωνία ***B*** *(προσοχή στις δύο πιθανές λύσεις !)* και τις αναλογίες Neper, (2.e.1) για το ***c*** και (2.e.2) για το ***C***.

6) *Δίνονται τα* ***a , A , B*** *και ζητούνται τα* ***b , c , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο ημιτόνου (2.a.) για την πλευρά ***b*** *(προσοχή στις δύο πιθανές λύσεις !)* και τις αναλογίες Neper, (2.e.1) για το ***c*** και (2.e.2) για το ***C***.