



ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

---

---

---

## Η ΕΠΙΠΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΝ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ

---

---

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΛΙΑΣ ΚΑΛΗΣΠΕΡΑΚΗΣ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2010

---



## Η ΕΠΙΠΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΝ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΗΛΙΑΣ ΚΑΛΗΣΠΕΡΑΚΗΣ**

Αγρονόμος Τοπογράφος Μηχανικός ΕΜΠ

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Γιώργος Καρράς (επιβλέπων)

Ανδρέας Γεωργόπουλος

Αθανάσιος Δερμάνης

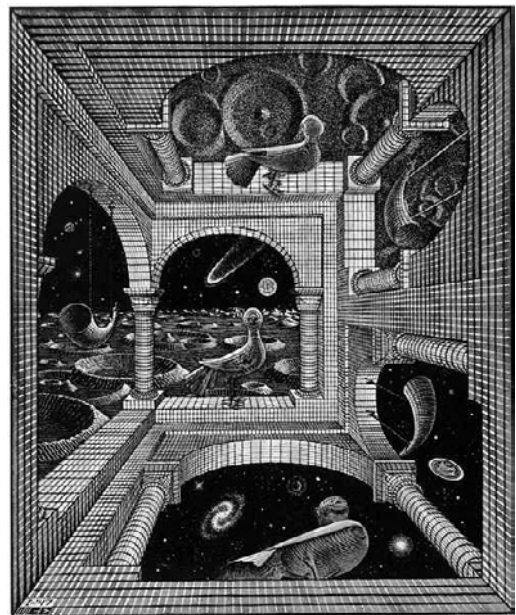
Καθηγητής ΕΜΠ

Καθηγητής ΕΜΠ

Καθηγητής ΑΠΘ

**ΜΑΡΤΙΟΣ 2010**

*Στην μνήμη του πατέρα μου*



M.C. Escher  
*Other World* (1947)



## Πρόλογος

Το θέμα της διατριβής μου και η τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή ορίστηκαν τον Νοέμβριο του 2002. Η εκπόνησή της υποστηρίχθηκε οικονομικά από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας του ΕΜΠ. Αφετηρία και πηγή έμπνευσης στάθηκε η επαφή, έπειτα και από παρότρυνση του επιβλέποντά μου Γιώργου Καρρά, με την έρευνα που διεξάγεται τα τελευταία χρόνια στο επιστημονικό πεδίο της Όρασης Υπολογιστών. Η αυστηρή μαθηματική προσέγγιση της γεωμετρίας των εικόνων στον προβολικό χώρο και οι εντυπωσιακές εφαρμογές αυτοματισμού συνδύαζαν το ενδιαφέρον μου για τα μαθηματικά και τον προγραμματισμό, ενταγμένα στο ευρύτερο ερευνητικό αντικείμενο της Φωτογραμμετρίας, με το οποίο είχα ήδη ασχοληθεί στην διπλωματική μου εργασία. Καθοριστική για μένα ήταν, ακόμα, η παρακολούθηση του 9<sup>ου</sup> Διεθνούς Συνεδρίου Όρασης Υπολογιστών (IEEE International Conference on Computer Vision), το 2003 στην Νίκαια. Εκεί οι παρουσιάσεις και οι συζητήσεις με νέους αλλά και με καταξιωμένους ερευνητές από αυτή την επιστημονική κοινότητα έκαναν ακόμη πιο φανερό ότι οι επικαλύψεις των ερευνητικών αντικειμένων με την Φωτογραμμετρία είναι πολύ έντονες και σαφείς – σε αντίθεση με την περιορισμένη επικοινωνία μεταξύ επιστημόνων των δύο κοινοτήτων – και ακόμα ότι η όποια συνεισφορά σε θέματα κοινού ενδιαφέροντος οφείλει να απευθύνεται ταυτόχρονα και στους δύο επιστημονικούς χώρους.

Θα ήθελα να σημειώσω ότι για την απόδοση στα ελληνικά επιστημονικών όρων χρησιμοποιήθηκαν οι υπάρχουσες μεταφράσεις τους στην ελληνική μαθηματική και φωτογραμμετρική βιβλιογραφία. Όπου κρίθηκε σκόπιμο αναφέρεται ο αγγλικός όρος σε παρένθεση: πχ. *ομογραφία* (homography), *μη αντιστρέψιμη ετερογραφία* (singular correlation), *απόλυτη κωνική* (absolute conic), *ανάλυση ιδιοζουσών τιμών* (singular values decomposition). Σε περιπτώσεις όπου δεν προϋπήρχαν αντίστοιχοι ελληνικοί όροι, η απόδοσή έγινε από εμένα με κριτήριο το εννοιολογικό περιεχόμενο των όρων. Ιδιαίτερα επισημαίνω την απόδοση που επέλεξα για τους δύο κεντρικούς σε αυτή την διατριβή όρους: *επιπολικός πίνακας* (fundamental matrix) και *δεσμευμένος επιπολικός πίνακας* (essential matrix).

## Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Γιώργο Καρρά και την Έλλη Πέτσα, καθηγήτρια ΤΕΙ Αθήνας, για την καθοδήγηση, την υποστήριξη και την συνολική τους προσφορά κατά την διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής. Θεωρώ προνόμιο την ευκαιρία που μου προσέφεραν να ενταχθώ στην επιστημονική τους ομάδα και να ασχοληθώ με την έρευνα στο άριστο ακαδημαϊκό κλίμα που διαμόρφωσαν. Ευχαριστώ επίσης τον Λάζαρο Γραμματικόπουλο για την συνεργασία και τις ατελείωτες συζητήσεις. Στο πρόσωπο του βρήκα έναν συνοδοιπόρο στην επιστημονική έρευνα και έναν σπουδαίο φίλο. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμα, τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου καθηγητές Ανδρέα Γεωργόπουλο και Αθανάσιο Δερμάνη για την βοήθεια που μου προσέφεραν με τις παρατηρήσεις τους.

Παράλληλα με εκείνους που συνεισέφεραν άμεσα στην διατριβή μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω την μητέρα μου για την συνεχή υποστήριξη της. Ευχαριστώ ακόμα, την Ελένη για την βαθιά κατανόηση και την συμπαράστασή της. Αν και οι ερευνητικές μας προσπάθειες ακολουθούν διαφορετικές κατευθύνσεις είναι μοναδικό να μοιράζεσαι, μεταξύ τόσων άλλων, την ανάγκη για επιστημονική αναζήτηση.

## Περίληψη

Αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής είναι η γεωμετρία του ζεύγους εικόνων άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού. Συγκεκριμένα, διερευνάται η γεωμετρική πληροφορία που είναι δυνατόν να εξαχθεί από δύο επικαλυπτόμενες εικόνες σχετικά με την θέση τους στο χώρο, τις μηχανές λήψης από τις οποίες προέρχονται και τα απεικονιζόμενα αντικείμενα. Αφετηρία αποτέλεσε η αντιμετώπιση του ζητήματος στον προβολικό χώρο τόσο, σήμερα, από ερευνητές της όρασης υπολογιστών όσο και, πριν από έναν και πλέον αιώνα, από πρωτοπόρους επιστήμονες της φωτογραμμετρίας, ωστόσο βασικός στόχος εδώ ήταν η ταυτόχρονη προσέγγιση του προβλήματος και στον ευκλείδειο χώρο.

Η διατριβή ξεκινά με μία εισαγωγή όπου τίθεται το θέμα της, ορίζεται – με επισκόπηση της συναφούς βιβλιογραφίας από τα επιστημονικά πεδία της Φωτογραμμετρίας και κυρίως της Όρασης Υπολογιστών – το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο εντάσσεται η έρευνα που πραγματοποιήθηκε και περιγράφονται τα στοιχεία πρωτοτυπίας της. Στην συνέχεια δίδονται ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία προβολικής γεωμετρίας, αναγκαία για την περιγραφή και την περαιτέρω διερεύνηση της γεωμετρίας των εικόνων. Κατόπιν παρουσιάζεται η επιτολική γεωμετρία του στερεοζεύγους στο προβολικό πλαίσιο της Όρασης Υπολογιστών. Για εικόνες γνωστού εσωτερικού προσανατολισμού περιγράφεται η γραμμική έκφραση της συνθήκης συνεπιπεδότητας και του σχετικού προσανατολισμού μέσω του δεσμευμένου επιτολικού πίνακα (essential matrix) και δίνονται οι ιδιότητες του. Εισάγεται, επίσης, η έννοια της 2D επιτολικής γεωμετρίας για εικόνες από μη βαθμονομημένες μηχανές. Αυτή εκφράζεται μαθηματικά μέσω του επιτολικού πίνακα (fundamental matrix) που περιγράφει, απευθείας στα επίπεδα των εικόνων, την μονοσήμαντη αντιστοιχία εικονοσημείων και επιτολικών ευθειών. Παρουσιάζονται διαφορετικές γεωμετρικές ερμηνείες του επιτολικού πίνακα, αλγόριθμοι υπολογισμού του από ομολογίες εικονοσημείων καθώς και η δυνατότητα για προβολική ανακατασκευή του απεικονιζόμενου χώρου αλλά και την αναβάθμιση της ανακατασκευής σε αφινική ή ευκλείδεια μέσω γεωμετρικών δεσμεύσεων που αφορούν τα αντικείμενα ή την μηχανή λήψης. Δίδονται, ακόμα, οι δεσμεύσεις μεταξύ των στοιχείων του επιτολικού πίνακα και των παραμέτρων εσωτερικού προσανατολισμού οι οποίες επιτρέπουν την αυτοβαθμονόμηση της μηχανής λήψης από  $\geq 3$  εικόνες ή την μερική βαθμονόμησης της στην περίπτωση του ζεύγους.

Οι επόμενες ενότητες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της πρωτότυπης έρευνας της διατριβής. Με δεδομένους του πόλους των δύο εικόνων και την προβολική αντιστοιχία μεταξύ των ομόλογων επιτολικών ευθειών – πληροφορία που εμπεριέχεται στον επιτολικό πίνακα – διερευνάται η 2D επιτολική γεωμετρία στον ευκλείδειο 3D χώρο. Δίνεται δηλαδή μία μαθηματική περιγραφή του συνόλου των άπειρων, συμβατών προς τον επιτολικό πίνακα, συνδυασμών σχετικού και εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων και, κατά συνέπεια, των αντίστοιχων προβολικών ανακατασκευών των απεικονιζόμενων αντικειμένων. Αυτή η περιγραφή στηρίζεται στον εντοπισμό 4 γεωμετρικών παραμέτρων του στερεοζεύγους (διεύθυνση ευθείας τομής των επιπέδων των εικόνων, δίεδρη γωνία τους, θέση προβολικών κέντρων επί της βάσης) που είναι ανεξάρτητες του επιτολικού πίνακα. Ακόμα, διατυπώνονται γεωμετρικοί τύποι που αντιστοιχούν σε μεταβολές των παραμέτρων αυτών αλλά και σε διαφορετικές δεσμεύσεις του εσωτερικού προσανατολισμού των μηχανών λήψης. Παράλληλα προτείνεται εναλλακτική γεωμετρική παραμετροποίηση για τους 7 βαθμούς ελευ-

θερίας του επιπολικού πίνακα, η οποία βασίζεται στην απόδειξη ότι, με κατάλληλη 2D μετάθεση και στροφή, δύο επίπεδες προβολικές δέσμες ευθειών – που στην γενική περίπτωση τέμνονται επί κωνικής τομής – μπορούν να έρθουν σε δεδομένη προοπτική θέση, να τέμνονται δηλαδή επί δεδομένης ευθείας.

Επίσης, μέσω διαφορετικής ευκλείδειας προσέγγισης διατυπώνονται μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν εκ νέου τις δεσμεύσεις του επιπολικού πίνακα στις παραμέτρους εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων. Οι σχέσεις αυτές στηρίζονται στην ισότητα διέδρων γωνιών μεταξύ των πλευρών τετραέδρων που ορίζονται, ανεξάρτητα στις δύο εικόνες, από συγκεκριμένα επιπολικά επίπεδα και τα επίπεδα που σχηματίζουν οι οπτικοί άξονες των εικόνων με την βάση του ζεύγους. Μέσω αυτών αναπτύσσονται τέσσερις νέοι αλγόριθμοι, κλειστής μορφής (closed form), για την μερική βαθμονόμηση των μηχανών λήψης.

Στο τελευταίο κεφάλαιο ελέγχονται και αξιολογούνται οι αλγόριθμοι της διατριβής με πραγματικές εικόνες αλλά και προσομοιωμένα δεδομένα λήψεων. Εξετάζεται ο υπολογισμός του επιπολικού πίνακα από ομολογίες εικονοσημείων που μετρήθηκαν αυτόματα, δίνονται παραδείγματα για την διερεύνηση της 2D επιπολικής γεωμετρίας στον 3D Ευκλείδειο χώρο και συγκρίνονται οι αλγόριθμοι μερικής βαθμονόμησης της διατριβής με αντίστοιχους από την βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών. Η διατριβή ολοκληρώνεται με την σύνοψη των συμπερασμάτων που προέκυψαν, την τεκμηρίωση της πρωτοτυπίας της και ορισμένες σκέψεις για περαιτέρω έρευνα στο πεδίο του αντικειμένου της.

## **Epipolar Geometry in Projective and Euclidean Space**

**Ilias Kalisperakis**

Ph.D. Dissertation

March 2010

### **Abstract**

Subject of this Ph.D. Thesis is the geometry of the uncalibrated stereopair. In particular, the question is addressed as to which information may be extracted from two overlapping images regarding their position in space, the cameras from which they originate and the recorded objects. Starting point was the treatment of this issue in projective space both (today) by researchers in the field of computer vision as well as (more than a century ago) by pioneering photogrammetrists; but, a basic aim here was to simultaneously handle the question also in the Euclidian space.

In the Introduction, the subject of the thesis is posed, its wider research framework is defined through a review of related literature in the fields of photogrammetry and particularly computer vision, and the original aspects of this work are outlined. Next, certain introductory concepts of projective geometry, indispensable for the description and further study of image geometry are given. Following this, the epipolar geometry of the stereopair is presented in the projective framework of computer vision. For calibrated images the linear expression of the coplanarity condition and relative orientation represented by the essential matrix is described and its properties are given. Also, the concept of 2D epipolar geometry for uncalibrated camera pairs is introduced. This is expressed by the fundamental matrix which describes, directly on the two image planes, the one-way correspondence between image points and epipolar lines. Different geometric interpretations of the fundamental matrix are presented along with algorithms for its computation from point correspondences as well as for projective reconstruction of the imaged space but also for its upgrading to affine or Euclidean through geometric constraints referring to object space or the camera parameters. Further, constraints are given between the fundamental matrix and interior orientation, which allow camera autocalibration from  $\geq 3$  images or partial camera calibration in the case of the stereopair.

The following chapters present the novel contributions of this thesis. Given the two epipoles and the projective correspondence between homologue epipolar lines – information inscribed in the fundamental matrix – the 2D epipolar geometry is studied in the Euclidean 3D space. Specifically, a mathematical expression is formulated to encompass the infinite, compatible with the fundamental matrix, combinations of relative and interior orientation of the two images and, consequently, the corresponding projective reconstruction of imaged space. This description relies on the definition of 4 geometric parameters of the stereopair

(direction of the intersection line of the image planes; angle formed by these planes; location of projective centres on the base-line) which are independent of the fundamental matrix. Furthermore, geometric loci are established which describe changes of these parameters but also different constraints on camera geometry parameters. In this context, an alternative geometric parameterization of the 7 degrees of freedom of the fundamental matrix is formulated, based on the proof that, with suitable 2D translation and rotation, two planar projective bundles of rays – which generally intersect on a conic section – may be brought to a given perspective position, i.e. to intersect on a straight line.

On the other hand, with a different but still Euclidean approach equations are formulated to express in a new form the constraints posed by the fundamental matrix upon the parameters of interior orientation. These equations rely on the equality between angles formed by the faces of tetrahedra which are defined, independently for the two images, by specific epipolar planes and the planes formed by the optical axes and the base of the stereopair. Based on these equations, four new closed-form algorithms for partial camera calibration are formulated.

In the last part, the algorithms developed in this thesis are evaluated with both simulated as well as real image data (including images from datasets available on the Internet). The computation of the fundamental matrix from automatically extracted image point correspondences is examined; examples of image configurations in 3D Euclidean space compatible with specific 2D epipolar geometries are given; the algorithms for partial camera calibration are compared with those from computer vision literature. The thesis is completed with conclusions from this study, justification of the originality of the performed research work and certain thoughts regarding further possible research issues in the context of the present investigation.

## Περιεχόμενα

|                   |     |
|-------------------|-----|
| Πρόλογος .....    | iii |
| Ευχαριστίες ..... | iv  |
| Περίληψη .....    | v   |
| Abstract .....    | vii |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Εισαγωγή

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 Φωτογραμμετρία και Όραση Υπολογιστών .....                              | 1  |
| 1.2 Η γεωμετρία του στερεοζεύγους .....                                     | 3  |
| 1.2.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι σχετικού προσανατολισμού .....                   | 5  |
| 1.2.2 2D επιπολική γεωμετρία.....                                           | 7  |
| 1.2.2.1 Ο επιπολικός πίνακας .....                                          | 7  |
| 1.2.2.2 Υπολογισμός επιπολικού πίνακα .....                                 | 8  |
| 1.2.2.3 Ακρίβεια υπολογισμού επιπολικού πίνακα.....                         | 9  |
| 1.2.2.4 Υπολογισμός επιπολικού πίνακα και ακτινική διαστροφή του φακού..... | 9  |
| 1.2.2.5 Αυτόματος προσδιορισμός ομόλογων εικονοσημείων .....                | 10 |
| 1.2.2.6 Υπολογισμός επιπολικού πίνακα χωρίς ομολογίες σημείων .....         | 10 |
| 1.2.2.7 Επιπολικός πίνακας και επάλληλη ανακατασκευή του 3D χώρου.....      | 11 |
| 1.2.2.8 Επιπολικός πίνακας και επιπολικές εικόνες .....                     | 11 |
| 1.2.2.9 Η προβολική ανακατασκευή στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία .....    | 12 |
| 1.2.3 Αυτοβαθμονόμηση .....                                                 | 12 |
| 1.2.4 Μερική βαθμονόμηση από στερεοζεύγος εικόνων .....                     | 14 |
| 1.3 Αντικείμενο και πρωτοτυπία της διατριβής.....                           | 16 |
| 1.4 Διάρθρωση της διατριβής.....                                            | 18 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 Γενικά .....                                                         | 21 |
| 2.2 Συνοπτική ιστορική αναδρομή .....                                    | 22 |
| 2.3 Γεωμετρία και ομάδες μετασχηματισμών .....                           | 23 |
| 2.4 Ο προβολικός χώρος .....                                             | 23 |
| 2.4.1 Σημεία του ευκλείδειου χώρου .....                                 | 24 |
| 2.4.2 Σημεία του προβολικού χώρου .....                                  | 24 |
| 2.4.3 Υπερεπίπεδα του προβολικού χώρου.....                              | 25 |
| 2.4.3.1 Ευθείες στο προβολικό επίπεδο.....                               | 25 |
| 2.4.3.2 Επίπεδα στον 3D προβολικό χώρο .....                             | 26 |
| 2.4.4 Επιφάνειες 2 <sup>ου</sup> βαθμού του προβολικού χώρου.....        | 26 |
| 2.4.4.1 Κωνικές τομές στο προβολικό επίπεδο .....                        | 27 |
| 2.4.4.2 Επιφάνειες 2 <sup>ου</sup> βαθμού στον 3D προβολικό χώρο.....    | 28 |
| 2.5 Γραμμικοί μετασχηματισμοί του προβολικού χώρου.....                  | 29 |
| 2.5.1 Προβολικοί μετασχηματισμοί .....                                   | 29 |
| 2.5.1.1 Προβολικοί μετασχηματισμοί στον μονοδιάστατο προβολικό χώρο..... | 30 |
| 2.5.1.2 Προβολικοί μετασχηματισμοί στο προβολικό επίπεδο .....           | 31 |
| 2.5.1.3 Προβολικοί μετασχηματισμοί στον 3D προβολικό χώρο .....          | 32 |

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 2.5.2 Αφινικοί μετασχηματισμοί.....                            | 33 |
| 2.5.2.1 Αφινικοί μετασχηματισμοί στο προβολικό επίπεδο .....   | 33 |
| 2.5.2.2 Αφινικοί μετασχηματισμοί στον 3D προβολικό χώρο .....  | 34 |
| 2.5.3 Μετασχηματισμοί ομοιότητας.....                          | 35 |
| 2.5.3.1 Μετασχηματισμοί ομοιότητας στο προβολικό επίπεδο ..... | 36 |
| 2.5.3.2 Μετασχηματισμοί ομοιότητας στον 3D προβολικό χώρο..... | 36 |
| 2.5.4 Ετερογραφίες .....                                       | 37 |
| 2.6 Η κεντρική προβολή.....                                    | 38 |
| 2.6.1 Ο προβολικός πίνακας της μηχανής .....                   | 38 |
| 2.6.2 Απεικόνιση σημείων του απείρου.....                      | 39 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Επιπολική Γεωμετρία

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 Σχετικός προσανατολισμός.....                                           | 41 |
| 3.1.1 Γεωμετρία του στερεοζεύγους.....                                      | 42 |
| 3.1.2 Συνθήκη συνεπιπεδότητας.....                                          | 42 |
| 3.1.3 Δεσμευμένος επιπολικός πίνακας.....                                   | 43 |
| 3.1.3.1 Ιδιότητες δεσμευμένου επιπολικού πίνακα.....                        | 45 |
| 3.1.3.2 Δεσμεύσεις στον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα .....  | 46 |
| 3.1.3.3 Υπολογισμός πίνακα στροφής και μετάθεσης.....                       | 46 |
| 3.1.3.4 Ορισμός πόλων και επιπολικών ευθειών .....                          | 48 |
| 3.2 2D Επιπολική Γεωμετρία .....                                            | 49 |
| 3.2.1 Επιπολικός πίνακας .....                                              | 49 |
| 3.2.2 Ιδιότητες του επιπολικού πίνακα .....                                 | 50 |
| 3.2.3 Γεωμετρική ερμηνεία του επιπολικού πίνακα .....                       | 51 |
| 3.2.3.1 Πόλοι και ομογραφία του $P^1$ .....                                 | 51 |
| 3.2.3.2 Πόλοι και κωνική τομή.....                                          | 52 |
| 3.2.3.3 Μεταφορά σημείων μέσω επιπέδου.....                                 | 53 |
| 3.2.4 Αλγόριθμοι υπολογισμού του επιπολικού πίνακα .....                    | 54 |
| 3.2.4.1 Γραμμική επίλυση από περίσσεια ομόλογων σημείων.....                | 55 |
| 3.2.4.2 Επίλυση από 7 ομολογίες σημείων .....                               | 56 |
| 3.2.4.3 Μη γραμμική επίλυση.....                                            | 56 |
| 3.2.4.4 Βελτιώσεις της γραμμικής επίλυσης.....                              | 57 |
| 3.2.4.5 Εντοπισμός χονδροειδών σφαλμάτων στις ομολογίες σημείων (RANSAC)... | 57 |
| 3.2.4.6 Κρίσιμες γεωμετρίες .....                                           | 58 |
| 3.3 3D προβολική ανακατασκευή.....                                          | 59 |
| 3.3.1 Εύρεση προβολικών πινάκων μηχανής συμβατών με τον επιπολικό .....     | 61 |
| 3.3.2 Εμπροσθοτομία.....                                                    | 61 |
| 3.3.3 Άρση προβολικής αβεβαιότητας μέσω φωτοσταθερών σημείων .....          | 62 |
| 3.3.4 Επάλληλη ανακατασκευή.....                                            | 62 |
| 3.4 Αυτοβαθμονόμηση .....                                                   | 64 |
| 3.4.1 Επιπολικός πίνακας και εσωτερικός προσανατολισμός.....                | 64 |
| 3.4.1.1 Αλγεβρική προσέγγιση .....                                          | 64 |
| 3.4.1.2 Γεωμετρική προσέγγιση .....                                         | 65 |
| 3.4.2 Υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής.....                             | 66 |



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Η 2D Επιπολική Γεωμετρία στον Ευκλείδειο 3D Χώρο

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 Γενικά .....                                                               | 69  |
| 4.2 Βαθμοί ελευθερίας εικόνων γνωστής 2D επιπολικής γεωμετρίας.....            | 71  |
| 4.3 Επιπολικές δέσμες σε προοπτική θέση .....                                  | 73  |
| 4.3.1 Προοπτικότητα με δεδομένη θέση των πόλων.....                            | 74  |
| 4.3.1.1 Αλγόριθμος υπολογισμού της ευθείας g.....                              | 75  |
| 4.3.2 Προοπτικότητα επί δεδομένου άξονα.....                                   | 75  |
| 4.3.2.1 Αλγόριθμος υπολογισμού στροφής και μετάθεσης της δεύτερης δέσμης ..... | 77  |
| 4.3.3 Παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα.....                               | 78  |
| 4.4 Επιπολικός κύκλος.....                                                     | 80  |
| 4.4.1 Γενική περίπτωση .....                                                   | 80  |
| 4.4.2 Ειδικές περιπτώσεις .....                                                | 82  |
| 4.4.3 Κατασκευή επιπολικών ευθειών μέσω του επιπολικού κύκλου.....             | 82  |
| 4.4.4 Γεωμετρική κατασκευή του επιπολικού κύκλου.....                          | 83  |
| 4.4.5 Εξίσωση υπολογισμού του επιπολικού κύκλου.....                           | 83  |
| 4.5 Ευθεία προοπτικότητας και θέση στον επιπολικό κύκλο.....                   | 84  |
| 4.5.1 Προβολική αντιστοιχία στον επιπολικό κύκλο .....                         | 85  |
| 4.5.2 Εύρεση ομογραφίας του $P^1$ και μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας .....      | 88  |
| 4.5.3 Πολλαπλότητα λύσεων .....                                                | 89  |
| 4.6 Στροφή των εικόνων περί τον άξονα προοπτικότητας .....                     | 91  |
| 4.6.1 Σχετική θέση των επιπέδων των εικόνων .....                              | 91  |
| 4.6.2 Εσωτερικός προσανατολισμός.....                                          | 93  |
| 4.6.3 Προβολική αντιστοιχία ευθειών πρωτεύοντος σημείου .....                  | 96  |
| 4.7 Μερική γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού.....                           | 97  |
| 4.8 Εικόνες από την ίδια μηχανή λήψης.....                                     | 99  |
| 4.8.1 Δέσμευση κοινής σταθεράς της μηχανής .....                               | 99  |
| 4.8.2 Δέσμευση κοινού πρωτεύοντος σημείου .....                                | 100 |
| 4.8.3 Δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού .....                         | 101 |
| 4.8.4 Αυτοβαθμονόμηση από περισσότερες εικόνες .....                           | 102 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Επιπολική Γεωμετρία και Εσωτερικός Προσανατολισμός

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 Γενικά .....                                                    | 104 |
| 5.2 Γεωμετρικές δεσμεύσεις στον εσωτερικό προσανατολισμό .....      | 105 |
| 5.2.1 Διέδρα γωνία των επιπολικών επιπέδων των οπτικών αξόνων ..... | 105 |
| 5.2.2 Διέδρα γωνία τυχαίων επιπολικών επιπέδων .....                | 107 |
| 5.2.3 Περίπτωση συνεπίπεδων οπτικών αξόνων .....                    | 110 |
| 5.3 Μερική βαθμονόμηση μηχανής.....                                 | 110 |
| 5.3.1 Εικόνες με διαφορετική σταθερά της μηχανής .....              | 111 |
| 5.3.2 Εικόνες με κοινή σταθερά μηχανής.....                         | 112 |
| 5.3.2.1 Γενική περίπτωση .....                                      | 112 |
| 5.3.2.2 Μη συνεπίπεδοι οπτικοί άξονες .....                         | 113 |
| 5.3.2.3 Συνεπίπεδοι οπτικοί άξονες .....                            | 113 |
| 5.3.3 Βελτιστοποίηση του υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής ..... | 114 |
| 5.4 Υπολογισμός παραμέτρων σχετικού προσανατολισμού.....            | 115 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Εφαρμογές και Αξιολόγηση

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 Εισαγωγή .....                                               | 118 |
| 6.2 Πειραματικά δεδομένα.....                                    | 119 |
| 6.2.1 Πραγματικές εικόνες.....                                   | 119 |
| 6.2.2 Προσομοιωμένα δεδομένα λήψεων .....                        | 121 |
| 6.3 Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων.....                       | 122 |
| 6.3.1 Λειτουργία του σημειακού τελεστή SIFT .....                | 122 |
| 6.3.2 Αυτόματος προσδιορισμός ομολογιών στα δεδομένα.....        | 123 |
| 6.4 2D Επιπολική γεωμετρία .....                                 | 126 |
| 6.4.1 Υπολογισμός του επιπολικού πίνακα.....                     | 126 |
| 6.5 3D επιπολική γεωμετρία .....                                 | 130 |
| 6.5.1 Επιπολικός κύκλος.....                                     | 131 |
| 6.5.2 Παραδείγματα εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού ..... | 133 |
| 6.5.3 Δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού .....           | 135 |
| 6.6 Μερική βαθμονόμηση μηχανής.....                              | 136 |
| 6.6.1 Εικόνες με διαφορετική σταθερά μηχανής .....               | 137 |
| 6.6.2 Εικόνες με κοινή σταθερά της μηχανής.....                  | 139 |
| 6.6.3 Γενικές παρατηρήσεις .....                                 | 143 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### Επίλογος και Συμπεράσματα

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 Σύνοψη και πρωτοτυπία της διατριβής .....                       | 144 |
| 7.2 Γενικότερα σχόλια και παρατηρήσεις.....                         | 146 |
| 7.3 Σκέψεις για περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο της διατριβής..... | 147 |

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| <b>Βιβλιογραφία .....</b> | <b>149</b> |
|---------------------------|------------|

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Αποτελέσματα αυτόματης μέτρησης ομόλογων σημείων .....</b> | <b>165</b> |
|---------------------------------------------------------------|------------|

# 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Φωτογραμμετρία και Όραση Υπολογιστών

Από την αρχική της εμφάνιση ως επιστημονικού κλάδου, η Φωτογραμμετρία είχε ως βασικό στόχο την γεωμετρική τεκμηρίωση του 3D χώρου μέσω εικόνων. Χαρακτηριστικός είναι από την άποψη αυτή ο ορισμός του Sebastian Finsterwalder, πριν από έναν περίπου αιώνα, στην Εγκυκλοπαίδεια των Μαθηματικών: *“Η Φωτογραμμετρία (η τέχνη της Εικονομετρίας) στόχο έχει να προσδιορίζει, μέσω φωτογραφικών εικόνων, το απεικονιζόμενο αντικείμενο ή επιμέρους γεωμετρικά στοιχεία του”* (Finsterwalder, 1905). Κυριότερο δε πεδίο εφαρμογής της υπήρξε, και εν πολλοίς παραμένει, η παραγωγή χαρτών. Μετά από μια αρχική φάση, κατά την οποία αναπτύχθηκαν οι θεωρητικές βάσεις της “εικονομετρίας”, το ενδιαφέρον εύλογα επικεντρώθηκε σχεδόν αποκλειστικά στην τυποποίηση πρακτικών διαδικασιών για μαζική χαρτογράφηση και την προσαρμογή τους στις εκάστοτε τεχνολογικές εξελίξεις. Η εισαγωγή των Η/Υ επέτρεψε να αναζωογονηθεί η θεωρητική έρευνα, η οποία μπορεί μεν να παρέμενε πάντοτε προσανατολισμένη σε άμεσες ανάγκες που έθετε η πρακτική εφαρμογή, ωστόσο παράλληλα παρήγαγε νέες θεμελιώδεις έννοιες και μαθηματικά μοντέλα, με ιδιαίτερη έμφαση στις συνορθώσεις μεγάλου όγκου δεδομένων (μέθοδος της δέσμης, Brown, 1958). Μεταξύ άλλων, στην φάση αυτή καθίσταται πλέον εφικτή η χρήση κοινών (“μη μετρικών”) μηχανών λήψης, είτε απευθείας μέσω του μαθηματικού μοντέλου του Άμεσου Γραμμικού Μετασχηματισμού (DLT, Abdel-Aziz & Karara, 1971) είτε μετά από βαθμονόμηση των μηχανών με αναλυτικές (δηλαδή όχι εργαστηριακές) μεθόδους. Παράλληλα λοιπόν με τις τυπικές χαρτογραφικές εφαρμογές διευρύνεται, έτσι, το πεδίο με τις εφαρμογές της “εγγύς φωτογραμμετρίας” (close-range photogrammetry), στην αρχιτεκτονική και την αρχαιολογία, την βιομηχανική μετρολογία, ακόμα και την ιατρική.

Όμως οι απαρχές μιας πραγματικά ριζικής μεταβολής του φωτογραμμετρικού τοπίου εντοπίζονται στα τέλη της δεκαετίας του '80 με την εισαγωγή της ψηφιακής εικόνας και την ρεαλιστική πλέον δυνατότητα για αυτοματοποίηση φωτογραμμετρικών διαδικασιών. Το με-

γαλύτερο μέρος της ουσιαστικής έρευνας που διεξάγεται έκτοτε εστιάζεται πλέον σε ζητήματα επεξεργασίας εικόνας, αυτόματης συνταύτισης εικόνας (image matching) ή αναγνώρισης προτύπων (pattern recognition). Ωστόσο η έμφαση στην τυπική διάταξη λήψεων της αεροφωτογραμμετρίας και την αυτονόητη χρήση γεωδαιτικά μετρημένου εξωτερικού ελέγχου, αλλά και την χρήση μετρικών μηχανών, άφησε την βασική έρευνα σε καθαυτό ζητήματα γεωμετρίας μάλλον στο περιθώριο.

Παράλληλα όμως, τις τελευταίες δύο δεκαετίες το ζήτημα της εξαγωγής γεωμετρικής όσο και σημασιολογικής (semantic) πληροφορίας από εικόνες απασχολούσε και την επιστημονική περιοχή της Όρασης Υπολογιστών (computer vision). Εκεί, με δεδομένη αφετηρία την ψηφιακή εικόνα και την απαίτηση για αυτοματισμό, αλλά και για λύσεις πραγματικού χρόνου, τα γεωμετρικά ερωτήματα τίθενται σχεδόν εξ υπαρχής και αντιμετωπίζονται περιπτώσεις μηχανών άγνωστης γεωμετρίας, τυχαίων διατάξεων λήψης και οριακής (ή ακόμα και ανύπαρκτης) εξωτερικής πληροφορίας. Με άμεσο θεωρητικό όσο και πρακτικό εργαλείο την προβολική γεωμετρία, διατυπώνονται εκ νέου μαθηματικά μοντέλα – γνωστά κατ' αρχήν στην Φωτογραμμετρία, αλλά “ξεχασμένα” πίσω από την καθημερινή χαρτογραφική πρακτική – και ταυτόχρονα αναπτύσσονται νέες διαδικασίες προσανατολισμών (Förstner, 2000, Hartley & Zisserman, 2000, Faugeras & Luong, 2001). Ο προσδιορισμός της “επιπολικής γεωμετρίας” εικόνων άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού, η προβολική 3D ανακατασκευή του χώρου (σε περιπτώσεις όπου δεν είναι δυνατή η ευκλείδεια ανακατασκευή) και η βαθμονόμηση μηχανών από απλές ομολογίες εικονοσημείων δίχως καμία εξωτερική πληροφορία συνιστούν ορισμένες μόνο από τις νέες δυνατότητες. Ταυτόχρονα, η μελέτη ζητημάτων όπως οι κρίσιμες γεωμετρίες, η πολλαπλότητα λύσεων ή οι γραμμικοί αλγόριθμοι αποκτά αποφασιστική θεωρητική όσο και πρακτική σημασία, συγκροτώντας μια βάση γνώσης που στην ουσία είναι και εφελτήριο για νέες μελλοντικές εφαρμογές.

Πράγματι, πέραν του αναμφισβήτητου θεωρητικού ενδιαφέροντος, είναι βέβαια και μια σειρά νέων εφαρμογών που ωθούν στην κατεύθυνση αυτής της “νέας” Φωτογραμμετρίας. Η αυτόματη ανακατασκευή φωτορραλιστικών 3D μοντέλων του χώρου, για παράδειγμα, αποδεικνύεται εφικτή με μοναδική αρχική πληροφορία εικόνες από κινούμενη μη βαθμονομημένη βιντεοκάμερα (Pollefeys & van Gool, 2002, Pollefeys et al., 2004), μεμονωμένες επίγειες εικόνες τυχαίου προσανατολισμού (van Gool et al., 2002) ή ακόμα και εκατοντάδες τυχαίες εικόνες από το Διαδίκτυο που απλώς απεικονίζουν το ίδιο αντικείμενο (Goesele et al., 2007). Σε άλλες περιπτώσεις, όπως η παρακολούθηση μηχανής (camera tracking), τελικό ζητούμενο είναι να υπολογιστεί αυτόματα ο εξωτερικός προσανατολισμός – ο οποίος βέβαια στην τυπική φωτογραμμετρική πρακτική αντιμετωπίζεται, γενικά, ως ένα απλό “ενδιάμεσο” προϊόν – ολόκληρων κινηματογραφικών σκηνών για την δημιουργία οπτικών εφέ (Fitzgibbon & Zisserman, 2003) ή και μεγάλου όγκου αναμνηστικών φωτογραφιών για την οργάνωση, αποθήκευση και εύκολη αναζήτησή τους στις τρεις διαστάσεις (Microsoft Photosynth).

Η ορατή πλέον δυνατότητα για αυτοματισμούς σε πλείστα πεδία εφαρμογής (ακόμη και σε πραγματικό χρόνο) και η γενικευμένη χρήση ψηφιακών μηχανών (που γενικά δεν είναι μετρικές) έχουν αναδείξει την επιτακτική ανάγκη για αλλαγή “φιλοσοφίας” στην Φωτογραμμετρία. Πέραν της προφανούς ανάγκης για περαιτέρω έρευνα σε θέματα επεξεργασίας εικόνας και αναγνώρισης προτύπων, ως εξίσου καίρια αιτήματα εμφανίζονται πλέον η (κατά

το δυνατόν) αποδέσμευση από *a priori* γεωμετρική πληροφορία για τον χώρο ή την μηχανή λήψης και η χρήση γραμμικών αλγορίθμων, ιδίως στο πλαίσιο του αυτοματισμού και εφαρμογών πραγματικού χρόνου, ως αρχικό στάδιο για επόμενες μη γραμμικές επιλύσεις υψηλότερης ακρίβειας. Αλλά κάτι τέτοιο υπαγορεύει μια εκ νέου ευρύτερη θεώρηση θεμελιωδών φωτογραμμετρικών προβλημάτων, καθιστώντας συνεπώς αναγκαία την συστηματική θεωρητική εμβάθυνση και την επιστημονική συνεισφορά, από την μεριά και της Φωτογραμμετρίας, στην γεωμετρική έρευνα που ήδη πραγματοποιείται την τελευταία 20ετία στον χώρο της Όρασης Υπολογιστών. Άλλωστε, όπως επισημαίνεται και σε πρόσφατη διδακτορική διατριβή (Γραμματικόπουλος, 2007), οι κοινοί ερευνητικοί στόχοι όσο και η ανάγκη για συνεργασία έχουν υπογραμμιστεί από ειδικούς και των δύο επιστημονικών κλάδων (Hartley & Mundy, 1993, Förstner, 2002). Ενδεικτική εξέλλου για αυτή την προσέγγιση είναι και η μετονομασία της Επιτροπής III της Διεθνούς Εταιρείας Φωτογραμμετρίας και Τηλεπισκόπησης (ISPRS), ήδη από το 2000, από “Θεωρία και Αλγόριθμοι” σε “Φωτογραμμετρική Όραση Υπολογιστών” και από το 2008 σε “Φωτογραμμετρική Όραση Υπολογιστών και Ανάλυση Εικόνας”.

## 1.2 Η γεωμετρία του στερεοζεύγους

Στο πλαίσιο αυτό, η παρούσα διδακτορική διατριβή εστιάζει το ενδιαφέρον της στην γεωμετρία του στερεοζεύγους. Έτσι, ένα από τα θεμελιώδη ερωτήματα – με θεωρητικές και εντέλει πρακτικές συνέπειες – που επιχειρείται να αντιμετωπιστεί εδώ είναι το ακόλουθο:

*ποιά γεωμετρική πληροφορία, για τον χώρο ή/και την μηχανή λήψης, είναι δυνατόν να εξαχθεί από δύο επικαλυπτόμενες εικόνες;*

Στην Φωτογραμμετρία, δύο επικαλυπτόμενες εικόνες γνωστού εσωτερικού προσανατολισμού επαρκούν, μέσω του σχετικού προσανατολισμού του στερεοζεύγους, για να δημιουργηθεί ένα 3D μοντέλο του αντικειμένου (επόμενο βήμα προς την φωτογραμμετρική απόδοση είναι ο απόλυτος προσανατολισμός του στερεομοντέλου στον χώρο βάσει γνωστών σημείων ή φωτοσταθερών). Για να προσδιοριστεί η σχετική θέση δύο επικαλυπτόμενων εικόνων στον χώρο χρησιμοποιείται, γενικά, η συνθήκη συνεπιπεδότητας βάσει ομόλογων εικονοσημείων, ενώ εν συνεχεία υπολογίζονται εμπροσθοτομικά οι 3D συντεταγμένες των σημείων του αντικειμένου. Εναλλακτικά, η σχετική θέση των εικόνων και των σημείων του μοντέλου του αντικειμένου μπορεί να υπολογιστεί σε ένα βήμα με την μέθοδο της δέσμης και δέσμευση των 7 βαθμών ελευθερίας του 3D μετασχηματισμού ομοιότητας. Έτσι, το προκύπτον και στις δύο περιπτώσεις 3D μοντέλο διαφέρει από το πραγματικό αντικείμενο ως προς την κλίμακα, την θέση και τον προσανατολισμό στο χώρο.

Σε αυτή την τυπική φωτογραμμετρική διατύπωση του σχετικού προσανατολισμού – ως αποκατάστασης δηλαδή της σχετικής θέσης δύο 3D προβολικών δεσμών στον χώρο (τομή ομόλογων ακτίνων) – ενυπάρχουν προφανώς ορισμένες προϋποθέσεις:

- Ο εσωτερικός προσανατολισμός των εικόνων οφείλει να είναι γνωστός (μετρικές ή βαθμονομημένες μη μετρικές μηχανές). Επομένως, αυστηρά μιλώντας, πρόκειται για σχετικό προσανατολισμό 3D δεσμών και όχι απλώς εικόνων.
- Οι εξισώσεις που υπεισέρχονται είναι μη γραμμικές και απαιτούν καλές αρχικές τιμές των αγνώστων προκειμένου να εξασφαλιστεί σύγκλιση της συνόρθωσης.

- Ακόμα, ο προσδιορισμός των επιπολικών ευθειών προϋποθέτει γνώση του εσωτερικού και του σχετικού προσανατολισμού του στερεοζεύγους. Διαβάζει κανείς, για παράδειγμα, σε πρόσφατα εγχειρίδια Φωτογραμμετρίας: “Αν ο σχετικός προσανατολισμός είναι γνωστός για δεδομένο στερεοζεύγος, η εξίσωση συνεπιπεδότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστούν οι επιπολικές ευθείες” (Wolf & DeWitt, 2000) ή “οι επιπολικές ευθείες μπορούν να προσδιοριστούν, μετά από τον σχετικό προσανατολισμό των εικόνων” (Mikhail et al., 2001) ή ακόμα ότι οι επιπολικές ευθείες ορίζονται “εάν είναι γνωστές οι παράμετροι του προσανατολισμού” (Luhmann et al., 2006).
- Τέλος, προϋποτίθεται ότι στις εικόνες έχουν μετρηθεί ομόλογα σημεία.

Ωστόσο, η μελέτη ορισμένων βασικών εργασιών προερχόμενων από την αρχική φάση θεμελίωσης της Φωτογραμμετρίας (εν πολλοίς ως εφαρμοσμένης έκφρασης της προβολικής γεωμετρίας) – και ιδίως βέβαια της πλούσιας πρόσφατης βιβλιογραφίας στην περιοχή της Όρασης Υπολογιστών – καταδεικνύει ότι οι παραπάνω προϋποθέσεις δεν είναι απόλυτες. Ειδικότερα:

- Οι 5 ανεξάρτητες παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού του στερεοζεύγους (3 στροφές + διεύθυνση της βάσης του στον χώρο του μοντέλου), μετασχηματιζόμενες σε 8 εξαρτημένες παραμέτρους (“δεσμευμένος επιπολικός πίνακας”, *essential matrix*), είναι δυνατόν να εκτιμώνται γραμμικά.
- Η απλή αντιστοίχιση ομόλογων σημείων σε στερεοζεύγος άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού επιτρέπει να ορίζονται οι πόλοι του ζεύγους και οι επιπολικές ευθείες. Αποκαθίσταται με αυτόν τον τρόπο η 2D επιπολική γεωμετρία των εικόνων (7 βαθμοί ελευθερίας), η οποία εκφράζεται προβολικά μέσω του “επιπολικού πίνακα” (*fundamental matrix*).
- Οι δύο επιπλέον βαθμοί ελευθερίας του επιπολικού πίνακα (7 έναντι 5 του σχετικού προσανατολισμού) εκφράζονται, αλγεβρικά και γεωμετρικά, στον προβολικό χώρο ως δεσμεύσεις στον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων, επιτρέποντας έτσι την *μερική βαθμονόμηση* της μηχανής, ή των δύο μηχανών, λήψης από ζεύγος γνωστού επιπολικού πίνακα (δηλαδή, εντέλει, από απλές ομολογίες εικονοσημείων).
- Σήμερα, τέλος, η αξιοποίηση τελεστών σημείων ενδιαφέροντος (*interest point operators*), αλγορίθμων συνταύτισης εικόνων και στατιστικών εργαλείων για εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων επιτρέπουν να υπολογίζεται αυτόματα η επιπολική γεωμετρία ακόμα και σε περιπτώσεις εικόνων με έντονες προοπτικές παραμορφώσεις. Τελευταία, μάλιστα, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του προσδιορισμού της 2D επιπολικής γεωμετρίας χωρίς καν την απαίτηση ομολογίων στις εικόνες (πχ. Dellaert et al., 2000).

Η επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας που ακολουθεί στόχο έχει να αποσαφηνίσει τα προαναφερθέντα και να σκιαγραφήσει το ευρύτερο πλαίσιο εντός του οποίου εντάσσεται η έρευνα της παρούσας διατριβής (αναπόφευκτα, στα επόμενα κεφάλαια θα γίνουν και άλλες αναφορές σε ορισμένα θέματα που παρουσιάζονται εδώ). Αλλά, υπό μία έννοια, η επισκόπηση αυτή επιδιώκει παράλληλα και να φωτίσει διαφορετικές χρήσεις του όρου *σχετικός προσανατολισμός*, οι οποίες ενδεχομένως εγκυμονούν παρανοήσεις. Για παράδειγμα, στην πρόσφατη έκδοση του *Manual of Photogrammetry* (McGlone, 2004) εμφανίζεται ο ε-

ξής ορισμός: “ο σχετικός προσανατολισμός δύο μη βαθμονομημένων μηχανών που διατηρούν τις ευθείες (*straight-line preserving cameras*) χαρακτηρίζεται από 7 ανεξάρτητες παραμέτρους”, με την προσθήκη ότι εφικτή είναι μόνο η 3D προβολική ανακατασκευή του αντικειμένου. Είναι σαφές ότι ένας τέτοιος ορισμός της έννοιας του σχετικού προσανατολισμού, και μάλιστα σε βασικό εγχειρίδιο Φωτογραμμετρίας, αναφέρεται σε διαφορετικό εννοιολογικό πλαίσιο από εκείνο του γενικά αποδεκτού φωτογραμμετρικού ορισμού.

### 1.2.1 Γραμμικοί αλγόριθμοι σχετικού προσανατολισμού

Η διατύπωση εναλλακτικών μαθηματικών μοντέλων για το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού απασχόλησε από νωρίς την φωτογραμμετρική έρευνα. Κύριος στόχος ήταν να αναπτυχθούν αλγόριθμοι που δεν απαιτούν αρχικές τιμές για τον υπολογισμό των παραμέτρων. Η βασική διατύπωση του προβλήματος παρέμενε, στις περισσότερες περιπτώσεις, η ίδια: από ομολογίες σημείων σε δύο εικόνες δεδομένου εσωτερικού προσανατολισμού να υπολογιστούν οι τρεις σχετικές στροφές τους στο χώρο και το διάνυσμα της σχετικής μετάθεσης της δεύτερης εικόνας ως προς την πρώτη (βάση του στερεοζεύγους υπό άγνωστη κλίμακα).

Ο Thompson (1959) εξέφρασε την συνθήκη συνεπιπεδότητας ως το μεικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων (των δύο ακτίνων που ορίζονται από ζεύγος ομόλογων σημείων και της βάσης των δύο εικόνων). Αναπαριστώντας το εξωτερικό γινόμενο ως πολλαπλασιασμό διάνυσματος με αντισυμμετρικό πίνακα, καταλήγει σε έναν πίνακα διαστάσεων  $3 \times 3$  – τον “δεσμευμένο επιπολικό πίνακα” (*essential matrix*), όπως αυτός έγινε αργότερα γνωστός στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών – στον οποίο συγκεντρώνονται οι 5 παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού. Η σχέση αναπτύσσεται μέσω γωνιών Rodrigues και προκύπτει εξίσωση 3<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τα στοιχεία της βάσης και τις τρεις γωνίες. Το γραμμικό μέρος των εξισώσεων επιλύεται για την εύρεση προσεγγιστικών τιμών, και στην συνέχεια το πλήρες μαθηματικό μοντέλο συνορθώνεται ελαχιστοτετραγωνικά.

Ο Stefanovic (1973) κατέληξε με ανάλογο τρόπο στην διατύπωση του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα, τον οποίο όμως υπολογίζει γραμμικά από  $\geq 8$  ομολογίες σημείων, και κατόπιν βρίσκει, από τα στοιχεία του, τις τυπικές παραμέτρους του σχετικού προσανατολισμού. Εξέτασε ακόμα τις απαραίτητες δεσμεύσεις για την λύση του προβλήματος στην οριακή περίπτωση των 5 σημείων, οι οποίες όμως οδηγούν σε μη γραμμικό αλγόριθμο. Ομαδοποιώντας κατάλληλα τις παραμέτρους της συνθήκης συνεπιπεδότητας, οι Khlebnikova (1983), Chang (1986) και Shih (1994) καταλήγουν επίσης σε 8 νέες (εξαρτημένες) παραμέτρους, ισοδύναμες με τα στοιχεία του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα, οι οποίες επιλύονται ως ανεξάρτητες οδηγούν σε γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Σε δεύτερο βήμα εξαγονται το διάνυσμα της βάσης και οι τρεις σχετικές στροφές των εικόνων. Τέλος, την δυνατότητα να αξιοποιείται ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας στην επίλυση του σχετικού προσανατολισμού έχουν επισημάνει ο Niini (1994) αλλά και ο Förstner (2000) σε εργασία του για την νέα προοπτική που ανοίγει για την Φωτογραμμετρία η χρήση της προβολικής

γεωμετρίας<sup>1</sup>. Είναι πάντως αξιοσημείωτο ότι στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία η πρώτη διατύπωση πίνακα ανάλογου του δεσμευμένου επιπολικού εμφανίζεται σε διδακτορική διατριβή ήδη στις αρχές του περασμένου αιώνα (von Sanden, 1908).

Τα τελευταία χρόνια, όπως έχει ήδη επισημανθεί, το πρόβλημα της εξαγωγής 3D πληροφορίας από εικόνες, και ειδικότερα εκείνο της γεωμετρίας του στερεοζεύγους, απασχόλησε ιδιαίτερα ερευνητές από τον χώρο της Όρασης Υπολογιστών. Εκεί, το μαθηματικό μοντέλο αλλά και η ίδια η έννοια του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (*essential matrix*) διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Longuet-Higgins (1981). Τα στοιχεία του πίνακα βρίσκονται γραμμικά και δίνονται σχέσεις για τον υπολογισμό της βάσης και των στροφών από αυτά. Σε αντίστοιχη σχέση καταλήγουν οι Tsai & Huang (1984), οι οποίοι προτείνουν αλγορίθμους για τον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα από 7, 8 ή περισσότερα ομόλογα σημεία. Εξετάζουν επίσης ποιές κατανομές σημείων δεν οδηγούν σε μοναδική λύση. Οι Demazure (1988), Trivedi (1988), Huang & Faugeras (1989), Maybank (1990), Horn (1990a) δημοσίευσαν εναλλακτικές εκφράσεις για τις δεσμεύσεις τις οποίες οφείλει να ικανοποιεί ένας πίνακας  $3 \times 3$  προκειμένου να συνιστά δεσμευμένο επιπολικό πίνακα ζεύγους εικόνων (στην πραγματικότητα, να μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο αντισυμμετρικού και ορθογώνιου πίνακα) και μελέτησαν τις ιδιότητες του. Τα πορίσματα αυτών των εργασιών συγκεντρώθηκαν στα εγχειρίδια των Maybank (1993) και Faugeras (1993). Οι Weng et al. (1989) υπολογίζουν επίσης γραμμικά τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα και μελετούν την μετάδοση σφαλμάτων των μετρήσεων στα στοιχεία του και στις εξαγόμενες παραμέτρους μετάθεσης και στροφής. Ανάλογη είναι η μελέτη του Philip (1991) μέσω ελέγχων Monte Carlo. Ο Kanatani (1993) απέδειξε πως οι γραμμικοί αλγόριθμοι υπολογισμού του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα οδηγούν σε συστηματικά σφάλματα και πρότεινε μια μη γραμμική ελαχιστοτετραγωνική λύση. Οι Weng et al. (1993) εξέτασαν επίσης την ευαισθησία της γραμμικής επίλυσης στα τυχαία σφάλματα ("θόρυβος") των μετρήσεων και ανέπτυξαν διαφορετικούς μη γραμμικούς αλγορίθμους. Τέλος, εναλλακτική διατύπωση του σχετικού προσανατολισμού μέσω quaternions έχει δώσει ο Horn (1991), προτείνοντας μέθοδο εύρεσης αρχικών τιμών και εν συνεχεία ελαχιστοτετραγωνικής συνόρθωσης.

Παράλληλα με την ανάπτυξη αλγορίθμων για βέλτιστη εκτίμηση του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα από περίσσεια ομόλογων σημείων, μελετήθηκε και η πολλαπλότητα των λύσεων του σχετικού προσανατολισμού στην οριακή περίπτωση των 5 σημείων (το ζήτημα αυτό δεν έχει απασχολήσει τα φωτογραμμετρικά εγχειρίδια, επομένως υπονοείται ότι η λύση είναι μοναδική). Η πρώτη γνωστή αντιμετώπιση του ζητήματος είναι εκείνη του Αυστριακού μαθηματικού Erwin Kurrpa ο οποίος, μέσω προβολικής γεωμετρίας και στηριζόμενος στις ιδιότητες μιας μιγαδικής κωνικής του απείρου, της "απόλυτης κωνικής" (*absolute conic*), έδειξε την ύπαρξη 11 λύσεων (Kurrpa, 1913). Οι Demazure (1988) και Faugeras & Maybank (1990) απέδειξαν ότι, τελικά, οι πιθανές λύσεις (πραγματικές ή μιγαδικές) είναι 10 και πρότειναν σύνθετους τρόπους για τον υπολογισμό τους. Το θέμα απασχόλησε και τον Horn (1991), ο οποίος κατέληξε σε ίδια συμπεράσματα εκφράζοντας τις στροφές του στερεοζεύγους μέσω quaternions, τους Heyden & Sparr (1997), οι οποίοι αντί του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα αντιμετώπισαν την γεωμετρία του ζεύγους μέσω "κινητικών δια-

<sup>1</sup> Γραμμικοί αλγόριθμοι αυτού του τύπου αξιοποιούνται σε ορισμένα προγράμματα φωτοτριγωνισμού (πχ. Bingo) για τον άμεσο προσδιορισμό αρχικών τιμών προσανατολισμού. Βλ. ακόμα ανάλογη εφαρμογή τους σε διπλωματική εργασία του Εργαστηρίου Φωτογραμμετρίας (Μπουτσικάκης, 2003).



νυσμάτων βάθους" (*kinetic depth vectors*), και τον Thorup (2003) που διατύπωσε νέα αλγεβρική απόδειξη για την ύπαρξη 10 λύσεων, βασιζόμενος στην εξίσωση Thom-Porteous. Μάλιστα, το ζήτημα του υπολογισμού του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα από 5 ομολογίες σημείων έχει αποκτήσει τελευταία, εκτός του θεωρητικού, και αμεσότερο πρακτικό ενδιαφέρον ως συστατικό στοιχείο αλγορίθμων για τον εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων σε ομολογίες σημείων. Έτσι, οι Philip (1996), Nister (2003), Li & Hartley (2006) και Batra et al. (2007) πρότειναν νέους τρόπους για να υπολογίζονται όλες οι πιθανές λύσεις του σχετικού προσανατολισμού στην οριακή περίπτωση των 5 σημείων. Πρόσφατα, οι Rodenhorst et al. (2008) συνέκριναν τους αλγορίθμους αυτούς από την άποψη της εύρεσης αρχικών τιμών για πολυεικονικές συνορθώσεις.

## 1.2.2 2D επιπολική γεωμετρία

### 1.2.2.1 Ο επιπολικός πίνακας

Μελετώντας την περίπτωση ζεύγους εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές, οι Faugeras (1992), Hartley (1992) και Hartley et al. (1992) έδειξαν ότι οι *δέσμες των επιπολικών ευθειών* είναι εφικτό να προσδιοριστούν χωρίς να πρέπει κατ' ανάγκην να οριστούν και οι αντίστοιχες οπτικές ακτίνες στον χώρο. Η 3D ανακατασκευή των απεικονιζόμενων αντικειμένων είναι και τότε δυνατή, όμως το προκύπτον μοντέλο θα διαφέρει από το πραγματικό όχι μόνο κατά κλίμακα, θέση και στροφή (ομοιότητα) αλλά κατά έναν πλήρη 3D προβολικό μετασχηματισμό. Εισάγονται έτσι η έννοια της *προβολικής ανακατασκευής* (*projective reconstruction*) και το μαθηματικό μοντέλο του "*επιπολικού πίνακα*" (*fundamental matrix*), ο οποίος αντιπροσωπεύει την γενίκευση του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Παρά τις παρόμοιες μαθηματικές τους εκφράσεις, οι δύο αυτοί πίνακες έχουν διαφορετικές ιδιότητες και περιγράφουν διαφορετικές γεωμετρικές δεσμεύσεις. Ο επιπολικός πίνακας είναι ένας ομογενής πίνακας  $3 \times 3$  με μηδενική ορίζουσα (7 βαθμοί ελευθερίας, έναντι 5 του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα), υπολογίζεται από 7 κατ' ελάχιστον ομόλογα εικονοσημεία και περιγράφει την προβολική σχέση μεταξύ δύο *επίπεδων* δεσμών ακτίνων (δέσμες ομόλογων επιπολικών ευθειών). Μέσω αυτού ορίζονται οι *πόλοι* του στερεοζεύγους και εκφράζεται η σχέση των σημείων μιας εικόνας με τις αντίστοιχες επιπολικές ευθείες της άλλης. Με τον επιπολικό πίνακα αποκαθίσταται, δηλαδή, η *2D επιπολική γεωμετρία* του στερεοζεύγους.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι, όπως επισημαίνουν οι Faugeras & Maybank (1990) αλλά και ο Buchanan (1993), το πρόβλημα του υπολογισμού της 2D επιπολικής γεωμετρίας το έθεσε, στην ουσία του, για πρώτη φορά ο Γάλλος μαθηματικός M. Chasles το 1855, με την εξής διατύπωση:

*"Δίδονται στο ίδιο επίπεδο δύο συστήματα επτά σημείων ευρισκόμενων σε αντιστοιχία. Να ορισθεί σε κάθε σύστημα μια δέσμη επτά ακτίνων κατά τρόπο ώστε οι δύο δέσμες να συνδέονται μέσω ομογραφίας. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν τρεις λύσεις".<sup>2</sup>*

Ιστορικά, το πρόβλημα για πρώτη φορά το έλυσε το 1863 ο O. Hesse<sup>3</sup> με τρόπο αντίστοι-

<sup>2</sup> Chasles, M., 1855. Question No. 296. *Nouv. Ann. Math.*, 14, 50.

<sup>3</sup> Hesse, O., 1863. Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. Chasles abhängt. *J. reine angew. Math.*, 62, pp. 188-192.

χο του επιπολικού πίνακα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η προσέγγιση του R. Sturm<sup>4</sup> το 1869, ο οποίος ανέλυσε τις περιπτώσεις με 4, 5 και 6 διαθέσιμα σημεία και κατέληξε στην λύση μέσω της τομής δύο καμπυλών 3<sup>ου</sup> βαθμού. Οι Luong & Faugeras (1998) μελέτησαν την δυνατότητα να υπολογίζεται η επιπολική γεωμετρία πραγματικών εικόνων μέσω της προσέγγισης του R. Sturm, διαπιστώνοντας ότι είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στον θόρυβο των μετρήσεων. Μέσω της ίδιας μεθόδου, οι Nister & Schaffalitzky (2004) εξέτασαν τον γεωμετρικό τόπο των πόλων στην οριακή περίπτωση ομολογίας 4 σημείων σε εικόνες γνωστού προσανατολισμού. Την σύνδεση του προβλήματος που έθεσε ο M. Chasles με εφαρμογές της Όρασης Υπολογιστών μελέτησαν επίσης οι Sparr & Sparr (1994).

### 1.2.2.2 Υπολογισμός επιπολικού πίνακα

Προσδιορισμός του επιπολικού πίνακα από ομολογίες εικονοσημείων είναι δυνατός με την βοήθεια των αλγορίθμων που υπολογίζουν τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα, οι οποίοι αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Παράλληλα όμως, στην βιβλιογραφία έχουν διατυπωθεί και πολλές εναλλακτικές προσεγγίσεις. Ο Luong (1992) και οι Luong & Faugeras (1996) πρότειναν μη γραμμικούς αλγορίθμους στηριζόμενους, βάσει διαφορετικών κριτηρίων, στην ελαχιστοποίηση αντίστοιχων γεωμετρικών ποσοτήτων και την έκφραση του επιπολικού πίνακα συναρτήσει 7 ανεξάρτητων παραμέτρων. Εξετάζοντας τα κριτήρια αυτά, ο Zhang (1998b) βρήκε υπό ποιές προϋποθέσεις είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, ενώ σε άλλη εργασία του (Zhang, 1998a) συγκρίνει τους κυριότερους αλγορίθμους που είχαν διατυπωθεί έως τότε, δείχνοντας ότι για βέλτιστο προσδιορισμό του επιπολικού πίνακα θα πρέπει κανείς να ελέγξει 36 πιθανές παραμετροποιήσεις του. Την απαίτηση αυτή την παρακάμπτει ο ίδιος λίγο αργότερα (Zhang & Loop, 2001) με κατάλληλο μετασχηματισμό των μετρημένων ομόλογων σημείων στον προβολικό χώρο, όπως εξάλλου κάνουν και οι Bartoli (2002) και Bartoli & Sturm (2004) υιοθετώντας μια ορθοκανονική αναπαράσταση του επιπολικού πίνακα μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών (SVD – *singular value decomposition*). Μια γενική παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα έχουν προτείνει, επίσης, οι Isgro & Trucco (2000). Ο Hartley (1997a) υποστηρίζει πως η ακρίβεια του γραμμικού υπολογισμού του επιπολικού πίνακα μπορεί να βελτιωθεί με κατάλληλη κανονικοποίηση των εικονοσυντεταγμένων και δέσμευση μηδενικής ορίζουσας, καταλήγοντας σε αποτελέσματα ανάλογης ακρίβειας με εκείνα από πιο σύνθετες, μη γραμμικές προσεγγίσεις. Νέους γραμμικούς αλγορίθμους, οι οποίοι υπολογίζουν άμεσα έναν πίνακα μηδενικής ορίζουσας, έχουν προτείνει και οι Chesi et al. (2002) και Zhong et al. (2006).

Διαφορετική προσέγγιση υιοθέτησε ο Beardsley (1992), ο οποίος μελέτησε την σχέση της επιπολικής γεωμετρίας με επίπεδα του χώρου. Αυτός εντόπισε προβολικούς μετασχηματισμούς συμβατούς με την επιπολική γεωμετρία και, αποδεσμεύοντας τις στροφές των εικόνων από την μετάθεση, διατύπωσε αλγόριθμο υπολογισμού του επιπολικού πίνακα από 6 σημεία, 4 από τα οποία θα πρέπει να είναι συνεπίπεδα. Το πρόβλημα του προσδιορισμού της επιπολικής γεωμετρίας από αντικείμενα αποτελούμενα από περισσότερα επίπεδα εξέτασαν και οι Bartoli et al. (2001). Παραλλαγή της προσέγγισης του Beardsley (1992) διατυπώνουν οι Sinclair et al. (1995) και Lawn & Cipolla (1994). Οι δεύτεροι εισάγουν την έννοια της “αφινικής παράλλαξης”, παρακάμπτοντας την απαίτηση για εντοπισμό επιπέδου.

<sup>4</sup> Sturm, R., 1869. Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. *Math. Ann.*, 1, pp. 533-574.

Στην ίδια λογική, οι Anandan et al. (1994), Vieville et al. (1996), Shashua & Navab (1996) και Irani et al. (1998) εξετάζουν την ανάλυση της επιπολικής γεωμετρίας σε έναν προβολικό μετασχηματισμό και τις εναπομένουσες παραλλάξεις στα ομόλογα σημεία, ενώ οι Boufama & Mohr (1995) και Ponce & Genc (1998) υπολογίζουν ανεξάρτητα τον έναν πόλο και έναν προβολικό μετασχηματισμό μεταξύ των επιπολικών ευθειών, ορίζοντας μια “προβολική βάση” (*projective basis*) από επιλεγμένα ομόλογα σημεία.

### **1.2.2.3 Ακρίβεια υπολογισμού επιπολικού πίνακα**

Όσον αφορά την εκτίμηση της ακρίβειας κατά τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα, οι Luong & Faugeras (1994) υπολόγισαν τον πίνακα συμμεταβλητότητας των παραμέτρων, όμως οι Csurka et al. (1997) εντόπισαν σφάλμα σε αυτόν τον υπολογισμό και πρότειναν δύο διαφορετικούς τρόπους για τον σωστό προσδιορισμό του. Την προσέγγισή τους υιοθετούν και τα δύο βασικά εγχειρίδια αναφοράς, εκείνα των Hartley & Zisserman (2000) και Faugeras & Luong (2001), στα οποία αναλύονται σε βάθος οι ιδιότητες και οι τρόποι υπολογισμού του επιπολικού πίνακα.

Αντικείμενο σημαντικού αριθμού δημοσιεύσεων αποτέλεσε, επίσης, ο υπολογισμός του επιπολικού πίνακα με παράλληλο εντοπισμό χονδροειδών σφαλμάτων στις ομολογίες σημείων. Οι Torr & Murray (1993) εφάρμοσαν την μέθοδο RANSAC (*random sampling consensus*) των Fischler & Bolles (1981), η οποία βρίσκει σήμερα γενικότερη αποδοχή, εντοπίζοντας, εκτός από χονδροειδή σφάλματα ομολογιών, και σημεία επί κινούμενων αντικείμενων. Από την μεριά τους, οι Shapiro & Brady (1995) στηρίχθηκαν στην μέθοδο της ορθογωνικής παλινδρόμησης (*orthogonal regression*), οι δε Torr & Murray (1997) και Zhang (1998a) έκαναν συγκρίσεις διαφορετικών προσεγγίσεων. Βασιζόμενοι στην μέθοδο αναζήτησης “*Reactive Tabu Search*”, οι Ke et al. (1998) σε ένα βήμα εντοπίζουν ομολογίες σημείων από δύο σύνολα μετρήσεων, εξαιρούν τα πιθανά σφάλματα και υπολογίζουν τον επιπολικό πίνακα. Οι Chai & Ma (1998) πρότειναν την χρήση γενετικού αλγορίθμου (*genetic algorithm*), ενώ οι Tang et al. (1999) μπόρεσαν, μέσω παραλλαγής του μετασχηματισμού Hough, να αντιμετωπίσουν επιτυχώς ακόμα και περιπτώσεις όπου οι άστοχες ομολογίες σημείων είναι περισσότερες από τις σωστές. Τέλος, οι Torr & Zisserman (2000) και Torr (2002) ανέπτυξαν δύο παραλλαγές της μεθόδου RANSAC, την MLSAC (*maximum likelihood sample consensus*) και την MAPSAC (*maximum a posteriori sample consensus*), αντίστοιχα, βελτιώνοντας την απόδοσή της. Περαιτέρω βελτίωση πέτυχαν οι Feng & Hung (2003) αναζητώντας, κατά τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα, διαφορετικές στατιστικές κατανομές στα εναπομένοντα σφάλματα των παρατηρήσεων.

### **1.2.2.4 Υπολογισμός επιπολικού πίνακα και ακτινική διαστροφή του φακού**

Παράλληλα, ο Zhang (1996), εισάγοντας την έννοια της “επιπολικής καμπύλης” στην θέση της επιπολικής ευθείας, ασχολήθηκε πρώτος με τον ταυτόχρονο υπολογισμό του επιπολικού πίνακα και των παραμέτρων της διαστροφής του φακού βάσει του μοντέλου διαστροφής του Brown (1971). Ο αλγόριθμός του είναι μη γραμμικός και ο συγγραφέας εκτιμά ότι οι παράμετροι της διαστροφής μπορούν να υπολογίζονται σωστά εάν ο θόρυβος των εικονοσημείων είναι μικρός και η διαστροφή έντονη, ενώ κρίνει ότι γενικά μόνο ο πρώτος όρος

του πολυωνύμου της ακτινικής διαστροφής έχει σημασία<sup>5</sup>. Ο Fitzgibbon (2001) παρουσίασε μια γραμμική μέθοδο, διατυπώνοντας την επίλυση του επιτολικού πίνακα και της ακτινικής διαστροφής ως πρόβλημα ιδιοτιμών 2<sup>ου</sup> βαθμού (*quadratic eigenvalue problem*). Οι Barreto & Daniilidis (2005), αναφερόμενοι στην περίπτωση εικόνων με διαφορετική ακτινική διαστροφή, εισάγουν το μαθηματικό μοντέλο του “ακτινικού επιτολικού πίνακα” (*radial fundamental matrix*), στο οποίο ενσωματώνονται η 2D επιτολική γεωμετρία και η ακτινική διαστροφή του φακού.

#### 1.2.2.5 Αυτόματος προσδιορισμός ομόλογων εικονοσημείων

Όλες οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις προϋποθέτουν ότι έχουν κατ’ αρχάς εντοπιστεί ομόλογα σημεία σε δύο εικόνες. Η αυτοματοποίηση του βήματος αυτού (αντιστοίχιση εικονοσημείων) έχει απασχολήσει από νωρίς τόσο την Φωτογραμμετρία όσο και την Όραση Υπολογιστών. Η τυπική αντιμετώπιση βασίζεται σε τεχνικές επιφανειακής συνταύτισης εικόνων μέσω συντελεστή συσχέτισης (Ackermann, 1984, Briechele & Hanebeck, 2001) είτε στην εκδοχή της ελαχιστοτετραγωνικής συνταύτισης (Lucas & Kanade, 1981, Grün, 1985, Xiao & Shah, 2003) είτε πάλι στον εντοπισμό χαρακτηριστικών σημείων ή σημείων ενδιαφέροντος (*feature points* ή *interest points*) μέσω σημειακών τελεστών (Moravec, 1979, Förstner & Gülch, 1987, Harris & Stephens, 1988, Smith & Brady, 1997) και την μετέπειτα αναζήτηση ομολογιών τους (Förstner, 1986, Zhang et al., 1995). Εκεί που οι τεχνικές αυτές συχνά αστοχούν είναι σε ζεύγη εικόνων μεγάλης βάσης (*wide-base*), όπου οι περιοχές περί τα ομόλογα σημεία εμφανίζονται υπό διαφορετική κλίμακα και με έντονες προοπτικές παραμορφώσεις. Για να αντιμετωπιστούν τέτοιες περιπτώσεις έχουν αναπτυχθεί πρόσφατα αλγόριθμοι που εντοπίζουν όχι απλώς χαρακτηριστικά σημεία αλλά, ταυτόχρονα, περιοχές περί αυτά οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες (*invariant*) υπό αφινικό μετασχηματισμό (Tuytelaars & van Gool, 2000 και 2004, Mikolajczyk & Schmid, 2002 και 2004). Η εύρεση των ομολογιών επιτυγχάνεται σε επόμενο βήμα με σύγκριση των περιοχών αυτών, οι οποίες απεικονίζουν ίδιο τμήμα του αντικειμένου στο χώρο. Παρεμφερής είναι, ακόμα, και η προσέγγιση των Lowe (2004) και Bay et al. (2006), οι οποίοι εντοπίζουν σημεία συνοδευόμενα με αναλλοίωτα περιγραφικά χαρακτηριστικά (*descriptors*). Συγκριτική αξιολόγηση των νέων αυτών τεχνικών έχουν παρουσιάσει οι Mikolajczyk & Schmid (2005).

#### 1.2.2.6 Υπολογισμός επιτολικού πίνακα χωρίς ομολογίες σημείων

Επίσης, τελευταία έχουν αναπτυχθεί και μέθοδοι υπολογισμού του επιτολικού πίνακα που δεν απαιτούν μέτρηση ομόλογων εικονοσημείων. Οι Dellaert et al. (2000) αντιμετωπίζουν την εύρεση των ομολογιών και του επιτολικού πίνακα ως ένα διπλό πρόβλημα πιθανοτήτων, το οποίο διατυπώνουν με την μέθοδο δειγματοληψίας των αλυσίδων Markov (*Markov Chains Monte Carlo*) και επιλύουν με τον αλγόριθμο EM (*Expectation Maximization*). Από την δική τους μεριά, οι Makadia et al. (2005) και Lehmann et al. (2006) αναδιατυπώνουν το πρόβλημα υπολογισμού του επιτολικού πίνακα στο πεδίο συχνότητων της εικόνας, αξιοποιώντας τον μετασχηματισμό Radon για την επίλυσή του. Τέλος, αντί ομολογίες εικονοσημείων οι Domke & Aloimonos (2006) υπολογίζουν κατανομές πιθανοτήτων των ομολογιών (*correspondence probability distributions*) στις εικόνες με την βοήθεια συντονισμέ-

<sup>5</sup> Στο συμπέρασμα ότι στους περισσότερους απλούς φακούς μη μετρικών μηχανών σημασία έχει, γενικά, μόνο ο πρώτος όρος του πολυωνύμου της ακτινικής διαστροφής συγκλίνουν άλλωστε πολλές παλαιότερες μελέτες (πχ. Karara & Abdel-Aziz, 1974).

νων φίλτρων Gabor, και από αυτές υπολογίζουν τον επιπολικό πίνακα.

### 1.2.2.7 Επιπολικός πίνακας και επάλληλη ανακατασκευή του 3D χώρου

Όπως προαναφέρθηκε, ο επιπολικός πίνακας επιτρέπει 3D προβολικές – και όχι ευκλείδειες (“μετρικές”) – ανακατασκευές του χώρου μέσω εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές. Αυτό οι Hartley et al. (1992) το δείχνουν υπολογίζοντας για το στερεοζεύγος, με την βοήθεια αυθαίρετων αντισυμμετρικών πινάκων, δυνάδες Άμεσων Γραμμικών Μετασχηματισμών (DLT) συμβατών με τον επιπολικό του πίνακα, και ακολούθως προσδιορίζοντας εμπροσθοτομικά κάθε φορά σημεία του αντικειμένου. Οι Hartley & Sturm (1997) εξετάζουν το πρόβλημα της εμπροσθοτομίας στον προβολικό χώρο, προτείνοντας διαφορετικούς αλγόριθμους. Αντί της εμπροσθοτομίας στον χώρο, ο Faugeras (1992) επιλέγει 5 σημεία, ορίζει μια προβολική βάση (*projective basis*) και προσδιορίζει από αυτήν τα υπόλοιπα σημεία του αντικειμένου στον χώρο. Οι Carlsson (1993) και Csurka & Faugeras (1995), βασιζόμενοι στην άλγεβρα Grassman-Cayley, πραγματοποιούν μετρήσεις διπλών λόγων και προχωρούν στην προβολική ανακατασκευή του πραγματικού αντικειμένου. Οι Rothwell et al. (1997), τέλος, συγκρίνουν τις διαφορετικές μεθόδους προβολικής ανακατασκευής.

Από μια άλλη σκοπιά, οι Mundy & Zisserman (1994) εξετάζουν ποιά είναι η γενικότερη γεωμετρική πληροφορία που μπορεί να εξάγει κανείς από ζεύγη εικόνων όταν είναι γνωστά ορισμένα στοιχεία για τον εσωτερικό προσανατολισμό ή την κίνηση των μηχανών λήψης. Στο ίδιο πνεύμα, οι Luong & Vieville (1996) ιεραρχούν τις μηχανές λήψης σε προβολικές, αφινικές και ευκλείδειες, αναπαριστώντας τις με πίνακες (αντίστοιχους του DLT) διαφορετικών ιδιοτήτων. Οι Vieville & Lingrand (1999) προβαίνουν επίσης σε μια ιεράρχηση ανάλογα με την κίνηση που εκτελεί η μηχανή λήψης και αναλύουν, ανά περίπτωση, τις ιδιότητες του επιπολικού πίνακα και της ανακατασκευής του 3D χώρου. Ο Faugeras (1995) εισάγει, στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας και βασιζόμενος σε γνωστές γεωμετρικές δεσμεύσεις, την έννοια της *επαλληλίας* (*stratification*) και της *επάλληλης ανακατασκευής* (*stratified reconstruction*). Κατά την προσέγγιση αυτή, εκκινώντας κανείς από μια προβολική ανακατασκευή αρκεί να εντοπίσει το επίπεδο του απείρου για να πραγματοποιήσει αφινικές μετρήσεις (πχ. σχετικές αποστάσεις σε παράλληλες διευθύνσεις). Η εύρεση της “απόλυτης κωνικής” επιτρέπει, σε επόμενο βήμα, ευκλείδειες μετρήσεις (γωνίες, σχετικές αποστάσεις, αναλογίες). Την ιδέα αυτή – της διαδοχής, δηλαδή, ιεραρχημένων ανακατασκευών του 3D χώρου μέσω γνωστών γεωμετρικών ιδιοτήτων του – εξετάζουν επίσης οι Faugeras et al. (1998), Liebowitz et al. (1999), Criminisi (1999) και Liebowitz (2001). Τέλος, οι Boufama et al. (1993) και Mohr et al. (1995) χρησιμοποιούν *a priori* γεωμετρική πληροφορία για τον χώρο με αποτέλεσμα τον απευθείας υπολογισμό ευκλείδειων ανακατασκευών.

### 1.2.2.8 Επιπολικός πίνακας και επιπολικές εικόνες

Πέραν όμως της δυνατότητας για εξαγωγή 3D γεωμετρικής πληροφορίας, ο επιπολικός πίνακας επιτρέπει και δημιουργία επιπολικών εικόνων χωρίς να απαιτείται κανένα δεδομένο για τον εσωτερικό προσανατολισμό ή για την σχετική θέση των εικόνων στον χώρο. Αντί της συνήθους φωτογραμμετρικής τεχνικής – κατά την οποία οι δύο βαθμονομημένες εικόνες μετασχηματίζονται σε διάταξη κανονικής περίπτωσης του στερεοζεύγους στο σύστημα της βάσης (κανονικοποίηση ζεύγους) – οι Hartley & Gupta (1993) και Hartley (1999) διατυπώνουν αλγόριθμο για επιπολική επανασύσταση εικόνων, αναζητώντας έναν προβολικό

μετασχηματισμό που επανατοποθετεί τους δύο πόλους στο άπειρο, εξαλείφει την κατά  $y$  παράλλαξη και, ταυτόχρονα, ελαχιστοποιεί τις κατά  $x$  παραλλάξεις προκειμένου να διευκολυνθεί η διαδικασία αυτόματης συνταύτισης σημείων. Στην ίδια λογική, οι Loop & Zhang (1999) αναζητούν μια επαλληλία μετασχηματισμών (προβολικού, αφινικού, ομοιότητας), ενώ οι Gluckman & Nayar (2001) τους μετασχηματισμούς εκείνους που ελαχιστοποιούν τις μεταβολές στο εμβαδόν των εικόνων. Λαμβάνοντας υπόψη ολόκληρες τις εικόνες και μέσω της ανάλυσης SVD, οι Mallon & Whelan (2005) επιφέρουν βελτιώσεις στο μοντέλο των Loop & Zhang (1999). Οι Isgrò & Trucco (1999) υπολογίζουν τον μετασχηματισμό των επιτολικών εικόνων απευθείας από τις ομολογίες σημείων. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εικόνων που περιέχουν τους πόλους – αφού θεωρητικά θα έπρεπε να είχαν άπειρο μέγεθος μετά από την επανασύσταση – οι Roy et al. (1997) πραγματοποιούν επιτολική επανασύσταση όχι σε επίπεδα αλλά σε κυλινδρική επιφάνεια, οι Pollefeys et al. (1999) χρησιμοποιούν μια πρωτότυπη πολική παραμετροποίηση των επιτολικών εικόνων με κέντρο τους πόλους, ενώ ο Oram (2001) υιοθετεί μια υβριδική μέθοδο επανασύστασης. Στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία πρώτος ο Niini (1992) χρησιμοποίησε τον επιτολικό πίνακα για την παραγωγή επιτολικών εικόνων.

#### **1.2.2.9 Η προβολική ανακατασκευή στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία**

Αναμφισβήτητα, η πολύ σημαντική έρευνα των τελευταίων χρόνων στην Όραση Υπολογιστών έχει επιτρέψει μια νέα θεώρηση της γεωμετρίας του στερεοζεύγους. Ωστόσο, δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ότι οι έννοιες της 2D επιτολικής γεωμετρίας και της προβολικής ανακατασκευής είναι εντελώς ξένες στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία. Ήδη στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα ο Sebastian Finsterwalder είχε δείξει πως, με γνωστούς τους πόλους ενός στερεοζεύγους, μπορεί να κατασκευαστεί από ομολογίες εικονοσημείων ένα “βοηθητικό” 3D αντικείμενο που θα βρίσκεται σε προβολική σχέση προς το απεικονιζόμενο στις δύο εικόνες. Επεσήμανε επιπλέον ότι, σε περίπτωση προοπτικών εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές, είναι δυνατές  $\infty^5$  τέτοιες προβολικές ανακατασκευές (Finsterwalder, 1899). Η προσέγγιση αυτή του Finsterwalder έχει άλλωστε υιοθετηθεί και στον τρίτο τόμο του βασικού βιβλίου αναφοράς των Rinner & Burkhardt (1972). Μαθηματικά μοντέλα αντίστοιχα του επιτολικού πίνακα διατύπωσαν ανεξάρτητα ο Thompson (1968) και ο Bender (1971), βασιζόμενοι στην προβολική γεωμετρία μέσω ομογενών συντεταγμένων. Ο δεύτερος εξήγησε επίσης ότι, εάν επιλεγούν αυθαίρετα ο εσωτερικός και εξωτερικός προσανατολισμός της μιας εικόνας, η ανακατασκευή που θα προκύψει μέσω αυτού που ονόμασε “γενικευμένο σχετικό προσανατολισμό” των δύο εικόνων (δηλαδή, στην ουσία, του επιτολικού πίνακα) θα διαφέρει από την πραγματικότητα κατά έναν 3D προβολικό μετασχηματισμό. Οι 15 βαθμοί ελευθερίας του τελευταίου, αθροιζόμενοι με τους 7 του επιτολικού πίνακα, δίνουν τελικά τις 22 παραμέτρους δύο ανεξάρτητων Άμεσων Γραμμικών Μετασχηματισμών (DLT) που περιγράφουν πλήρως τις δύο εικόνες. Τις ιδιότητες του επιτολικού πίνακα έχουν επίσης εξετάσει ο Niini (1994 και 2000) και ο Brandstätter (1996).

#### **1.2.3 Αυτοβαθμονόμηση**

Παράλληλα με την μελέτη των ιδιοτήτων του επιτολικού πίνακα και της δυνατότητας που αυτός παρέχει για 3D προβολική ανακατασκευή, τα τελευταία χρόνια άρχισε να μελετάται συστηματικότερα η δυνατότητα βαθμονόμησης από απλές αντιστοιχίες σημείων σε εικόνες χωρίς καμία εξωτερική πληροφορία για τον απεικονιζόμενο χώρο. Ο Chang (1986), μάλι-

στα, είχε ήδη δείξει την δυνατότητα να υπολογίζονται στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού με ταυτόχρονη χρήση πολλών ανεξάρτητων ζευγών εικόνων από την ίδια μηχανή.

Οι Faugeras & Maybank (1990), ακολουθώντας την προσέγγιση του μαθηματικού Erwin Kruppa στην αναζήτηση της πολλαπλότητας των λύσεων του σχετικού προσανατολισμού, εξέφρασαν τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής μέσω της *εικόνας της απόλυτης κωνικής (image of the absolute conic)* και όρισαν τις εφαπτόμενες σε αυτήν επιπολικές ευθείες (οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο επιπολικά επίπεδα εφαπτόμενα στην απόλυτη κωνική). Οι ίδιοι σε κατοπινή εργασία τους (Maybank & Faugeras, 1992) διατύπωσαν, μέσω των ευθειών αυτών, δύο ανεξάρτητες δεσμεύσεις μεταξύ των στοιχείων του επιπολικού πίνακα και των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού, ορίζοντας έτσι την πρώτη θεωρία *αυτοβαθμονόμησης* που βασίζεται αποκλειστικά σε ομολογίες σημείων. Μέσω των “εξισώσεων Kruppa”, όπως ονομάστηκαν, και της δέσμευσης κοινού εσωτερικού προσανατολισμού σε  $\geq 3$  εικόνες είναι δυνατή η βαθμονόμηση της μηχανής. Οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές και η λύση τους στην οριακή περίπτωση των 3 εικόνων προκύπτει από την τομή δύο καμπυλών 6<sup>ου</sup> βαθμού. Για να υπολογίσουν τον εσωτερικό προσανατολισμό από περισσότερες εικόνες, οι Faugeras et al. (1992) χωρίζουν τις εξισώσεις Kruppa σε ομάδες των 5, τις οποίες επιλύουν ανεξάρτητα με αριθμητικές μεθόδους επίλυσης πολυωνύμων, και μετά αναζητούν τις κοινές πραγματικές λύσεις. Τις λύσεις αυτές τις βελτίωσαν οι Zeller & Faugeras (1996) με ενιαία συνόρθωση όλων των εξισώσεων με την μέθοδο Levenberg-Marquardt και οι Luong & Faugeras (1997) μέσω επαναληπτικών γενικευμένων φίλτρων Kalman (*iterative extended Kalman filter*). Οι τελευταίοι απέδειξαν επίσης ότι οι εξισώσεις Kruppa είναι ισοδύναμες προς τις αλγεβρικές δεσμεύσεις που πρέπει να ικανοποιεί ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας (Trivedi, 1988, Huang & Faugeras, 1989). Στις δεσμεύσεις αυτές στηρίζονται οι Mendonça & Cipolla (1999) για να διατυπώσουν μια απλούστερη μέθοδο αυτοβαθμονόμησης. Απλοποιημένες μορφές των εξισώσεων Kruppa διατύπωσαν επίσης, μέσω της ανάλυσης ιδιοζουσών τιμών (SVD), οι Hartley (1997b) και Lourakis & Deriche (2000). Στην λογική της μεθόδου της δέσμης, οι Mohr et al. (1993) επιλύουν ταυτόχρονα πολλές εικόνες χωρίς φωτοσταθερά και υπολογίζουν τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής λήψης. Στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία, ο Niini (1993 και 1994) εξέφρασε εναλλακτικές αλγεβρικές δεσμεύσεις μεταξύ του επιπολικού πίνακα και των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού, και μέσω αυτών εξέτασε την δυνατότητα βαθμονόμησης.

Ο Hartley (1993a) αναδιατύπωσε το πρόβλημα της βαθμονόμησης της μηχανής ως εκείνο της αναζήτησης ενός προβολικού μετασχηματισμού ο οποίος θα μετατρέψει την προβολική ανακατασκευή του χώρου σε ευκλείδεια. Αυτό το επιτυγχάνει αποκλειστικά με την δέσμευση ότι οι εικόνες έχουν κοινό εσωτερικό προσανατολισμό, αλλά η μέθοδός του απαιτεί πολύ ακριβή αρχική προσέγγιση της θέσης του επιπέδου του απείρου. Το πρόβλημα αυτό το αντιμετωπίζουν οι Hartley et al. (1999) αναπτύσσοντας αλγόριθμο που δοκιμάζει σε μικρό χρόνο πολλές διαφορετικές πιθανές θέσεις. Οι Heyden & Åström (1996) διατύπωσαν με απλούστερο τρόπο τις ευκλείδειες δεσμεύσεις στην προβολική ανακατασκευή σε περίπτωση σταθερού εσωτερικού προσανατολισμού. Για το ίδιο θέμα ο Triggs (1997) προτείνει ένα συνεκτικότερο μαθηματικό μοντέλο μέσω της “απόλυτης επιφάνειας 2<sup>ου</sup> βαθμού” (*absolute quadric*), η οποία ορίζεται από το σύνολο των επιπέδων που εφάπτονται στην απόλυτη κωνική και η απεικόνισή της στο επίπεδο της εικόνας εξαρτάται μόνο από

τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής. Για τον προσδιορισμό της προτείνεται γραμμικός αλγόριθμος μέσω της ανάλυσης SVD και μη γραμμική συνόρθωση (με την μέθοδο *sequential quadratic programming*). Τέλος, οι Bondyfalat & Bougnoux (1998) και Liebowitz & Zisserman (1999) εισήγαγαν στο μαθηματικό μοντέλο εξωτερικές γεωμετρικές δεσμεύσεις παράλληλα με την δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού.

Ταυτόχρονα, οι Heyden & Åström (1997) ασχολούνται με την περίπτωση μεταβλητού εσωτερικού προσανατολισμού και αποδεικνύουν ότι, σε περίπτωση απλών προοπτικών εικόνων (τετραγωνικές εικονοψηφίδες), αρκούν 4 εικόνες για ευκλείδεια ανακατασκευή του χώρου. Σε επόμενη εργασία τους (Heyden & Åström, 1999) αντιμετωπίζουν την γενική περίπτωση εικόνων και αποδεικνύουν ότι είναι δυνατή η ευκλείδεια ανακατασκευή με μοναδική a priori πληροφορία την σταθερότητα μιας οποιασδήποτε παραμέτρου του εσωτερικού προσανατολισμού. Οι Pollefeys et al. (1996) εκφράζουν τις ευκλείδειες δεσμεύσεις μέσω του “*modulus constraint*” (απέδειξαν ότι οι ιδιοτιμές ενός ενδιάμεσου πίνακα πρέπει να έχουν μοναδιαίο modulus) και αντιμετωπίζουν την ειδική περίπτωση μεταβλητής σταθεράς της μηχανής. Αργότερα, οι Pollefeys et al. (1999) και Pollefeys & van Gool (1999) διευρύνουν την προσέγγισή τους αυτή για την γενικότερη περίπτωση μεταβλητού εσωτερικού προσανατολισμού. Οι Chandraker et al. (2007) επιλύουν το “*modulus constraint*” μέσω της θεωρίας “διακλάδωσης και φραγμού” (*branch and bound theory*), η οποία εγγυάται τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης. Συγκριτική επισκόπηση των κυριότερων μεθόδων αυτοβαθμονόμησης που έχουν παρουσιαστεί μπορεί να βρει κανείς στον Fusiello (2000).

Ειδική περίπτωση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελούν οι εικόνες από κοινό σημείο λήψης. Ο Hartley (1997c) απέδειξε ότι – παρά την αδυναμία δημιουργίας 3D μοντέλων – είναι και τότε δυνατή η βαθμονόμηση της μηχανής χωρίς φωτοσταθερά και πρότεινε αλγόριθμο για την περίπτωση σταθερού εσωτερικού προσανατολισμού. Τον αλγόριθμο αυτό επέκτειναν αρχικά οι de Agapito et al. (1998), αντιμετωπίζοντας την περίπτωση εικόνων από το ίδιο σημείο αλλά με διαφορετικό εσωτερικό προσανατολισμό. Η λύση είναι μη γραμμική, όμως σε επόμενη εργασία (de Agapito et al., 1999) προτείνεται και γραμμική επίλυση. Οι Seo & Hong (1999) ασχολούνται με την περίπτωση όπου μοναδική άγνωστη παράμετρος είναι η σταθερά της μηχανής και μελετούν την επίδραση που έχει η θέση του πρωτεύοντος σημείου στην ακρίβεια προσδιορισμού της.

Ο Sturm (1997a, 1997b) εξετάζει τις κρίσιμες γεωμετρίες της αυτοβαθμονόμησης από ομολογίες σημείων και την δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού, τόσο στην γενική περίπτωση εικόνων όσο και σε ειδικές περιπτώσεις. Αργότερα (Sturm, 1999) αντιμετωπίζει την περίπτωση μεταβλητής σταθεράς της μηχανής και εντοπίζει μια γεωμετρία εικόνων που, ενώ εν γένει επιτρέπει την βαθμονόμηση, δεν επιλύεται μέσω των εξισώσεων Kruppa (Sturm, 2000). Κρίσιμες γεωμετρίες αναζητήσαν επίσης οι Kahl (1999) και Kahl et al. (2000), οι οποίοι τις εκφράζουν ως αλγεβρικά πολύπτυχα (*algebraic manifolds*), και οι Ma et al. (1999) που τις εκφράζουν ως υποομάδες ευκλείδειων ανακατασκευών.

#### 1.2.4 Μερική βαθμονόμηση από στερεοζεύγος εικόνων

Για πλήρη βαθμονόμηση μιας μηχανής από απλές ομολογίες σημείων απαιτούνται, στην γενική περίπτωση,  $\geq 3$  εικόνες. Εάν όμως θεωρηθεί γνωστή η θέση του πρωτεύοντος ση-



μείου, τότε είναι δυνατός ο υπολογισμός της τιμής της σταθεράς της μηχανής από δύο μόνο εικόνες, και μάλιστα ακόμα και όταν αυτή δεν είναι ίδια στις δύο εικόνες.

Πρώτος ο Hartley (1992) διατυπώνει έναν σύνθετο αλγόριθμο για τον υπολογισμό, από τον επιπολικό πίνακα, δύο διαφορετικών τιμών για την σταθερά της μηχανής, μιας για κάθε εικόνα του ζεύγους. Αντίστοιχα, οι Pan et al. (1995) καταλήγουν σε ένα πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τα τετράγωνα των τιμών αυτών. Σε επόμενη εργασία τους (Newsam et al., 1996), εκμεταλλευόμενοι ορισμένες αλγεβρικές ιδιότητες του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα, καταλήγουν σε γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς το τετράγωνο της σταθεράς της μηχανής για τις περιπτώσεις που αυτή είναι κοινή ή και διαφορετική στις δύο εικόνες. Εξετάζοντας την επιλυσιμότητα του συστήματος, εντοπίζουν δύο κρίσιμες γεωμετρίες που δεν επιτρέπουν να εξαχθούν δύο διαφορετικές τιμές για την σταθερά της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα (όταν οι οπτικοί άξονες των δύο εικόνων είναι συνεπίπεδοι και όταν ο οπτικός άξονας της μιας εικόνας και η βάση του ζεύγους ορίζουν επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα της άλλης εικόνας). Σε ισοδύναμη αλλά πυκνότερη εξίσωση καταλήγει ο Bougnoux (1998) για το πρόβλημα μεταβλητής σταθεράς της μηχανής, την οποία χρησιμοποιούν οι Ha & Kang (2005) για την εύρεση αρχικών τιμών σε πολυεικονική βαθμονόμηση. Στην ίδια λύση καταλήγουν οι Kanatani & Matsunaga (2000) με δέσμευση στον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα των Huang & Faugeras (1989), εκφράζοντας την σταθερά της μηχανής ως αλγεβρικό αναλλοίωτο, και οι Huang et al. (2004) μέσω της απόλυτης επιφάνειας 2<sup>ου</sup> βαθμού. Οι Sturm (2001) και Sturm et al. (2005) ασχολήθηκαν με την περίπτωση εικόνων με κοινή σταθερά μηχανής, διατυπώνοντας βάσει των εξισώσεων Kruppa τρεις διαφορετικές εξισώσεις (δύο γραμμικές και μια 2<sup>ου</sup> βαθμού). Μελέτησαν επίσης τις κρίσιμες γεωμετρίες, αποδεικνύοντας ότι η κοινή σταθερά μπορεί να υπολογιστεί ακόμα και όταν οι δύο άξονες λήψης είναι συνεπίπεδοι εφόσον δεν είναι παράλληλοι και το σημείο τομής τους δεν ισαπέχει από τα προβολικά κέντρα. Υποθέτοντας γνωστό πρωτεύον σημείο, οι Ueshiba & Tomita (2003) στρέφουν τις δύο εικόνες περί τους οπτικούς άξονες ώστε να ευθυγραμμιστούν οι δύο πόλοι στην οριζόντιο. Στην νέα διάταξη απλοποιείται ο επιπολικός πίνακας και είναι απλούστερος ο προσδιορισμός της σταθεράς της μηχανής.

Ακόμα, οι Hartley & Kaucic (2002) έδωσαν μια νέα γεωμετρική ερμηνεία για την δυνατότητα να υπολογίζονται από τον επιπολικό πίνακα δύο τιμές της σταθεράς της μηχανής, η οποία επιτρέπει την επαναδιατύπωση της σχέσης του Bougnoux (1998), την απλούστερη εξαγωγή των κρίσιμων γεωμετριών και την μελέτη της επίδρασης που έχουν εσφαλμένες υποθέσεις σχετικά με την θέση του πρωτεύοντος σημείου των εικόνων. Για να αντιμετωπιστεί η ευαισθησία όλων των αλγορίθμων στα σφάλματα της θέσης του πρωτεύοντος σημείου, οι Hartley & Silpa-Anan (2002) προτείνουν έναν νέο μη γραμμικό αλγόριθμο υπολογισμού του επιπολικού πίνακα που οδηγεί, σε επόμενο βήμα, σε βέλτιστο υπολογισμό της σταθεράς της μηχανής. Με τον ίδιο στόχο, οι Whitehead & Roth (2002 και 2004) χρησιμοποιούν την μέθοδο DHC (*dynamic hill climbing*), παραλλαγή των γενετικών αλγορίθμων, ενώ οι Kanatani et al. (2006) υπολογίζουν εκ νέου τον επιπολικό πίνακα από λιγότερα ομόλογα σημεία και ταυτόχρονα εντοπίζουν εάν οι οπτικοί άξονες των εικόνων είναι συνεπίπεδοι. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζουν μια κοινή τιμή για την σταθερά της μηχανής.

Την ταυτόχρονη εύρεση μιας κοινής σταθεράς της μηχανής και του σχετικού προσανατολισμού στην οριακή περίπτωση των 6 ομόλογων σημείων αντιμετώπισαν για πρώτη φορά

οι Stewénius et al. (2005) μέσω της θεωρίας των βάσεων Gröbner, διαπιστώνοντας την ύπαρξη 15 (μιγαδικών ή πραγματικών) λύσεων. Μια ευκολότερη λύση προτείνει ο Li (2006) καταλήγοντας σε πολυώνυμο  $15^{ου}$  βαθμού μέσω της μεθόδου της “κρυφής μεταβλητής” (*hidden variable*). Αξίζει επίσης να σημειωθεί η εργασία των Ronda & Valdés (2007), οι οποίοι μελετούν τις εξισώσεις Kruppa για την περίπτωση στερεοζεύγους εικόνων με σταθερό εσωτερικό προσανατολισμό και, στηριζόμενοι σε ένα θεώρημα προβολικής γεωμετρίας του Γάλλου μαθηματικού Poncelet, προτείνουν μια παραμετροποίηση όλων των πιθανών λύσεων της βαθμονόμησης.

Τέλος, οι Brooks et al. (1996) διατύπωσαν έναν αλγόριθμο μερικής βαθμονόμησης για την ειδική περίπτωση της διάταξης δύο μηχανών λήψης με συνεπίπεδους οπτικούς άξονες και δυνατότητα αλλαγής της γωνίας σύγκλισης. Αντίστοιχο σύστημα, όπου όμως οι μηχανές στρέφονται περί δύο άξονες και έχουν δυνατότητα μεταβλητής εστίασης, εξέτασαν οι Liu & Chuang (2002).

### 1.3 Αντικείμενο και πρωτοτυπία της διατριβής

Από τα προηγηθέντα καθίσταται σαφές πως οι έννοιες του επιπολικού πίνακα και της 2D επιπολικής γεωμετρίας επέτρεψαν να αντιμετωπιστεί η γεωμετρία του στερεοζεύγους εικόνων στην γενικότητά της, αναδεικνύοντας ταυτόχρονα την δυνατότητα για 3D προβολική ανακατασκευή και για μερική (ή πλήρη, στην περίπτωση περισσότερων εικόνων) βαθμονόμηση μηχανής από απλές ομολογίες σημείων σε επικαλυπτόμενες εικόνες χωρίς καμία *a priori* γεωμετρική πληροφορία για τα απεικονιζόμενα αντικείμενα. Ωστόσο:

- Η ερμηνεία της δυνατότητας αυτοβαθμονόμησης δίνεται είτε μέσω αμιγώς αλγεβρικών προσεγγίσεων είτε μέσω ιδιαίτερα δύσληπτων γεωμετρικών εννοιών (απόλυτη κωνική, απόλυτη επιφάνεια  $2^{ου}$  βαθμού). Παρά την αδιαμφισβήτητη μαθηματική κομψότητα που διακρίνει τις προσεγγίσεις αυτές, η ευκλείδεια γεωμετρική αντιμετώπιση και ερμηνεία του όλου προβλήματος παραμένει ένα σημαντικό ζητούμενο για την Φωτογραμμετρία.
- Η αναδιατύπωση ήδη γνωστών σχέσεων μέσω αμιγώς γεωμετρικών προσεγγίσεων ρίχνει πολύ συχνά φως σε πτυχές που παρέμεναν ασαφείς – όπως είναι, για παράδειγμα, η ευαισθησία που έχει ο υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής από επιπολικό πίνακα στην υποτιθέμενη θέση του πρωτεύοντος σημείου – και έτσι επιτρέπει, μεταξύ άλλων, ευκολότερη διερεύνηση κρίσιμων γεωμετριών (Hartley & Kaucic, 2002).
- Οι γραμμικοί αλγόριθμοι που στηρίζονται αποκλειστικά στην προβολική γεωμετρία παρουσιάζουν ορισμένα μειονεκτήματα απέναντι στις αντίστοιχες προοπτικές προσεγγίσεις. Όπως το επισημαίνει χαρακτηριστικά και ένας επιφανής ερευνητής από τον χώρο της Όρασης Υπολογιστών: *“τέτοιες μέθοδοι δεν μοντελοποιούν σωστά την φυσική διαδικασία σχηματισμού της εικόνας, με συνέπεια να απαιτούν περισσότερες ομολογίες σημείων και να είναι περισσότερο ευαίσθητες στα σφάλματα των μετρήσεων συγκρινόμενες με μεθόδους που στηρίζονται στην ‘αληθή’ προοπτική προβολή”* (Horn, 1999) .
- Η υιοθέτηση του επιπολικού πίνακα για να οριστεί το φωτογραμμετρικό πρόβλημα

του σχετικού προσανατολισμού<sup>6</sup> ενέχει άμεσο κίνδυνο παρανοήσεων, αφού μέσω αυτού δεν ορίζονται μονοσήμαντα όχι μόνο η σχετική θέση των οπτικών δεσμών στον χώρο αλλά ούτε καν οι ίδιες οι δέσμες.

Στόχος της παρούσας διατριβής είναι, έτσι, να συνδέσει τις δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της γεωμετρίας του στερεοζεύγους εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές:

- ως αναζήτησης, στον χώρο, των τριών σχετικών στροφών των εικόνων και του διανύσματος σχετικής μετάθεσης των κέντρων προβολής, και
- ως αναζήτησης, στο επίπεδο, των πόλων και της προβολικής σχέσης που συνδέει τις ομόλογες επιπολικές ευθείες.

Παράλληλα εξετάζεται η δυνατότητα για βαθμονόμηση μηχανής που παρέχει η γνώση ορισμένων μόνο παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού ή δεδομένων σχέσεων μεταξύ των παραμέτρων του. Υπ' αυτή την έννοια, η συνεισφορά της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας θεωρείται ότι είναι διττή.

- Από θεωρητική σκοπιά, επιχειρείται εδώ να περιγραφεί, με ευκλείδειους όρους, η απειρία ομόλογων 3D προοπτικών δεσμών που αντιστοιχούν σε δεδομένη 2D επιπολική γεωμετρία (επομένως και οι αντίστοιχοι γεωμετρικοί τύποι), και συνάμα να αναδιατυπωθούν αντίστοιχα οι δεσμεύσεις που επιβάλλονται στον εσωτερικό προσανατολισμό.
- Στο πεδίο των πιο άμεσα πρακτικών εφαρμογών, επιχειρείται εδώ να παραμετροποιηθεί με εναλλακτικό τρόπο το σύνολο των συνδυασμών σχετικού και εσωτερικού προσανατολισμού (συνεπώς και των αντίστοιχων προβολικών ανακατασκευών) που αντιστοιχούν στον επιπολικό πίνακα δύο εικόνων, ενώ παράλληλα διατυπώνονται και νέοι “κλειστοί” (*closed-form*) αλγόριθμοι μερικής βαθμονόμησης.

Τέλος, παράλληλο γενικότερο στόχο της εργασίας συνιστά η συνεισφορά στην προσπάθεια “γεφύρωσης” των επιστημονικών περιοχών της Φωτογραμμετρίας και της Όρασης Υπολογιστών, και υπ' αυτή την έννοια η παρούσα διδακτορική διατριβή μπορεί να θεωρηθεί ως “συνέχεια” εκείνης του Γραμματικόπουλου (2007), στην οποία εξετάστηκε σε αντίστοιχο πνεύμα η γεωμετρία της μεμονωμένης εικόνας.

Αναλυτικότερα, έπειτα από την εισαγωγή σε θέματα προβολικής γεωμετρίας και την συγκεντρωτική παρουσίαση συναφών και προαπαιτούμενων διατυπώσεων από την Όραση Υπολογιστών, διερευνάται η επιπολική γεωμετρία του στερεοζεύγους στον 3D ευκλείδειο χώρο. Εκκινώντας με δεδομένους τους πόλους και την προβολική σχέση των ομόλογων επιπολικών ευθειών (πληροφορία την οποία ενσωματώνει ο επιπολικός πίνακας), εξηγείται αρχικά πως περιστροφή των εικόνων περί την ευθεία τομής των επιπέδων τους δεν επηρεάζει την επιπολική τους γεωμετρία. Με εξέταση της κατάκλισης του επιπέδου της δεύτερης εικόνας στο επίπεδο της πρώτης περί την ευθεία τομής τους, αποδεικνύεται ότι στις διαφορετικές πιθανές διευθύνσεις της ευθείας τομής των εικόνων αντιστοιχεί κυκλικός γεωμετρικός τύπος (“επιπολικός κύκλος”) του δεύτερου πόλου και εξάγεται η σχέση υπολογισμού του από τον επιπολικό πίνακα. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι η ευθεία που συνδέει τους δύο πόλους τέμνει την ευθεία τομής των εικόνων επί κωνικής τομής, γεγονός που επιτρέπει την διατύπωση γραμμικής σχέσης μεταξύ των δύο ευθειών. Σε κάθε σημείο του

<sup>6</sup> Πράγμα που συμβαίνει, όπως προαναφέρθηκε, στην τελευταία έκδοση του *Manual of Photogrammetry* (McGlone, 2004), όπου ως σχετικός προσανατολισμός ορίζεται ένα πρόβλημα δύο μη βαθμονομημένων μηχανών που εμπλέκει 7 ανεξάρτητες παραμέτρους και η γνώση του επιτρέπει μόνο προβολική ανακατασκευή.

επιπολικού κύκλου αντιστοιχεί εκ νέου ένας κύκλος, κάθετος στην αντίστοιχη ευθεία τομής των εικόνων, ως ο γεωμετρικός τόπος του δεύτερου πόλου στον χώρο (περιγράφοντας, έτσι, όλες τις πιθανές διέδρες γωνίες των επιπέδων των εικόνων). Σε κάθε θέση ορίζεται μια ευθεία στον χώρο (που διέρχεται από τους δύο πόλους και ισοδυναμεί με την βάση του στερεοζεύγους), η προβολή της οποίας στα επίπεδα των εικόνων δίνει τον γεωμετρικό τόπο του πρωτεύοντος σημείου. Εξετάζεται ακόμα πώς περιορίζονται αυτοί οι γεωμετρικοί τόποι εάν είναι γνωστές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού. Επιπλέον, δείχνεται πώς γνώση των ευθειών που συνδέουν τους πόλους με τα αντίστοιχα πρωτεύοντα σημεία επιτρέπει να προσδιοριστεί η σχετική θέση των επιπέδων των δύο εικόνων και να οριστεί η βάση στο χώρο. Γνώση της θέσης του πρωτεύοντος σημείου των δύο εικόνων επιτρέπει, τέλος, προσδιορισμό του σχετικού τους προσανατολισμού ταυτόχρονα με τις τιμές της σταθεράς της μηχανής. Εξετάζονται, επίσης, οι σχετικές κρίσιμες γεωμετρικές.

Ακόμα, διατυπώνεται αναλυτικά και ανεξάρτητα για κάθε εικόνα η σχέση της διέδρης γωνίας δύο επιπολικών επιπέδων συναρτήσει των επιπολικών ευθειών που τα ορίζουν, της θέσης του πόλου και των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού. Από την ισότητα των δύο τιμών της διέδρης γωνίας προκύπτει μια εξίσωση δέσμευσης για τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού. Αντίστοιχη θεώρηση της γωνίας των επιπολικών επιπέδων δύο οπτικών αξόνων (στην περίπτωση μη συνεπιπεδότητας τους) επιτρέπει να εκφραστεί μια δεύτερη δέσμευση. Μέσω αυτών διατυπώνονται τέσσερις νέοι “κλειστοί” αλγόριθμοι υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής (μιας ή δύο διαφορετικών τιμών) μέσω του επιπολικού πίνακα όταν είναι γνωστή η θέση του πρωτεύοντος σημείου. Με βάση την εξίσωση της γωνίας των οπτικών αξόνων αναπτύσσεται επίσης μέθοδος υπολογισμού του πίνακα στροφής και του διανύσματος της βάσης των δύο εικόνων. Οι δύο νέες δεσμεύσεις εξηγούν στον 3D ευκλείδειο χώρο την δυνατότητα για μερική βαθμονόμηση μηχανής μέσω του επιπολικού πίνακα και, υπ’ αυτή την έννοια, μπορούν να θεωρηθούν ως το ευκλείδειο ισοδύναμο των εξισώσεων Krrpa. Υπέρ αυτού συνηγορούν και τα αποτελέσματα πειραματικών ελέγχων των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν.

## 1.4 Διάρθρωση της διατριβής

Στο παρόν **Κεφάλαιο 1** έγινε μια εισαγωγή μέσω της βιβλιογραφικής επισκόπησης στην έρευνα που διεξάγεται, κυρίως τα τελευταία χρόνια, στα επιστημονικά πεδία της Φωτογραμμετρίας και της Όρασης Υπολογιστών σχετικά με την γεωμετρία του στερεοζεύγους εικόνων. Ορίστηκε επίσης το αντικείμενο και οι στόχοι της παρούσας διδακτορικής διατριβής, καθώς και οι βασικές συνεισφορές της.

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζονται ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία προβολικής γεωμετρίας, τα οποία συγκροτούν ένα απαραίτητο υπόβαθρο για τα επόμενα κεφάλαια της διατριβής. Έπειτα από μια σύντομη ιστορική αναδρομή εισάγεται η έννοια της διάκρισης των διαφορετικών γεωμετριών μέσω της θεωρίας των αναλλοίωτων. Ακολουθεί η αναλυτική μαθηματική έκφραση θεμελιωδών γεωμετρικών στοιχείων του προβολικού χώρου καθώς και των γραμμικών μετασχηματισμών του, μέσω ομογενών συντεταγμένων, αρχικά στις  $n$  διαστάσεις και, όπου κρίνεται σκόπιμο, εξετάζονται οι περιπτώσεις της προβολικής ευθείας,

του προβολικού επιπέδου και του 3D προβολικού χώρου. Περιγράφεται, τέλος, το μαθηματικό μοντέλο της κεντρικής προβολής σημείων του χώρου στο επίπεδο.

Το **Κεφάλαιο 3** μελετά την επιπολική γεωμετρία στερεοζεύγους εικόνων παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα της σχετικής έρευνας στην Όραση Υπολογιστών. Αρχικά αντιμετωπίζεται η περίπτωση εικόνων γνωστής εσωτερικής γεωμετρίας και περιγράφεται η γραμμική έκφραση του σχετικού προσανατολισμού μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Ακολουθεί ο ορισμός της επιπολικής γεωμετρίας εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές, όπου εισάγεται το μαθηματικό μοντέλο του επιπολικού πίνακα και των ιδιοτήτων του, ενώ επιπλέον εξετάζονται διαφορετικές γεωμετρικές ερμηνείες του. Ακόμα, παρουσιάζονται γραμμικοί και μη γραμμικοί επαναληπτικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα από ομολογίες σημείων. Εξετάζεται επίσης η δυνατότητα προβολικής ανακατασκευής του χώρου. Εν συνεχεία, περιγράφεται η έννοια της “επάλληλης ανακατασκευής” μέσω γνωστών γεωμετρικών δεσμεύσεων για τον χώρο ή την μηχανή της λήψης. Έμφαση δίνεται στην τελευταία περίπτωση, η οποία επιτρέπει αυτοβαθμονόμηση της μηχανής λήψης από απλές ομολογίες σημείων σε  $\geq 3$  εικόνες ή μερική βαθμονόμησης της στην περίπτωση του στερεοζεύγους.

Στο **Κεφάλαιο 4** διατυπώνεται μια γεωμετρική ερμηνεία της 2D επιπολικής γεωμετρίας ζεύγους εικόνων άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού στον 3D ευκλείδειο χώρο. Διερευνώνται γεωμετρικά και διατυπώνονται αναλυτικά όλες οι διαφορετικές γεωμετρικές λήψης (συνδυασμοί σχετικού και εσωτερικού προσανατολισμού) που αντιστοιχούν στην ίδια 2D επιπολική γεωμετρία (κοινός επιπολικός πίνακας). Συνδέονται μαθηματικά οι διαφορετικές πιθανές διευθύνσεις της ευθείας τομής των επιπέδων των δύο εικόνων με τις πιθανές θέσεις των δύο πόλων στον χώρο και αποδεικνύεται η ύπαρξη συγκεκριμένων γεωμετρικών τόπων. Εξετάζονται επίσης οι δεσμεύσεις που προκύπτουν από μερική γνώση των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού και διατυπώνεται αλγόριθμος υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής στην περίπτωση γνωστού πρωτεύοντος σημείου. Μελετάται, τέλος, η περίπτωση κοινού αλλά άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού και δίδεται ευκλείδεια ερμηνεία της δυνατότητας για πλήρη βαθμονόμηση από  $\geq 3$  εικόνες.

Στο **Κεφάλαιο 5** διατυπώνονται διαφορετικά ευκλείδεια γεωμετρικές δεσμεύσεις μεταξύ του επιπολικού πίνακα και του εσωτερικού προσανατολισμού δύο εικόνων, οι οποίες οδηγούν εδώ στην διατύπωση “κλειστών” (closed-form) αλγορίθμων μερικής αυτοβαθμονόμησης από στερεοζεύγος. Εξετάζεται ο υπολογισμός κοινής ή διαφορετικής σταθεράς της μηχανής από εικόνες γνωστού πρωτεύοντος σημείου. Διατυπώνεται επίσης εναλλακτικός γεωμετρικός τρόπος υπολογισμού του πίνακα στροφής και της μετάθεσης εικόνων από τον επιπολικό πίνακα στην περίπτωση γνωστού εσωτερικού προσανατολισμού.

Το **Κεφάλαιο 6** περιλαμβάνει πειραματικές εφαρμογές των αλγορίθμων που περιγράφηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Χρησιμοποιούνται εδώ προσομοιωμένα δεδομένα λήψεων όσο και εικόνες από συλλογές δεδομένων (data sets) διαθέσιμων στο Διαδίκτυο, οι δε μετρήσεις ομολογων σημείων πραγματοποιούνται αυτόματα μέσω σύγχρονων τεχνικών συνταύτισης.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με το **Κεφάλαιο 7**, όπου συνοψίζονται τα συμπεράσματα που

προέκυψαν από τα προηγούμενα κεφάλαια και εξετάζονται οι μελλοντικές προοπτικές που προκύπτουν από την παρούσα έρευνα. Στο **Κεφάλαιο 8**, τέλος, τεκμηριώνονται οι επιστημονικές εργασίες που χρησιμοποιήθηκαν και αναφέρονται στο κείμενο της διατριβής.

# 2

## Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας

### 2.1 Γενικά

Είναι αλήθεια ότι η εξοικείωση με δυνατότητες αναμφισβήτητης πρακτικής χρησιμότητας όπως η μέτρηση γωνιών και αποστάσεων, που έχουν νόημα στην ευκλείδεια γεωμετρία, καθιστούν την τελευταία το εργαλείο μέσω του οποίου περιγράφεται αποτελεσματικότερα ο κόσμος της φυσικής εμπειρίας. Στην Φωτογραμμετρία, η χρήση βαθμονομημένων μηχανών επιτρέπει την μέτρηση γωνιών μέσω εικόνων και την διατύπωση των αναγκαίων μαθηματικών μοντέλων στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας. Ακόμα και έννοιες όπως εκκίνες του αφινικού ή του προβολικού μετασχηματισμού ορίζονται, συνήθως, ως μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν γραμμικές παραμορφώσεις σχημάτων στον δισδιάστατο ή τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Όμως τα τελευταία χρόνια η εκτεταμένη αντιμετώπιση φωτογραμμετρικών προβλημάτων από ερευνητές του επιστημονικού πεδίου της Όρασης Υπολογιστών απευθείας στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας έχει εισαγάγει μια διαφορετική οπτική. Η προβολική γεωμετρία γίνεται, έτσι, το βασικό θεωρητικό εργαλείο καθώς περιγράφει στην γενικότητά της την απεικόνιση του χώρου και μέσω κεντρικής προβολής (πχ. μέσω φωτογραφικής μηχανής), ενώ η αφινική και ευκλείδεια γεωμετρία αντιμετωπίζονται πλέον ως ειδικές περιπτώσεις της. Το γενικό πρόβλημα της 3D ανακατασκευής αντικειμένων από εικόνες – προερχόμενες ενδεχομένως από μη βαθμονομημένες μηχανές – αντιμετωπίζεται αρχικά στον προβολικό χώρο, ο οποίος μπορεί κατόπιν, μέσω γεωμετρικών δεσμεύσεων, να “αναβαθμιστεί” σε αφινικό ή ευκλείδειο. Ενδεικτική επ’ αυτού είναι η επισήμανση του Faugeras (1995): *“Συνήθως σκεπτόμαστε τον φυσικό χώρο ως ενταγμένο σε έναν 3D ευκλείδειο χώρο, όπου η μέτρηση αποστάσεων και γωνιών πράγματι έχει νόημα. Προκύπτει όμως ότι για τα τεχνητά συστήματα, όπως τα ρομπότ, η αντιμετώπιση αυτή δεν είναι υποχρεωτική και ότι ορισμένες φορές αρκεί να σκεφτόμαστε τον φυσικό χώρο ως ενταγμένο σε έναν αφινικό ή ακόμα και προβολικό χώρο”*.

Η συνοπτική παρουσίαση ορισμένων στοιχείων αναλυτικής προβολικής γεωμετρίας που

ακολουθεί κύριο στόχο έχει να λειτουργήσει ως υπόβαθρο για τα επόμενα κεφάλαια. Περισσότερα στοιχεία γενικής προβολικής γεωμετρίας μπορούν να αναζητηθούν στο εγχειρίδιο αναφοράς των Semple & Kneebone (1952), όσο και σε εκείνα των Μπρίκα (1964), Λαδόπουλου (1966, 1972) και Coxeter (1969). Εισαγωγικές έννοιες προβολικής γεωμετρίας με ειδική έμφαση στις εφαρμογές Όρασης Υπολογιστών έχουν παρουσιαστεί σε εργασίες των Kanatani (1991), Mohr & Triggs (1996), Birchfield (1998) και στα βιβλία των Hartley & Zisserman (2000) και Faugeras & Luong (2001). Στην Φωτογραμμετρική βιβλιογραφία, αναλυτική παρουσίαση στοιχείων προβολικής γεωμετρίας έχει περιληφθεί στην πρόσφατη 5<sup>η</sup> έκδοση του *Manual of Photogrammetry* (McGlone, 2004), ενώ ο Buchanan (1993) έχει κάνει μια ιστορική επισκόπηση της σχέσης Φωτογραμμετρίας και προβολικής γεωμετρίας. Τέλος, οι Heuel (2001) και Förstner (2001 και 2004) ασχολήθηκαν με την προσαρμογή της θεωρίας σφαλμάτων και εκτίμησης της ακρίβειας κατά τον προσδιορισμό γεωμετρικών οντοτήτων στο μη μετρικό πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας.

## 2.2 Συνοπτική ιστορική αναδρομή

Οι ρίζες της προβολικής γεωμετρίας μπορούν να αναζητηθούν στις προσπάθειες ορισμένων καλλιτεχνών της περιόδου της Αναγέννησης να συστηματοποιήσουν τις ιδιότητες της προοπτικής προκειμένου να αποδώσουν πιστά, στα αρχιτεκτονικά σχέδια και τους πίνακές τους, την αίσθηση των τριών διαστάσεων και του βάθους. Ανάμεσά τους ξεχωρίζει το έργο των Leon Battista Alberti (1404-1472), Piero della Francesca (1420-1492), Leonardo da Vinci (1452-1519) και Albrecht Dürer (1471-1528). Αξίζει, επίσης, να αναφερθεί ότι ο Μενέλαος, ήδη περί το 80 μ.Χ., είχε παρατηρήσει ότι ο διπλός λόγος – ιδιότητα καθοριστική στην προβολική γεωμετρία – παραμένει αναλλοίωτος κατά την προβολή σχημάτων (Μπρίκας, 1964). Στο πλαίσιο των μαθηματικών, η προβολική γεωμετρία αντιμετωπίστηκε και αναπτύχθηκε αρχικά ως τμήμα της κλασικής γεωμετρίας, και μέσω των μεθόδων αυτής αποδείχθηκαν τα πρώτα προβολικά θεωρήματα. Πρωτοποριακή θεωρείται εν προκειμένω η μελέτη του G. Desargues (1591-1661) ο οποίος, όπως αναφέρεται από τον Μπρίκα (1964), θεώρησε το επ' άπειρον σημείο της ευθείας ως πραγματικό και τις κωνικές τομές ως προοπτικές απεικονίσεις του κύκλου, και παράλληλα εισήγαγε την έννοια της ομολογίας των σχημάτων και της ενέλιξης. Σταθμό στην εξέλιξη της προβολικής γεωμετρίας αποτέλεσε επίσης το έργο του J.-V. Poncelet (1822), όπου εισάγονται οι έννοιες της επ' άπειρον ευθείας και του επ' άπειρον επιπέδου ως οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων φυγής του επιπέδου και του χώρου, αντίστοιχα, και ορίζεται η προβολικότητα ως αλυσίδα προοπτικοτήτων. Ακόμα, έχει επισημανθεί ότι καίρια συμβολή του Poncelet, πέραν της συστηματικής απόδειξης πληθώρας προβολικών θεωρημάτων, συνιστά και η διάκριση των ιδιοτήτων των σχημάτων σε μετρικές και γραφικές (Λαδόπουλος, 1966). Υπ' αυτό το πρίσμα, η προβολική γεωμετρία αντιμετωπίζεται ως η μελέτη των γραφικών, μη μετρικών, ιδιοτήτων των θεμελιωδών γεωμετρικών οντοτήτων (σημείο, ευθεία, επίπεδο) αλλά και σχηματισμών (ευθύγραμμη σημειοσειρά, επίπεδη δέσμη ακτίνων, αξονική δέσμη επιπέδων, κεντρική δέσμη ακτίνων και επιπέδων στον χώρο) που παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις πράξεις προβολών και τομών.



Αργότερα, η αμφισβήτηση του 5<sup>ου</sup> αιτήματος του Ευκλείδη<sup>1</sup> κατέστησε σαφές ότι με βάση εναλλακτικά συστήματα αξιωμάτων είναι δυνατό να διατυπωθούν συνεπείς μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Η προβολική γεωμετρία αναπτύσσεται σε αυτοτελή κλάδο, θεμελιώνεται αξιωματικά<sup>2</sup> και γίνεται αντιληπτό ότι η ευκλείδεια γεωμετρία αντιπροσωπεύει ειδική περίπτωση της προβολικής.

## 2.3 Γεωμετρία και ομάδες μετασχηματισμών

Ο Klein (1872), στην εργασία του που έμεινε γνωστή ως “προγράμματα του Erlangen” (*Erlanger Programme*), επιχειρώντας να ενοποιήσει τις διαφορετικές γεωμετρίες και να διερευνήσει τις μεταξύ τους σχέσεις, ορίζει γενικώς την γεωμετρία μέσω της θεωρίας ομάδων (*group theory*) ως την μελέτη των αναλλοίωτων (*invariants*) υπό συγκεκριμένες ομάδες μετασχηματισμών. Σύμφωνα με την αντιμετώπιση αυτή, η επιλογή μιας ομάδας μετασχηματισμών του επιπέδου ή του χώρου χρησιμοποιείται για τον ορισμό αντίστοιχων συστημάτων γεωμετρίας. Έτσι, η προβολική αποτελεί την γενικότερη γεωμετρία, που ενσωματώνει τις υπόλοιπες και μελετά τις αναλλοίωτες ιδιότητες των προβολικών μετασχηματισμών. Ανάμεσα σε αυτές τις αναλλοίωτες ιδιότητες, πιο σημαντικές είναι εκείνες της συγγραμμικότητας, της συνεπιπεδότητας, της επαφτομένης σε κωνική τομή, της σχέσης πόλου-πολικής και του διπλού λόγου. Οι κωνικές τομές αντιμετωπίζονται ενιαία στο επίπεδο, ενώ το ίδιο συμβαίνει για τις επιφάνειες 2<sup>ου</sup> βαθμού στον χώρο. Οι γεωμετρικές σχέσεις εκφράζονται αναλυτικά μέσω ομογενών συντεταγμένων, και η απαραίτητη άλγεβρα είναι (ή μπορεί εύκολα να καταλήξει να είναι) γραμμική. Η αφινική αντιπροσωπεύει μια μερικότερη γεωμετρία οριζόμενη από την υποομάδα των αφινικών (ομοπαράλληλων) μετασχηματισμών. Διέκ της βασικές αναλλοίωτες ιδιότητες είναι επιπλέον η παραλληλία και ο λόγος μηκών σε κάθε διεύθυνση. Τα θεμελιώδη ζητήματα της αφινικής γεωμετρίας μπορούν να αντιμετωπιστούν προβολικά με το “τέχνασμα” της εισαγωγής της ευθείας του απείρου στο επίπεδο ή του επιπέδου του απείρου στον τρισδιάστατο χώρο. Η ευκλείδεια γεωμετρία αντιπροσωπεύει επίσης υποπερίπτωση της προβολικής, οριζόμενη δια των ισομετρικών μετασχηματισμών ή μετασχηματισμών “στερεού σώματος” (στροφές και μεταθέσεις). Οι αναλλοίωτες που προστίθενται εδώ αφορούν τα μήκη και τις γωνίες. Τέλος, γεωμετρία ενδιάμεση της αφινικής και της ευκλείδειας συνιστά η μετρική γεωμετρία ή γεωμετρία ομοιότητας, οριζόμενη από την υποομάδα των μετασχηματισμών ομοιότητας (στροφές, μεταθέσεις και κλίμακα). Αντίστοιχα με την αφινική, η γεωμετρία ομοιότητας είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί προβολικά στο επίπεδο με την εισαγωγή των κυκλικών σημείων (*circular points*) και στον 3D χώρο μέσω της απόλυτης κωνικής τομής (*absolute conic*). Σε σχέση με την ευκλείδεια γεωμετρία βασική αναλλοίωτη ιδιότητα, αντί των μηκών, είναι εδώ ο λόγος τους.

## 2.4 Ο προβολικός χώρος

Παράλληλα με την κλασική συνθετική αντιμετώπιση των γεωμετρικών προβλημάτων, από

<sup>1</sup> Σύμφωνα με αυτό: “εξ ενός σημείου, εκτός ευθείας τινός κειμένου, δύναται να αχθή μία, και μόνον μία, παράλληλος προς ταύτην” (Μπρίκας, 1964).

<sup>2</sup> Το 5<sup>ο</sup> αξίωμα του Ευκλείδη αντικαθίσταται από το ακόλουθο αξίωμα: “Δύο συνεπίπεδες ευθείες έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο” (Coxeter, 1969).

την εποχή του Καρτέσιου (R. Descartes, 1596-1650) αναπτύσσεται η αναλυτική γεωμετρία. Οι γεωμετρικές οντότητες αναπαριστώνται από συντεταγμένες και εξισώσεις, και εν συνεχεία τα γεωμετρικά προβλήματα αντιμετωπίζονται αλγεβρικά.

### 2.4.1 Σημεία του ευκλείδειου χώρου

Κάθε σημείο στον ευκλείδειο χώρο  $n$  διαστάσεων περιγράφεται είτε από  $n$  συντεταγμένες ενός ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς μέσω ενός διανύσματος  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$  του  $\mathbb{R}^n$  είτε ως γραμμικός συνδυασμός  $n$  γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων  $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$  τα οποία ορίζουν μια βάση του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad (2.1)$$

Όταν τα διανύσματα βάσης είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους και έχουν μοναδιαίο μέτρο, η βάση που σχηματίζουν καλείται ορθοκανονική και οι δύο αναπαραστάσεις ταυτίζονται<sup>3</sup>.

### 2.4.2 Σημεία του προβολικού χώρου

Στον προβολικό χώρο  $P^n$  τα σημεία αναπαριστώνται μέσω  $(n+1)$  ομογενών συντεταγμένων. Έτσι, ένα σημείο του  $P^n$  ορίζεται στον διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^{n+1}$  ως  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_{n+1}]^T$  (αρκεί ένα τουλάχιστον στοιχείο να είναι μη μηδενικό). Η αντιστοιχία αυτή είναι μη αμφιμονοσήμαντη καθώς δύο διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x}'$  του  $\mathbb{R}^{n+1}$  αναπαριστούν το ίδιο σημείο του  $P^n$  αν υπάρχει  $\lambda \neq 0$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x} = [\lambda x_1 \dots \lambda x_{n+1}]^T$ . Υπ' αυτή την έννοια, το σύμβολο " $=$ " στις επόμενες γεωμετρικές σχέσεις και εξισώσεις, όταν αναφέρεται σε ομογενείς συντεταγμένες, έχει το νόημα ισότητας που συμπεριλαμβάνει πολλαπλασιασμό με σταθερά  $\lambda$ . Το ίδιο συμβαίνει και για όλες τις γεωμετρικές οντότητες που εκφράζονται με ομογενείς συντεταγμένες.

Ένα σημείο που στον ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$  ορίζεται από το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n]^T$  αναπαριστάται στον  $P^n$  από το ομογενές διάνυσμα  $\mathbf{x} = [\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n 1]^T$ . Αντίστροφα, σημείο με ομογενείς συντεταγμένες  $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}]^T$  αντιστοιχεί, σε μη ομογενείς συντεταγμένες, στο σημείο  $\tilde{\mathbf{x}} = [x_1/x_{n+1} x_2/x_{n+1} \dots x_n/x_{n+1}]^T$ . Είναι σαφές ότι μέσω αυτής της αντιστοίχισης δεν μπορούν να αποδοθούν σημεία του  $P^n$  με  $x_{n+1} = 0$ . Τα σημεία αυτά ονομάζονται ιδεατά σημεία, ή σημεία του απείρου, και αντιμετωπίζονται στην προβολική γεωμετρία όπως κάθε άλλο σημείο – κάτι που δεν συμβαίνει στην αφινική και την ευκλείδεια γεωμετρία (βλ. ενότητα 2.5.2).

Σε αντιστοιχία με τις διανυσματικές βάσεις του ευκλείδειου χώρου, τα σημεία  $\mathbf{x}$  του  $P^n$  είναι δυνατόν να οριστούν μέσω μιας προβολικής βάσης που αποτελείται από  $(n+2)$  διανύσματα  $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq n+2}$ , τα πρώτα  $(n+1)$  από τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbf{e}_i, \text{ όπου } \lambda_i \text{ είναι το } i\text{-οστό στοιχείο του } \mathbf{e}_{n+2} \quad (2.2)$$

<sup>3</sup> Περισσότερα για τις διανυσματικές βάσεις και τους γραμμικούς χώρους μπορεί να βρει κανείς στο εγχειρίδιο γραμμικής άλγεβρας του Δερμάνη (1998).

Τα διανύσματα  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ \dots \ 0]^T$ , ...,  $\mathbf{e}_{n+1} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ ,  $\mathbf{e}_{n+2} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ , όπου το τελευταίο αίρει την αβεβαιότητα κλίμακας, αντιπροσωπεύουν την κανονική προβολική βάση (*standard projective basis*), στην οποία αντιστοιχούν οι ομογενείς συντεταγμένες που περιγράφηκαν προηγουμένως, και μπορούν να θεωρηθούν ως τα σημεία φυγής των αξόνων ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

Αν τώρα εστιάσει κανείς σε προβολικούς χώρους συγκεκριμένων διαστάσεων, ένα σημείο της προβολικής ευθείας, δηλαδή του μονοδιάστατου προβολικού χώρου  $P^1$ , ορίζεται σε ομογενείς συντεταγμένες ως:

$$\mathbf{x} \in P^1 \Leftrightarrow \mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Αντίστοιχα, ένα σημείο του προβολικού επιπέδου ορίζεται ως:

$$\mathbf{x} \in P^2 \Leftrightarrow \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Τέλος, ένα σημείο του 3D προβολικού χώρου ορίζεται ως:

$$\mathbf{x} \in P^3 \Leftrightarrow \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Μέχρι στιγμής ο προβολικός χώρος έχει οριστεί αποκλειστικά μέσω σημείων με πραγματικές συντεταγμένες. Αργότερα, προκειμένου να διατυπωθούν ευκλείδειες ιδιότητες (όπως η καθετότητα και η δυνατότητα μέτρησης γωνιών) στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας, θα απαιτηθεί ο ορισμός σημείων με μιγαδικές συντεταγμένες.

### 2.4.3 Υπερεπίπεδα του προβολικού χώρου

Ένα διάνυσμα  $\mathbf{h} = [h_1 \ \dots \ h_{n+1}]^T$ , διάστασης  $(n+1)$ , ορίζει επίσης ένα υπερεπίπεδο (*hyperplane*) ως τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $\mathbf{x}$  που ικανοποιούν την σχέση:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{h} = 0 \quad (2.6)$$

Κάθε διάνυσμα  $\lambda \mathbf{h}$  (με  $\lambda \neq 0$ ) αναπαριστά το ίδιο υπερεπίπεδο του  $P^n$ , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένας προβολικός υποχώρος  $P^{n-1}$  διάστασης  $(n-1)$ . Η ομοιότητα της αναπαράστασης σημείων και υπερεπιπέδων στην προβολική γεωμετρία είναι συνέπεια μιας γενικής συμμετρίας μεταξύ των δύο. Η ιδιότητα αυτή του “δυσασμού” (*duality*) αναφέρεται για πρώτη φορά από τον Poncelet (1822), αλλά διατυπώθηκε σε πλήρη μορφή από τον J. Plücker (1801-1868) ως ο νόμος πλήρους συμμετρίας μεταξύ σημείων και επιπέδων στον 3D χώρο, μεταξύ σημείων και ευθειών στο επίπεδο και μεταξύ ευθειών και επιπέδων στην κεντρική δέσμη (Λαδόπουλος, 1966). Σε κάθε θεώρημα προβολικής γεωμετρίας αντιστοιχεί ένα “δυϊκό” (*dual*) θεώρημα εάν αντικατασταθούν αμοιβαία οι έννοιες σημείο και υπερεπίπεδο.

Παραδείγματα υπερεπιπέδων αποτελούν οι ευθείες στο προβολικό επίπεδο  $P^2$  και τα επίπεδα στον προβολικό 3D χώρο  $P^3$ .

#### 2.4.3.1 Ευθείες στο προβολικό επίπεδο

Κάθε ευθεία του  $P^2$  αναπαριστάται από διάνυσμα της μορφής:

$$\mathbf{l} = [a \ b \ c]^T \quad (2.7)$$

και, σύμφωνα με την Εξ. (2.6), σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  του προβολικού επιπέδου ανήκει σε αυτήν εάν:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad (2.8)$$

Επιπλέον, το σημείο τομής δύο ευθειών  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{l}'$  προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που τις αναπαριστούν:

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' \quad (2.9)$$

ενώ η ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x}'$  ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των ομογενών συντεταγμένων τους:

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}' \quad (2.10)$$

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  και  $\mathbf{x}' = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3]^T$  μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο ενός αντισυμμετρικού πίνακα (του πίνακα εξωτερικού γινομένου  $[\mathbf{x}]_{\times}$ ) με ένα διάνυσμα σύμφωνα με την σχέση:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x}' = [\mathbf{x}]_{\times} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

#### 2.4.3.2 Επίπεδα στον 3D προβολικό χώρο

Κατ' αντιστοιχία, κάθε επίπεδο του  $P^3$  αναπαριστάται από διάνυσμα:

$$\mathbf{\Pi} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]^T \quad (2.12)$$

και σημείο  $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  του προβολικού 3D χώρου ανήκει σε αυτό εφόσον ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{X} = 0 \Leftrightarrow \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 + \pi_4 x_4 = 0 \quad (2.13)$$

Τρία σημεία  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}'$  και  $\mathbf{X}''$  ορίζουν επίπεδο από την λύση του ομογενούς συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T \\ \mathbf{X}'^T \\ \mathbf{X}''^T \end{bmatrix} \mathbf{\Pi} = 0 \quad (2.14)$$

ενώ το σημείο τομής τριών επιπέδων  $\mathbf{\Pi}$ ,  $\mathbf{\Pi}'$  και  $\mathbf{\Pi}''$  ορίζεται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}^T \\ \mathbf{\Pi}'^T \\ \mathbf{\Pi}''^T \end{bmatrix} \mathbf{X} = 0 \quad (2.15)$$

#### 2.4.4 Επιφάνειες 2<sup>ου</sup> βαθμού του προβολικού χώρου

Μια ακόμα γεωμετρική οντότητα του  $P^n$  με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην προβολική γεωμετρία είναι η επιφάνεια 2<sup>ου</sup> βαθμού  $n$  διαστάσεων (*quadric*). Αυτή αναπαριστάται από ομογενή συμμετρικό πίνακα  $\mathbf{Q}$  διαστάσεων  $(n+1) \times (n+1)$ , και σημείο  $\mathbf{x}$  ανήκει σε αυτήν αν ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = 0 \quad (2.16)$$

Αντίστοιχα, η “δυϊκή” επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού (*dual quadric*)  $\mathbf{Q}^*$  ορίζεται από το σύνολο των υπερεπιπέδων  $\mathbf{h}$  που ικανοποιούν την σχέση:

$$\mathbf{h}^T \mathbf{Q}^* \mathbf{h} = 0 \quad (2.17)$$

Αν ο πίνακας  $\mathbf{Q}$  (ή  $\mathbf{Q}^*$ ) είναι αντιστρέψιμος τότε η επιφάνεια ονομάζεται κανονική, ενώ στην αντίθετη περίπτωση εκφυλισμένη (*degenerate*).

Παραδείγματα αποτελούν οι κωνικές τομές (κύκλος, έλλειψη, υπερβολή, παραβολή) στο προβολικό επίπεδο και οι επιφάνειες  $2^{\text{ου}}$  βαθμού (σφαίρα, ελλειψοειδές, παραβολοειδές, υπερβολοειδές κ.λπ.) στον τρισδιάστατο προβολικό χώρο.

#### 2.4.4.1 Κωνικές τομές στο προβολικό επίπεδο

Μία κωνική τομή  $\mathbf{C}$  ορίζεται στο  $P^2$  αλγεβρικά μέσω ενός συμμετρικού ομογενούς πίνακα διαστάσεων  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ο οποίος έχει 5 βαθμούς ελευθερίας, δεδομένου ότι μόνο οι λόγοι  $(a : b : c : d : e : f)$  των στοιχείων του έχουν σημασία. Γεωμετρικά, μια κωνική τομή μπορεί να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής δύο επιπέδων κεντρικών δεσμών ευθειών που βρίσκονται σε προβολική αντιστοιχία (βλ. ενότητα 2.5.1.1).

Σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  ανήκει στην κωνική τομή  $\mathbf{C}$  εφόσον ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0 \quad (2.19)$$

και 5 σημεία αρκούν για τον προσδιορισμό της κωνικής τομής. Παράλληλα με τον σημειογενή ορισμό, μια κωνική τομή μπορεί να οριστεί και από το σύνολο των ευθειών που εφάπτονται σε αυτή, και σύμφωνα με την Εξ. (2.17) ορίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{I}^T \mathbf{C}^* \mathbf{I} = 0 \quad (2.20)$$

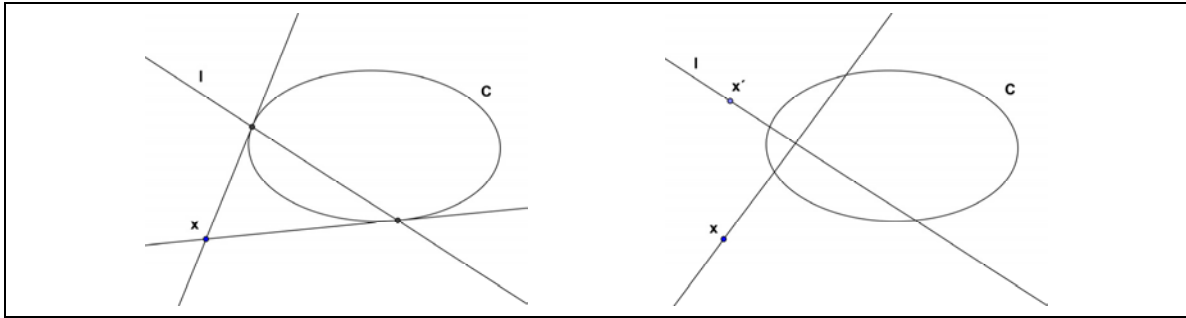
Η  $\mathbf{C}^*$  ονομάζεται “δυϊκή” ή ευθειογενής κωνική τομή, και στην περίπτωση που ο πίνακας  $\mathbf{C}$  είναι αντιστρέψιμος οι δύο αναπαραστάσεις μιας κωνικής τομής συνδέονται με την σχέση:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{-1} \quad (2.21)$$

Μέσω των κωνικών τομών είναι δυνατόν να οριστεί ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της πόλωσης. Η πόλωση αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικής κατηγορίας μετασχηματισμών, των *ετερογραφιών* (βλ. ενότητα 2.5.4), δια των οποίων αντιστοιχίζονται ετερόνυμα γεωμετρικά σχήματα, εν προκειμένω σημεία με ευθείες. Έτσι, σημείο  $\mathbf{x}$  του προβολικού επιπέδου και κωνική τομή  $\mathbf{C}$  ορίζουν ευθεία  $\mathbf{l}$  μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{l} = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (2.22)$$

Η ευθεία αυτή ονομάζεται πολική του σημείου  $\mathbf{x}$  ως προς την κωνική τομή  $\mathbf{C}$ , και αντίστοιχα το σημείο  $\mathbf{x}$  ονομάζεται πόλος της ευθείας  $\mathbf{l}$  ως προς την κωνική  $\mathbf{C}$ . Η σχέση πόλου-πολικής (*pole-polar*) αποτελεί γενίκευση της έννοιας της εφαπτομένης σε κωνική, και μέσω αυτής ορίζεται η καθετότητα στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας (βλ. ενότητα 2.5.3).



Σχήμα 2.1. Πόλωση (αριστερά) και συζυγή σημεία ως προς κωνική τομή (δεξιά).

Η πολική σημείου  $x$  τέμνει την κωνική τομή σε δύο σημεία. Οι εφαπτόμενες στην κωνική τομή στα σημεία αυτά διέρχονται από το σημείο  $x$  (Σχ. 2.1, αριστερά). Εάν σημείο  $x$  κείται επί της κωνικής τομής, τότε η πολική του ευθεία ταυτίζεται με την εφαπτομένη στην κωνική τομή στο σημείο αυτό. Εάν σημείο  $x'$  ανήκει στην πολική σημείου  $x$  ως προς κωνική τομή  $C$ , τότε και το  $x$  ανήκει στην πολική του  $x'$ , και τα δύο σημεία ονομάζονται συζυγή ως προς την κωνική τομή  $C$  (Σχ. 2.1, δεξιά). Έτσι, η πολική  $l$  σημείου  $x$  ως προς κωνική  $C$  είναι ο γεωμετρικός τόπος των συζυγών σημείων του  $x$ . Σύμφωνα με τις Εξ. (2.22) και (2.8), σημεία συζυγή ως προς κωνική ικανοποιούν την σχέση:

$$x'^T C x = 0 \quad (2.23)$$

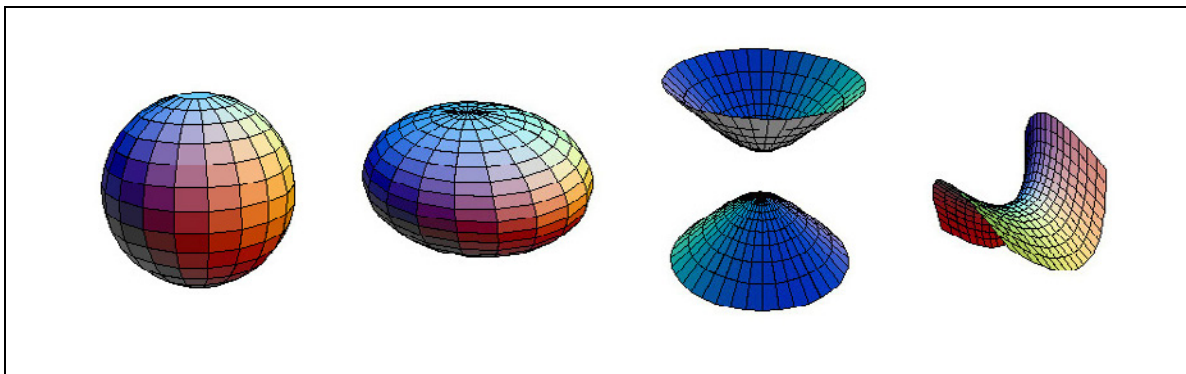
#### 2.4.4.2 Επιφάνειες $2^{ου}$ βαθμού στον 3D προβολικό χώρο

Η επιφάνεια  $2^{ου}$  βαθμού  $Q$  ορίζεται αλγεβρικά στον  $P^3$  μέσω συμμετρικού ομογενούς πίνακα διαστάσεων  $4 \times 4$ , έχει 9 βαθμούς ελευθερίας και αρκούν 9 σημεία για να οριστεί. Σημείο  $X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]^T$  ανήκει στην επιφάνεια  $Q$  εφόσον ικανοποιεί την εξίσωση:

$$X^T Q X = 0 \quad (2.24)$$

Αντίστοιχα, η “δυϊκή” ή επιπεδογενής επιφάνεια  $2^{ου}$  βαθμού  $Q^*$  ορίζεται από το σύνολο των επιπέδων  $\Pi$  που εφάπτονται σε αυτήν και ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\Pi^T Q^* \Pi = 0 \quad (2.25)$$



Σχήμα 2.2. Παραδείγματα επιφανειών  $2^{ου}$  βαθμού (από τον ιστότοπο: [mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com)).

Στην περίπτωση των επιφανειών  $2^{ου}$  βαθμού ο μετασχηματισμός της πόλωσης αντιστοιχίζει σημεία σε επίπεδα μέσω της σχέσης:

$$\Pi = QX \quad (2.26)$$

Το  $\Pi$  καλείται πολικό επίπεδο του σημείου  $X$  ως προς την επιφάνεια  $Q$ , το δε  $X$  πόλος του επιπέδου  $\Pi$ . Εάν η επιφάνεια  $Q$  είναι κανονική και το σημείο  $X$  βρίσκεται εκτός αυτής, τότε το πολικό επίπεδο  $\Pi$  ορίζεται γεωμετρικά από τα σημεία επαφής με την  $Q$  δέσμης ακτίνων που διέρχονται από το  $X$  και εφάπτονται στην επιφάνεια  $Q$ . Αν το  $X$  είναι σημείο της επιφάνειας  $Q$ , τότε η Εξ. (2.26) ορίζει επίπεδο  $\Pi$  εφαπτόμενο στην επιφάνεια  $Q$ .

## 2.5 Γραμμικοί μετασχηματισμοί του προβολικού χώρου

Ο γραμμικός γεωμετρικός μετασχηματισμός<sup>4</sup> είναι θεμελιώδης έννοια της γεωμετρίας καθώς, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.3, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για να οριστούν κατά ενιαίο τρόπο διαφορετικά συστήματα γεωμετρίας. Η γενικότερη ομάδα μετασχηματισμών που θα εξεταστούν είναι εκείνη των προβολικών και έπονται, ως ειδικότερες περιπτώσεις, οι υποομάδες των αφινικών μετασχηματισμών και των μετασχηματισμών ομοιότητας. Τέλος, εξετάζονται οι ετερογραφίες, ειδική περίπτωση των οποίων αντιπροσωπεύει το μαθηματικό μοντέλο του επιτολικού πίνακα.

### 2.5.1 Προβολικοί μετασχηματισμοί

Κάθε αντιστρέψιμος γραμμικός (σε ομογενείς συντεταγμένες) μετασχηματισμός του  $P^n$  μεταξύ ομώνυμων γεωμετρικών στοιχείων (σημείων, ευθειών κ.λπ.) καλείται *ομογραφία* (*homography*). Στην βιβλιογραφία, ως όροι συνώνυμοι της ομογραφίας συναντώνται ακόμα η προβολικότητα (*projectivity*), ο συγγραμμισμός (*collineation*) και ο προβολικός μετασχηματισμός. Οι ομογραφίες συγκροτούν ομάδα μετασχηματισμών, πράγμα που σημαίνει ότι η αντιστροφή ομογραφίας καθώς και ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων ομογραφιών συνιστούν επίσης ομογραφία. Σημαντική ιδιότητα του προβολικού μετασχηματισμού είναι η απεικόνιση των υπερεπιπέδων σε υπερεπίπεδα. Επιπλέον, υπάρχει μόνο μια ομογραφία που μετασχηματίζει μια δεδομένη προβολική βάση σε άλλη δεδομένη βάση, και υπ' αυτή την έννοια η ομογραφία μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματισμός μεταξύ διαφορετικών συστημάτων προβολικών συντεταγμένων. Αλγεβρικά, ο προβολικός μετασχηματισμός του  $P^n$  περιγράφεται από αντιστρέψιμο πίνακα  $H$  διαστάσεων  $(n+1) \times (n+1)$ , ο οποίος μπορεί να γραφεί μέσω υποπινάκων ως:

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(n \times n)} & \mathbf{b}_{(n)} \\ \mathbf{v}_{(n)}^T & c \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

(αυτή η ανάλυση του  $H$  σε υποπίνακες θα αξιοποιηθεί στην συνέχεια για να οριστούν οι ειδικές περιπτώσεις των αφινικών και των μετασχηματισμών ομοιότητας). Κάθε πίνακας  $\lambda H$  με  $\lambda \neq 0$  αντιπροσωπεύει τον ίδιο προβολικό μετασχηματισμό του  $P^n$ .

Σημείο  $x$  του  $P^n$  μετασχηματίζεται στο  $x'$  σύμφωνα με την εξίσωση:

$$x' = Hx \quad (2.28)$$

<sup>4</sup> Για μια συγκεντρωτική παρουσίαση των διαφορετικών γραμμικών γεωμετρικών μετασχηματισμών και των ιδιοτήτων τους στο πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας βλ. Καρράς (1998).

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίδεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}' \quad (2.29)$$

Αντίστοιχα, υπερεπίπεδο  $\mathbf{h}$  απεικονίζεται στο υπερεπίπεδο  $\mathbf{h}'$ :

$$\mathbf{h}' = \mathbf{H}^T \mathbf{h} \quad (2.30)$$

επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\mathbf{Q}$  στην επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\mathbf{Q}'$ :

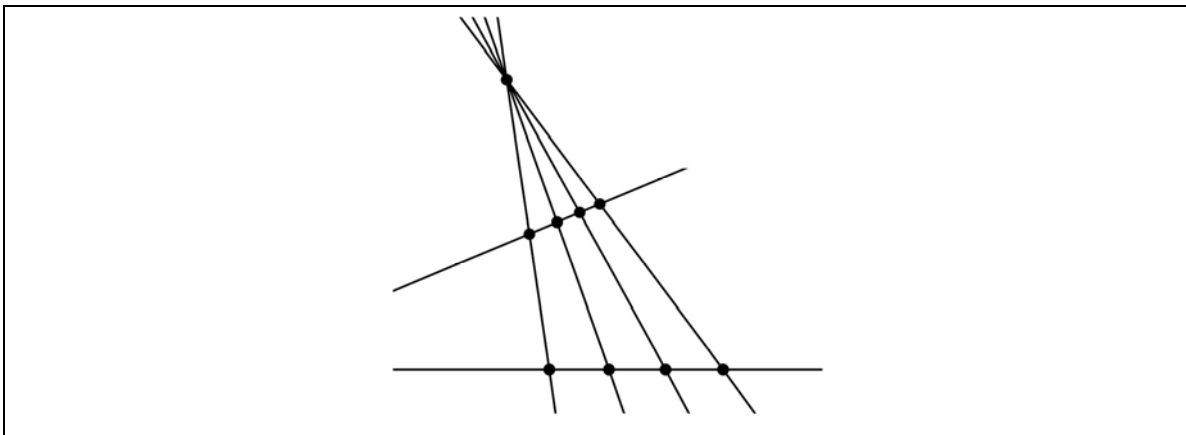
$$\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{H}^{-1} \quad (2.31)$$

και, τέλος, “δυϊκή” επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\mathbf{Q}^*$  στην “δυϊκή” επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\mathbf{Q}^{*'}:$

$$\mathbf{Q}^{*'} = \mathbf{H} \mathbf{Q}^* \mathbf{H}^T \quad (2.32)$$

### 2.5.1.1 Προβολικοί μετασχηματισμοί στον μονοδιάστατο προβολικό χώρο

Η ομογραφία του  $P^1$  ορίζεται μέσω ομογενούς αντιστρέψιμου πίνακα  $\mathbf{H}$  διαστάσεων  $2 \times 2$ , ενώ σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$  μετασχηματίζεται στο  $\mathbf{x}' = [x_1' \ x_2']^T$  βάσει της Εξ. (2.28). Ο  $\mathbf{H}$  έχει 3 βαθμούς ελευθερίας, και απαιτούνται 3 κατ' ελάχιστον αντιστοιχίες σημείων για τον προσδιορισμό του.



Σχήμα 2.3. Προβολικός μετασχηματισμός στον  $P^1$ .

Βασική αναλλοίωτη ιδιότητα της ομογραφίας είναι ο διπλός λόγος (ο λόγος των λόγων) των αποστάσεων τεσσάρων συνευθειακών σημείων<sup>5</sup>. Εάν  $A, B, C$  και  $D$  τέσσερα σημεία επ' ευθείας (τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως σημεία του  $P^1$ ), ο διπλός λόγος τους ορίζεται ως:

$$\text{Cr}\{A, B, C, D\} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} : \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DB}|} \quad (2.33)$$

και παραμένει σταθερός μετά από προβολικό μετασχηματισμό τους. Η σειρά με την οποία επιλέγονται τα σημεία για τον υπολογισμό του διπλού λόγου έχει σημασία, αλλά από τους 24 πιθανούς συνδυασμούς προκύπτουν μόνον 6 διαφορετικές τιμές, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων:

<sup>5</sup> Η διατήρηση του διπλού λόγου είναι ιδιότητα κάθε ομογραφίας και όχι μόνο εκείνων του  $P^1$ .

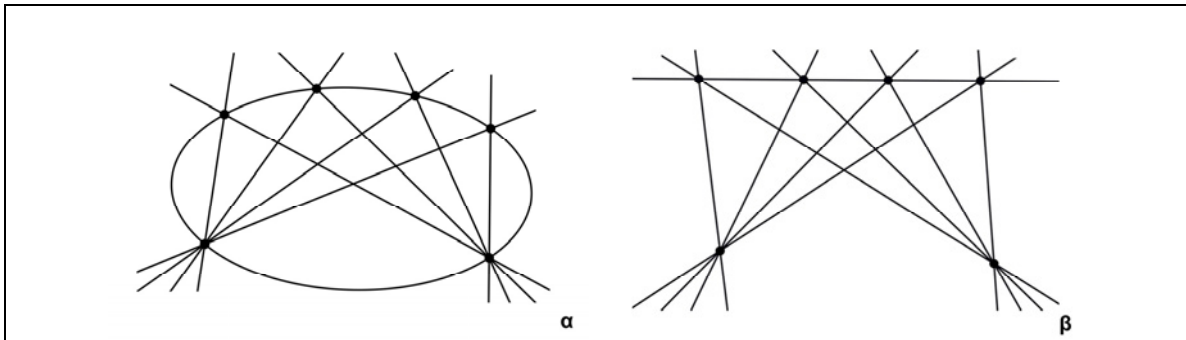


$$\left( c, \frac{1}{c}, 1-c, \frac{1}{1-c}, \frac{c-1}{c}, \frac{c}{c-1} \right) \quad (2.34)$$

Τα σημεία του απείρου αντιμετωπίζονται μέσω των συμβάσεων:

$$\frac{\infty}{\infty} = 1, \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\infty}{\alpha} = \infty \quad \text{όπου} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Μέχρι στιγμής, ο μονοδιάστατος προβολικός χώρος  $P^1$  έχει οριστεί ως το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν μια ευθεία. Εξαιτίας της προβολικής ιδιότητας του “δυσασμού”, ο  $P^1$  είναι δυνατόν να οριστεί επίσης ως μια επίπεδη δέσμη ακτίνων (δηλαδή ως το σύνολο των ευθειών επιπέδου που διέρχονται από σημείο). Σε αυτή την περίπτωση, οι ομογενείς συντεταγμένες εκφράζουν την κλίση των ευθειών της δέσμης, και ο διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών ορίζεται από τον διπλό λόγο των σημείων τομής τους με τυχαία ευθεία μη διερχόμενη δια του κέντρου της δέσμης. Κατά τον Ελβετό μαθηματικό J. Steiner (1796-1863), οι ομόλογες ευθείες δύο επίπεδων προβολικών δεσμών – δηλαδή δεσμών συνδεόμενων μέσω ομογραφίας – τέμνονται επί κωνικής, η οποία περιέχει και τα κέντρα των δύο δεσμών (Σχ. 2.4α). Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται μάλιστα από τον Steiner προκειμένου να οριστεί γεωμετρικά η κωνική τομή ως ο γεωμετρικός τόπος των τομών δύο επίπεδων προβολικών δεσμών ακτίνων. Ειδική περίπτωση αντιπροσωπεύουν οι δέσμες που βρίσκονται σε προοπτική θέση, οπότε τα σημεία τομής των ομόλογων ακτίνων κείνται επ’ ευθείας (Σχ. 2.4β). Δύο προοπτικές δέσμες είναι ταυτόχρονα και προβολικές, ωστόσο δύο προβολικές δέσμες δεν είναι κατ’ ανάγκην προοπτικές. Οι έννοιες της *προοπτικότητας* και της *προβολικότητας* μεταξύ επίπεδων δεσμών ευθειών αποτελούν κεντρικό στοιχείο της παρούσας διατριβής, δεδομένου πως οι δέσμες των επιπολικών ευθειών δύο επικαλυπτόμενων εικόνων είναι δυνατόν να προσεγγιστούν και με τις δύο έννοιες. Όπως θα δειχτεί στο Κεφάλαιο 4, εάν γίνουν δεκτές οι έννοιες της στροφής και της μετάθεσης – οι οποίες έχουν νόημα στην ευκλείδεια γεωμετρία – δύο προβολικών δεσμών, τότε αυτές μπορούν πάντοτε να έρθουν σε προοπτική θέση.



Σχήμα 2.4. Προβολικές (α) και προοπτικές (β) δέσμες ακτίνων.

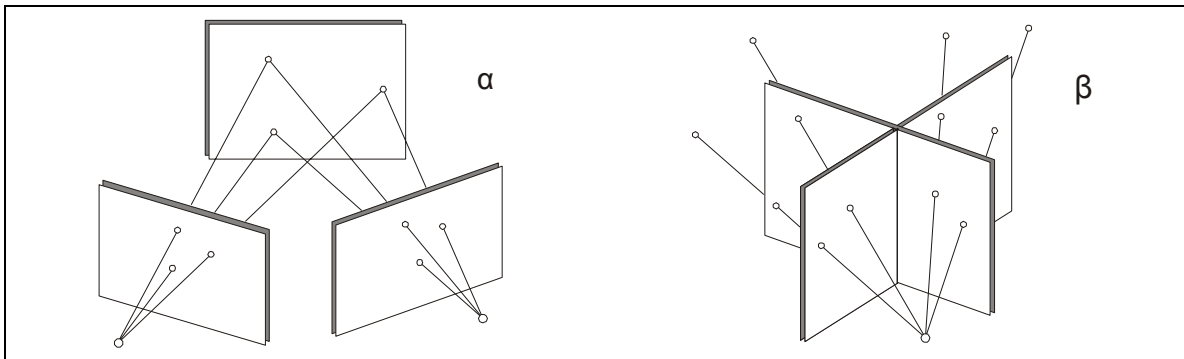
### 2.5.1.2 Προβολικοί μετασχηματισμοί στο προβολικό επίπεδο

Στο επίπεδο, ο προβολικός μετασχηματισμός έχει 8 βαθμούς ελευθερίας και ορίζεται από ομογενή αντιστρέψιμο πίνακα  $\mathbf{H}$  διαστάσεων  $3 \times 3$ . Σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  μετασχηματίζεται στο  $\mathbf{x}' = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3]^T$  σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_{(3 \times 3)} \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

και απαιτούνται 4 αντιστοιχίες σημείων για να προσδιοριστεί ο πίνακας  $\mathbf{H}$ . Η ευθεία μετασχηματίζεται σε ευθεία, ενώ σημεία τομής ευθειών παραμένουν τομές των μετασχηματισμένων ευθειών. Αναλλοίωτα διατηρούνται επίσης ο διπλός λόγος και η σχέση πόλου-πολικής. Τέλος, η κωνική τομή παραμένει κωνική τομή, δίχως όμως κατ' ανάγκην να διατηρεί το είδος της (πχ. η έλλειψη μπορεί να μετασχηματιστεί σε υπερβολή ή παραβολή κ.ο.κ.), και υπ' αυτή την έννοια η διάκριση των κωνικών τομών δεν έχει νόημα στην προβολική γεωμετρία.

Η ομογραφία αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την κεντρική προβολή επιπέδου του χώρου. Σε αυτήν στηρίζεται η διαδικασία της φωτογραμμετρικής αναγωγής, μέσω της οποίας αίρονται οι προοπτικές παραμορφώσεις και αποκαθίστανται οι μετρικές ιδιότητες εικόνας επίπεδου αντικειμένου. Επίσης, μέσω ομογραφίας συνδέονται τα εικονοσημεία εικόνων του ίδιου 2D αντικειμένου (Σχ. 2.5α) ή εκείνα εικόνων που απεικονίζουν 3D αντικείμενο από κοινό σημείο λήψης (Σχ. 2.5β). Χάρη σε αυτή την τελευταία ιδιότητα, λήψεις που διαφέρουν μόνο κατά στροφή (Σχ. 2.5β) θεωρούνται προβολικά ισοδύναμες, δηλαδή – εάν αγνοηθούν ζητήματα όπως η επίδραση του βάθους πεδίου – η μια απεικόνιση μπορεί να προκύψει από την άλλη χωρίς καμία γνώση του απεικονιζόμενου 3D αντικειμένου. Στην ιδιότητα αυτή στηρίζεται, άλλωστε, η δημιουργία πανοραμικών εικόνων (Mann & Picard, 1994, Szeliski, 1996, Shum & Szeliski, 1998, Petsa et al., 2001), όπως βέβαια και η διαδικασία της επιτολικής επανασύστασης (δημιουργία επιτολικών εικόνων).



Σχήμα 2.5. Σχέσεις 2D προβολικού μετασχηματισμού στην Φωτογραμμετρία: μεταξύ εικόνων επίπεδου αντικειμένου (α) και μεταξύ εικόνων από κοινό σημείο λήψης (β).

### 2.5.1.3 Προβολικοί μετασχηματισμοί στον 3D προβολικό χώρο

Κατ' αναλογία με τις ομογραφίες της ευθείας και του επιπέδου, η ομογραφία του 3D προβολικού χώρου εκφράζεται από αντιστρέψιμο ομογενή πίνακα  $\mathbf{H}$  διαστάσεων  $4 \times 4$  και έχει 15 βαθμούς ελευθερίας. Για τον προσδιορισμό της απαιτούνται αντιστοιχίες 5 σημείων, η δε Εξ. (2.28) παίρνει πλέον την μορφή:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H}_{(4 \times 4)} \mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Σε αντίθεση προς τις κωνικές τομές στο επίπεδο, οι επιφάνειες  $2^{\text{ου}}$  βαθμού δεν είναι όλες προβολικά ισοδύναμες. Διακρίνονται σε οικογένειες, και κάθε δεδομένη επιφάνεια είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί μόνο σε επιφάνεια της ίδιας οικογένειας. Λεπτομερή ιεράρχηση

των οικογενειών επιφανειών  $2^{ou}$  βαθμού βρίσκει κανείς στους Hartley & Zisserman (2000).

Ας επισημανθεί εδώ, τέλος, πως ο 3D προβολικός μετασχηματισμός είναι το μαθηματικό μοντέλο το οποίο συνδέει τις διαφορετικές 3D ανακατασκευές που είναι δυνατόν να προκύψουν από τον επιτολικό πίνακα ζεύγους εικόνων άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού (βλ. ενότητα 3.3).

### 2.5.2 Αφινικοί μετασχηματισμοί

Οι αφινικοί μετασχηματισμοί συγκροτούν υποομάδα των προβολικών μετασχηματισμών. Ορίζονται από την ιδιότητά τους να διατηρούν αναλλοίωτο ένα συγκεκριμένο υπερεπίπεδο του  $P^n$ , το υπερεπίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$ , το οποίο στην κανονική προβολική βάση εκφράζεται από το διάνυσμα:

$$\Pi_\infty = [0, \dots, 0, 1]^T \quad (2.38)$$

Από την Εξ. (2.6) προκύπτει ότι σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_{n+1}]^T$  ανήκει στο  $\Pi_\infty$  εάν  $x_{n+1} = 0$ . Έτσι, το υπερεπίπεδο του απείρου αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των ιδεατών σημείων (βλ. ενότητα 2.3). Κατ' αναλογία με την Εξ. (2.27), οι αφινικοί μετασχηματισμοί έχουν την μορφή:

$$\mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(n \times n)} & \mathbf{b}_{(n)} \\ \mathbf{0}_{(n)}^T & c \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Ισχύει επίσης ότι η τομή υπερεπιπέδου  $\mathbf{h}$  με το  $\Pi_\infty$  ορίζει την διεύθυνση του πρώτου. Κατά συνέπεια, δύο υπερεπίπεδα του  $P^n$  είναι παράλληλα εφόσον η τομή τους ανήκει στο υπερεπίπεδο του απείρου. Υπ' αυτή την έννοια, με το "τέχνασμα" της διάκρισης ενός συγκεκριμένου υπερεπιπέδου του προβολικού χώρου είναι δυνατόν να οριστούν αφινικές ιδιότητες όπως η παραλληλία, και ορίζεται έτσι, έμμεσα, ο αντίστοιχος αφινικός χώρος. Ο προβολικός μετασχηματισμός κατ' αρχήν μεταβάλλει την θέση του υπερεπιπέδου του απείρου. Αν όμως εντοπιστεί η νέα θέση του στον προβολικό χώρο, τότε μπορεί να βρεθεί προβολικός μετασχηματισμός που το επαναφέρει στην "αληθή" του θέση. Έτσι, αν θεωρηθεί ότι ένα υπερεπίπεδο  $\mathbf{h} = [h_1 \dots h_{n+1}]^T$  είναι η απεικόνιση του  $\Pi_\infty$ , τότε ένας προβολικός μετασχηματισμός που το επαναφέρει στην θέση  $\Pi_\infty = [0, \dots, 0, 1]^T$  είναι ο εξής:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

όπου  $\mathbf{H}_A$  οποιοσδήποτε αφινικός μετασχηματισμός.

#### 2.5.2.1 Αφινικοί μετασχηματισμοί στο προβολικό επίπεδο

Στην περίπτωση του προβολικού επιπέδου, ένας γραμμικός μετασχηματισμός ονομάζεται αφινικός ή ομοπαράλληλος εάν, και μόνο εάν, δεν μεταβάλλει την θέση της ευθείας του απείρου<sup>6</sup>  $\mathbf{l}_\infty = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Βάσει της Εξ. (2.9), σημείο τομής ευθείας  $\mathbf{l} = [a \ b \ c]^T$  με την  $\mathbf{l}_\infty$  είναι το  $\mathbf{x} = [b \ -a \ 0]^T$ . Το σημείο αυτό καλείται σημείο φυγής της ευθείας  $\mathbf{l}$ , και ο λόγος των μη μηδενικών συντεταγμένων του εκφράζει την κλίση της ευθείας. Κάθε ευθεία παράλληλη στην

<sup>6</sup> Αναλλοίωτη παραμένει η ευθεία του απείρου ως οντότητα και όχι τα επιμέρους σημεία που την απαρτίζουν.

Ι τέμνει την ευθεία του απείρου στο ίδιο σημείο φυγής, και αντίστροφα δύο ευθείες είναι παράλληλες εφόσον τέμνονται επί της  $I_\infty$ . Η  $I_\infty$  αποτελεί, έτσι, τον γεωμετρικό τόπο των σημείων φυγής όλων των διευθύνσεων που ορίζονται από τις ευθείες του επιπέδου.

Ο αφινικός μετασχηματισμός του επιπέδου έχει την μορφή:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_{A(3 \times 3)} \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, αρκούν δε 3 αντιστοιχίες σημείων για να προσδιοριστούν οι 6 ανεξάρτητες παράμετροί του. Οι τελευταίες είναι δυνατό να ερμηνευθούν γεωμετρικά ως δύο μεταθέσεις, μια στροφή, μια γωνία μεταξύ των αξόνων του συστήματος αναφοράς και δύο μεταβολές κλίμακας κατά την διεύθυνση των δύο αξόνων. Επίσης, οι δύο βαθμοί ελευθερίας κατά τους οποίους ο αφινικός μετασχηματισμός υπολείπεται της ομογραφίας του επιπέδου μπορούν να θεωρηθούν ως οι δύο βαθμοί που απαιτούνται για να οριστεί η ευθεία του απείρου. Πέραν της ευθείας του απείρου και συνεπώς της έννοιας της παραλληλίας, ο αφινικός μετασχηματισμός του επιπέδου διατηρεί αναλλοίωτους τους λόγους μηκών σε παράλληλες διευθύνσεις και τους λόγους εμβαδών.

Στην Φωτογραμμετρία, η συνηθέστερη εφαρμογή αφινικού μετασχηματισμού αφορά την μετατροπή μετρήσεων από το σύστημα ψηφιοποιημένων αναλογικών εικόνων στο τυπικό φωτογραμμετρικό σύστημα των εικονοσυντεταγμένων. Δυνατές είναι όμως και άλλες χρήσεις του. Για παράδειγμα, στον αφινικό μετασχηματισμό – αλλά και σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό ενδιάμεσο του προβολικού και του αφινικού, ο οποίος αποκαθιστά την παραλληλία σε μια μόνο διεύθυνση – στηρίχτηκε η επανασύσταση ψηφιακών εικόνων από λήψεις βίντεο που πραγματοποίησαν οι Grammatikopoulos et al. (2002 και 2005) με στόχο την αυτόματη μέτρηση της ταχύτητας κινούμενων οχημάτων.

### 2.5.2.2 Αφινικοί μετασχηματισμοί στον 3D προβολικό χώρο

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός του 3D προβολικού χώρου είναι αφινικός εάν, και μόνο εάν, διατηρεί αναλλοίωτο το επίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Ο 3D αφινικός μετασχηματισμός υπολείπεται της ομογραφίας κατά 3 βαθμούς ελευθερίας (τους 3 βαθμούς, δηλαδή, που απαιτούνται για να οριστεί το επίπεδο του απείρου), και για τον προσδιορισμό του αρκούν 4 κατ' ελάχιστον ομολογίες σημείων. Σε ομογενείς συντεταγμένες εκφράζεται ως:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_{A(4 \times 4)} \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Βασική αναλλοίωτη του αφινικού μετασχηματισμού είναι η παραλληλία. Δύο επίπεδα του 3D χώρου είναι παράλληλα εάν, και μόνο εάν, η ευθεία τομής τους ανήκει στο  $\Pi_\infty$ , και αντίστοιχα ένα επίπεδο και μια ευθεία είναι παράλληλα εάν, και μόνο εάν, το σημείο τομής τους ανήκει στο  $\Pi_\infty$ . Πέραν της παραλληλίας, ο 3D αφινικός μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτο τον λόγο των όγκων.

### 2.5.3 Μετασχηματισμοί ομοιότητας

Με τον ίδιο τρόπο που ένα συγκεκριμένο υπερεπίπεδο του  $P^n$ , το υπερεπίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$ , επέτρεψε να οριστεί η υποομάδα των αφινικών μετασχηματισμών (και, έμμεσα, ο αφινικός χώρος και η αφινική γεωμετρία), ο μετασχηματισμός ομοιότητας (και κατ' επέκταση ο ευκλείδειος χώρος) μπορεί να οριστεί στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας με την διάκριση μιας συγκεκριμένης εκφυλισμένης επιφάνειας  $2^{\text{ου}}$  βαθμού, η οποία ανήκει στο  $\Pi_\infty$  και καλείται απόλυτη επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\Omega_\infty$  (*absolute quadric*). Στην κανονική προβολική βάση, η  $\Omega_\infty$  ορίζεται από τον πίνακα:

$$\Omega_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n \times n)} & \mathbf{0}_{(n)} \\ \mathbf{0}_{(n)}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Από την Εξ. (2.16) προκύπτει ότι σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \dots \ x_n \ 0]^T$  του επιπέδου του απείρου  $\Pi_\infty$  ανήκει στην  $\Omega_\infty$  εάν:

$$\mathbf{x}^T \Omega_\infty \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Έτσι, ένας γραμμικός μετασχηματισμός του  $P^n$  είναι μετασχηματισμός ομοιότητας εάν, και μόνο εάν, διατηρεί αναλλοίωτη την απόλυτη επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\Omega_\infty$ <sup>7</sup>. Προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει όταν ο μετασχηματισμός είναι της μορφής:

$$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{R}_{(n \times n)} & \mathbf{b}_{(n)} \\ \mathbf{0}_{(n)}^T & c \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

όπου  $\mathbf{R}$  ορθογώνιος πίνακας και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Η απόλυτη επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού  $\Omega_\infty$  επιτρέπει την μέτρηση γωνιών στον προβολικό χώρο. Μέσω της “δυϊκής” της  $\Omega_\infty$ , η γωνία  $\theta$  δύο υπερεπιπέδων  $\mathbf{h}$  και  $\mathbf{v}$  υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{h}^T \Omega_\infty^* \mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{h}^T \Omega_\infty^* \mathbf{h})(\mathbf{v}^T \Omega_\infty^* \mathbf{v})}} \quad (2.46)$$

Επίσης, μέσω της  $\Omega_\infty$  και του μετασχηματισμού της πόλωσης είναι δυνατόν να διατυπωθεί η έννοια της καθετότητας στον προβολικό χώρο. Δύο υπερεπίπεδα του  $P^n$  είναι κάθετα μεταξύ τους αν οι τομές τους με το υπερεπίπεδο του απείρου είναι συζυγείς ως προς την  $\Omega_\infty$ . Με χρήση της “δυϊκής” της έκφρασης, τα υπερεπίπεδα  $\mathbf{h}$  και  $\mathbf{v}$  είναι κάθετα εάν, και μόνο εάν:

$$\mathbf{h}^T \Omega_\infty^* \mathbf{v} = 0 \quad (2.47)$$

Οι Εξ. (2.46) και (2.47) ισχύουν ακόμα και αν ο προβολικός χώρος υποστεί προβολικό μετασχηματισμό, ο οποίος γενικά μεταβάλλει την θέση της απόλυτης επιφάνειας  $2^{\text{ου}}$  βαθμού, αρκεί να εντοπισθεί η νέα της θέση. Υπ' αυτή την έννοια, εντοπισμός της  $\Omega_\infty$  στον προβολικό χώρο ισοδυναμεί με αναβάθμισή του σε ευκλείδειο, καθώς μέσω αυτής είναι δυνατόν να εξάγονται ευκλείδειες γεωμετρικές ιδιότητες. Αυστηρά μιλώντας, βέβαια, διαπιστώνει

<sup>7</sup> Η  $\Omega_\infty$  διατηρείται αναλλοίωτη ως σύνολο (τα επιμέρους σημεία της μεταβάλλονται αλλά παραμένουν επ' αυτής). Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, όπως προκύπτει από την Εξ. (2.44), τα σημεία της  $\Omega_\infty$  έχουν μιγαδικές συντεταγμένες.

κάνεις ότι η  $\Omega_\infty$  επιτρέπει να οριστεί η γεωμετρία ομοιότητας και όχι η ευκλείδεια, δεδομένου πως ως ευκλείδειος ορίζεται ο μετασχηματισμός εκείνος που διατηρεί την θέση της  $\Omega_\infty$  αλλά επιπλέον έχει και μοναδιαία ορίζουσα.

### 2.5.3.1 Μετασχηματισμοί ομοιότητας στο προβολικό επίπεδο

Στο προβολικό επίπεδο  $P^2$  τώρα, σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  ανήκει στην  $\Omega_\infty$  εάν:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Τα μόνα σημεία που ικανοποιούν την Εξ. (2.48) είναι τα  $\mathbf{I} = [1 \ i \ 0]^T$  και  $\mathbf{J} = [1 \ -i \ 0]^T$ . Τα σημεία αυτά ανήκουν στην ευθεία του απείρου  $\mathbf{I}_\infty$ , καθώς η τρίτη συντεταγμένη τους είναι μηδενική, ονομάζονται *κυκλικά σημεία* (*circular points*) και έχουν την ιδιότητα ότι ικανοποιούν την εξίσωση κάθε κύκλου του επιπέδου. Συνεπώς, μπορούν να θεωρηθούν ως τα σημεία τομής όλων των κύκλων ενός επιπέδου με την ευθεία του απείρου.

Έτσι, ένας γραμμικός μετασχηματισμός του επιπέδου είναι μετασχηματισμός ομοιότητας εάν, και μόνο εάν, διατηρεί τα κυκλικά σημεία. Κατ' αναλογία με την Εξ. (2.45) και δεδομένου πως ένας ορθογώνιος πίνακας μπορεί να θεωρηθεί ως πίνακας στροφής, ο μετασχηματισμός ομοιότητας σε ομογενείς συντεταγμένες έχει την μορφή:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}_{S(3 \times 3)} \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cos(\theta) & -\lambda \sin(\theta) & t_x \\ \lambda \sin(\theta) & \lambda \cos(\theta) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός έχει 4 ανεξάρτητες παραμέτρους που μπορούν να ερμηνευτούν γεωμετρικά ως δύο μεταθέσεις, μια στροφή και μια αλλαγή κλίμακας. Για τον προσδιορισμό τους αρκούν δύο αντιστοιχίες σημείων. Εκτός από τα κυκλικά σημεία, ο μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί το σχήμα (και άρα τις γωνίες καθώς και τους λόγους μηκών και εμβαδών). Υποομάδα των μετασχηματισμών ομοιότητας αποτελούν εκείνοι με  $\lambda = 1$ . Πρόκειται για τους ισομετρικούς ή ευκλείδειους μετασχηματισμούς, οι οποίοι επιπλέον διατηρούν τα μήκη και τα εμβαδά.

### 2.5.3.2 Μετασχηματισμοί ομοιότητας στον 3D προβολικό χώρο

Στον 3D προβολικό χώρο η  $\Omega_\infty$  είναι στην πραγματικότητα μια κωνική τομή (εκφυλισμένη επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού) στο επίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$ , η οποία αποτελείται από σημεία με μιγαδικές συντεταγμένες. Ονομάζεται *απόλυτη κωνική τομή*  $\mathbf{C}_\infty$  και στην κανονική προβολική βάση ορίζεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathbf{C}_\infty \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

ή στο επίπεδο του απείρου από τον μοναδιαίο πίνακα  $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{I}_{(3 \times 3)}$ . Δύο διευθύνσεις του χώρου είναι μεταξύ τους κάθετες αν τα σημεία φυγής τους στο επίπεδο του απείρου είναι συζυγή σημεία ως προς την απόλυτη κωνική. Επίσης κάθε επίπεδο του χώρου  $\Pi$  τέμνει το επίπεδο του απείρου σε ευθεία, η οποία αποτελεί την ευθεία του απείρου του συγκεκριμένου επιπέδου. Αυτή με την σειρά της τέμνει την απόλυτη κωνική σε δύο σημεία, τα κυκλικά σημεία του  $\Pi$ . Τέλος, κάθε σφαίρα του τρισδιάστατου προβολικού χώρου τέμνει το επίπεδο

δο του απείρου στην απόλυτη κωνική τομή.

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας του 3D προβολικού χώρου ορίζεται μέσω της ιδιότητάς του να διατηρεί την απόλυτη κωνική τομή  $C_\infty$ . Έχει 7 ανεξάρτητες παραμέτρους, οι οποίες μπορούν να αναλυθούν σε τρεις στροφές περί τους άξονες του συστήματος αναφοράς, τρεις μεταθέσεις και μια μεταβολή κλίμακας, και όπως ο αντίστοιχος μετασχηματισμός του επιπέδου διατηρεί το σχήμα (και επομένως τις γωνίες και τους λόγους μηκών, εμβαδών και όγκων). Η συνθηθέστερη εφαρμογή του στην Φωτογραμμετρία είναι κατά τον απόλυτο προσανατολισμό στερεοζεύγους εικόνων (απόλυτος προσανατολισμός στερεομοντέλου).

#### 2.5.4 Ετερογραφίες

Στην ενότητα 2.5.1, ο προβολικός μετασχηματισμός του  $P^n$  ορίστηκε μέσω αντιστρέψιμου ομογενούς πίνακα  $H$  διαστάσεων  $(n+1) \times (n+1)$ , ο οποίος μετασχηματίζει σημεία σε σημεία σύμφωνα με την Εξ. (2.28). Βάσει της αρχής του “δυασμού”, της συμμετρίας δηλαδή σημείων και υπερεπιπέδων στον προβολικό χώρο, η ερμηνεία της Εξ. (2.28) είναι δυνατή και ως μετασχηματισμός μεταξύ σημείων και υπερεπιπέδων, ήτοι:

$$h = Hx \quad (2.51)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται *ετερογραφία (correlation)*, καθώς περιγράφει προβολική σχέση ετερώνυμων στοιχείων (Λαδόπουλος, 1972). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός ετερογραφίας (αν ο πίνακας  $H$  είναι αντιστρέψιμος) είναι επίσης ετερογραφία, μετασχηματίζει υπερεπίπεδα σε σημεία, ορίζεται δε μέσω του αντιστρόφου του  $H$ . Σε αντίθεση με τις ομογραφίες, οι ετερογραφίες δεν συνιστούν ομάδα μετασχηματισμών, δεδομένου ότι η σύνθεση δύο ετερογραφιών δεν είναι ετερογραφία αλλά ομογραφία. Ακόμα, η ετερογραφία οδηγεί στην διατύπωση διγραμμικών (*bilinear*) σχέσεων μεταξύ σημείων. Σημείο  $x$  ορίζει υπερεπίπεδο  $h$  σύμφωνα με την Εξ. (2.51), και ένα δεύτερο σημείο  $x'$  ανήκει στο  $h$  αν ικανοποιείται η Εξ. (2.6). Τα σημεία  $x$  και  $x'$  ονομάζονται συζυγή ως προς την ετερογραφία  $H$  και ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x'Hx = 0 \quad (2.52)$$

Παράδειγμα ετερογραφίας είναι η πόλωση που ορίζεται μέσω συμμετρικού πίνακα  $H$  και εξετάστηκε σε προηγούμενες ενότητες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την παρούσα διατριβή παρουσιάζουν επίσης οι μη αντιστρέψιμες ετερογραφίες του προβολικού επιπέδου. Αυτές εκφράζονται από ομογενή πίνακα διαστάσεων  $3 \times 3$  μηδενικής ορίζουσας, μέσω του οποίου (Εξ. 2.51) αντιστοιχίζονται σημεία του επιπέδου και ευθείες διερχόμενες από σημείο (αποτελούν, δηλαδή, επίπεδη δέσμη ακτίνων).

Ειδικότερα, το μαθηματικό μοντέλο του *επιπολικού πίνακα* (το οποίο εξετάζεται στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο) αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα μια μη αντιστρέψιμη 2D ετερογραφία, συνδέοντας απευθείας τα σημεία εικόνας με την δέσμη των αντίστοιχων επιπολικών ευθειών άλλης (επικαλυπτόμενης) εικόνας, χωρίς να απαιτείται γνώση του εσωτερικού ή του σχετικού προσανατολισμού τους. Τα ομόλογα σημεία των δύο εικόνων είναι συζυγή ως προς τον επιπολικό πίνακα και ικανοποιούν εξίσωση της μορφής της Εξ. (2.52). Ο προσδιορισμός του επιπολικού πίνακα είναι δυνατός μέσω 7 τουλάχιστον τέτοιων εξισώσεων από 7 ομολογίες.

## 2.6 Η κεντρική προβολή

### 2.6.1 Ο προβολικός πίνακας της μηχανής

Η προβολή του 3D προβολικού χώρου σε επίπεδο δια σημείου εκτός επιπέδου εκφράζεται από ομογενή πίνακα  $\mathbf{P}$  διαστάσεων  $3 \times 4$ . Σημείο  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]^T$  του  $P^3$  προβάλλεται στο σημείο  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  του  $P^2$  σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{(3 \times 4)} \mathbf{X} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών, ο  $\mathbf{P}$  συνιστά το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τον γεωμετρικό σχηματισμό εικόνας μέσω κεντρικής προβολής και καλείται *προβολικός πίνακας της μηχανής* (*projective camera matrix*). Εάν το σημείο  $\mathbf{x}$  εκφραστεί σε μη ομογενείς συντεταγμένες (διάρθρωση με την τρίτη του συντεταγμένη  $x_3$ ), η Εξ. (2.53) καταλήγει στην εξίσωση του Άμεσου Γραμμικού Μετασχηματισμού (DLT), όπως αυτή έγινε γνωστή στην Φωτογραμμετρία από τους Abdel-Aziz & Karara (1971)<sup>8</sup>. Πλεονέκτημα της Εξ. (2.53), συγκρινόμενης με την τυπική εξίσωση συγγραμμικότητας, είναι ότι ο υπολογισμός των 11 παραμέτρων του  $\mathbf{P}$  (από  $\geq 6$  φωτοσταθερά σημεία) είναι γραμμικός, ενώ δεν απαιτείται γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής ούτε αναγωγή των μετρημένων εικονοσημείων στο τυπικό σύστημα εικονοσυντεταγμένων. Βέβαια, όπως επισημαίνει ο Dermanis (1991), η επιλογή του συστήματος αναφοράς κατά την γραμμική λύση επηρεάζει την ακρίβεια προσδιορισμού των παραμέτρων, κάτι όμως που μπορεί να αντιμετωπιστεί με εισαγωγή κατάλληλων εσωτερικών δεσμεύσεων.

Στην πραγματικότητα, στην περίπτωση μηχανών απλής κεντρικής προβολής (*pinhole camera*) οι 11 παράμετροι του προβολικού πίνακα της μηχανής δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά προκύπτουν από τα 9 στοιχεία του εσωτερικού και εξωτερικού προσανατολισμού της μηχανής λήψης. Έτσι, κάθε ομογενής πίνακας  $\mathbf{P}_{3 \times 4}$  του οποίου το αριστερό τμήμα  $3 \times 3$  είναι αντιστρέψιμο μπορεί να αναλυθεί στους υποπίνακες:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(3 \times 3)} & | & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

όπου  $\mathbf{C}$  η θέση του σημείου λήψης (σε μη ομογενείς συντεταγμένες),  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  ο πίνακας στροφής της εικόνας και  $\mathbf{K}$  άνω τριγωνικός πίνακας διαστάσεων  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\alpha c & s & x_0 \\ 0 & -c & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{K}$  αντιστοιχούν στις παραμέτρους εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής. Ειδικότερα, η παράμετρος  $c$  αναφέρεται στην σταθερά της μηχανής, τα  $x_0$ ,  $y_0$  στις εικονοσυντεταγμένες του πρωτεύοντος σημείου, ενώ τα  $\alpha$  (*aspect ratio*) και  $s$  (*skewness*) αντιπροσωπεύουν πρόσθετες προβολικές παραμέτρους αναφερόμενες, αντίστοιχα,

<sup>8</sup> Η σχέση είχε διατυπωθεί επίσης, ανεξάρτητα, από τον Thompson (1971) αλλά και στην προγενέστερη εργασία του Das (1949).



στην σχετική κλίμακα μεταξύ των αξόνων της εικόνας (περίπτωση ψηφιακής εικόνας με μη τετραγωνική εικονοψηφίδα) και την απόκλισή τους από την καθετότητα. Προφανώς, στην περίπτωση απλής κεντρικής προβολής πρέπει να επιβάλλονται οι δύο δεσμεύσεις  $\alpha = 1$  και  $s = 0$  στις παραμέτρους του προβολικού πίνακα της μηχανής  $\mathbf{P}$  (Borr & Kraus, 1978).

Σημαντικές ιδιότητες παρουσιάζουν επίσης οι στήλες και οι γραμμές του προβολικού πίνακα της μηχανής. Όπως εξηγούν οι Hartley & Zisserman (2000), οι τρεις πρώτες στήλες του  $\mathbf{P}$  περιγράφουν, σε ομογενείς συντεταγμένες, τα σημεία φυγής των τριών αξόνων του συστήματος αναφοράς του χώρου, ενώ η τέταρτη αντιπροσωπεύει την απεικόνιση της αρχής του. Οι δύο πρώτες γραμμές του περιγράφουν, αντίστοιχα, τα επίπεδα που ορίζονται από το προβολικό κέντρο και τους άξονες  $x$  και  $y$  της εικόνας. Τέλος, η τρίτη γραμμή του  $\mathbf{P}$  αντιστοιχεί σε επίπεδο δια του κέντρου προβολής της εικόνας και παράλληλο στο επίπεδό της. Οι ιδιότητες αυτές των γραμμών του  $\mathbf{P}$  ήταν ήδη γνωστές στον Das (1949), ο οποίος μάλιστα πρότεινε τον προσδιορισμό της θέσης του προβολικού κέντρου ως τομής αυτών των τριών επιπέδων.

Βέβαια, η απεικόνιση του 3D χώρου σε επίπεδο μέσω κεντρικής προβολής δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Σημείο του 3D χώρου αντιστοιχεί σε εικονοσημείο, ωστόσο σε εικονοσημείο αντιστοιχεί απειρία σημείων του χώρου κείμενων επ' ευθείας δια του προβολικού κέντρου. Το σύνολο των σημείων αυτών μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά συναρτήσει μεταβλητής  $\lambda$  και του ψευδοαντιστρόφου του  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}^+ \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C},$$

$$\text{όπου } \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^T (\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1} \text{ και } \mathbf{C} \text{ η λύση του συστήματος } \mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

### 2.6.2 Απεικόνιση σημείων του απείρου

Στην εικόνα οι παράλληλες ευθείες του χώρου εμφανίζονται, κατά κανόνα, να συγκλίνουν σε σημείο. Πράγματι, βασική ιδιότητα της κεντρικής προβολής είναι πως σημεία του απείρου απεικονίζονται σε πραγματικά σημεία. Όπως προαναφέρθηκε (ενότητα 2.5.2), τα ιδεατά σημεία ανήκουν στο επίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$  και μπορούν να περιγραφούν από ομογενές διάνυσμα της μορφής  $\mathbf{X}_\infty = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ 0]^T = [\mathbf{d}^T \ 0]^T$ . Κατά τις Εξ. (2.53) και (2.54), ένας προβολικός πίνακας μηχανής απεικονίζει το  $\mathbf{X}_\infty$  στο σημείο  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{R} \left[ \mathbf{I}_{(3 \times 3)} \mid -\mathbf{C} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{d} \quad (2.57)$$

Η Εξ. (2.57) αποτελεί στην πραγματικότητα μια ομογραφία  $\mathbf{H} = \mathbf{K}\mathbf{R}$  που μετασχηματίζει το επίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$  και η οποία είναι ανεξάρτητη από την θέση του σημείου λήψης  $\mathbf{C}$ . Εξαρτάται αποκλειστικά από τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής και τις στροφές της εικόνας. Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η απεικόνιση, μέσω της ομογραφίας αυτής, της απόλυτης κωνικής τομής  $\mathbf{C}_\infty = \mathbf{I}_{(3 \times 3)}$  (βλ. ενότητα 2.5.3.2). Κατά την Εξ. (2.31) η  $\mathbf{C}_\infty$ , ως κωνική τομή, μετασχηματίζεται μέσω ομογραφίας στην κωνική τομή  $\omega$ :

$$\omega = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{C}_\infty \mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{K}\mathbf{R})^{-T} \mathbf{C}_\infty (\mathbf{K}\mathbf{R})^{-1} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1} \quad (2.58)$$

Η  $\omega$  ονομάζεται *εικόνα της απόλυτης κωνικής τομής (image of the absolute conic)*, εξαρτά-

ται δε αποκλειστικά από τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής. Χάρη στην ιδιότητά της αυτή, αποτελεί συστατικό στοιχείο αλγορίθμων βαθμονόμησης στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών (Maybank & Faugeras, 1992, Triggs, 1997, Liebowitz, 2001, Ronda & Valdés, 2007). Η Εξ. (2.58) μπορεί να αντιστραφεί, και συνεπώς η εύρεση της θέσης της εικόνας της απόλυτης κωνικής τομής ισοδυναμεί με προσδιορισμό των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού της μηχανής. Αυτό επιβεβαιώνεται και γεωμετρικά καθώς η απόλυτη κωνική επιτρέπει την μέτρηση γωνιών στον προβολικό χώρο (βλ. ενότητα 2.5.3), και εν προκειμένω μεταξύ των προβολικών ακτίνων που ορίζονται από τα σημεία μιας εικόνας, λειτουργία ακριβώς που επιτελεί και ο εσωτερικός προσανατολισμός.

## Επιπολική Γεωμετρία

### 3.1 Σχετικός προσανατολισμός

Ο σχετικός προσανατολισμός ορίζεται ως το φωτογραμμετρικό πρόβλημα προσδιορισμού της σχετικής θέσης και των σχετικών στροφών δύο επικαλυπτόμενων δεσμών, κατά κανόνα από ομολογίες σημείων<sup>1</sup>. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι εν προκειμένω η γνώση του εξωτερικού προσανατολισμού της μηχανής λήψης, δηλαδή οι εικόνες αντιμετωπίζονται ως δύο 3D δέσμες ακτίνων που οφείλουν να τέμνονται. Υπ' αυτήν την έννοια ο σχετικός προσανατολισμός είναι πρόβλημα ορισμένο στον 3D ευκλείδειο χώρο. Εκτός από απλό ενδιαμέσο στάδιο του προσδιορισμού των εξωτερικών προσανατολισμών δύο (ή περισσότερων εικόνων), ο σχετικός προσανατολισμός αντιπροσωπεύει ταυτόχρονα ένα ισχυρό εργαλείο με πολλές φωτογραμμετρικές χρησιμότητες. Με αποκατάσταση της αλληλοτομίας ομόλογων οπτικών ακτίνων είναι δυνατή – μέσω εμπροσθοτομιών ή και σε ενιαία λύση (μεθοδος της δέσμης) – η 3D ανακατασκευή απεικονιζόμενων σημείων<sup>2</sup>, οπότε το προκύπτον σημειοσύμπλοκο διαφέρει από την πραγματικότητα κατά κλίμακα, θέση και προσανατολισμό στον χώρο. Η αβεβαιότητα αυτή μπορεί να αρθεί με 3D μετασχηματισμό ομοιότητας (διαδικασία απόλυτου προσανατολισμού βάσει φωτοσταθερών σημείων ή άλλων χαρακτηριστικών), ωστόσο υπάρχουν και εφαρμογές όπου επαρκεί η αποκατάσταση της κλίμακας, πχ. μέσω γνωστών αποστάσεων, ή και απλώς η ανακατασκευή του σχήματος του αντικειμένου. Τέλος, βασικό χαρακτηριστικό του σχετικού προσανατολισμού του στερεοζεύγους – και της

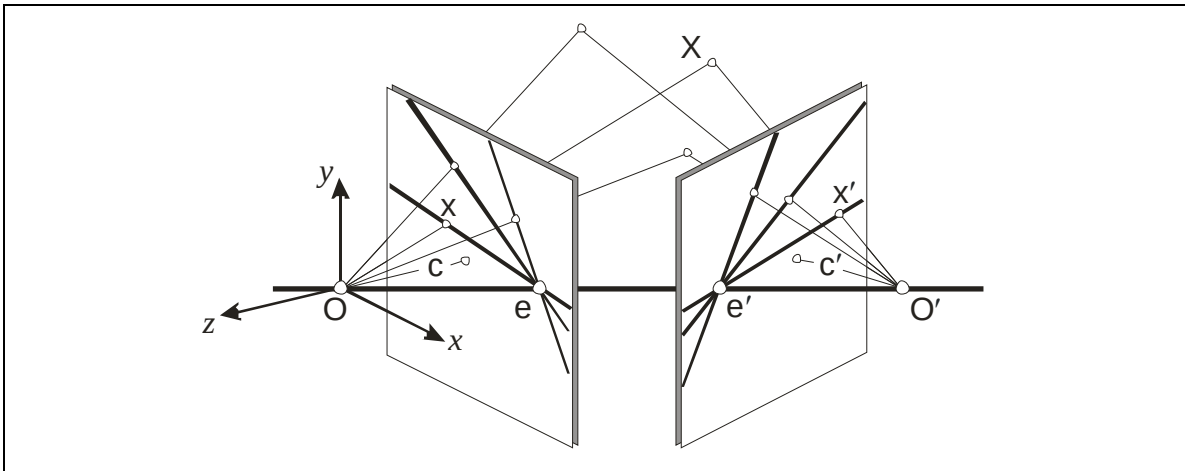
<sup>1</sup> Ο σχετικός προσανατολισμός είναι αντιμετωπίσιμος και με ομολογίες άλλων χαρακτηριστικών, πχ. ευθειών. Στην περίπτωση ομόλογων ευθειών το πρόβλημα έχει λύση μόνο για τριάδες επικαλυπτόμενων εικόνων (Petsa & Patias, 1994). Το στερεοζεύγος μπορεί να προσανατολιστεί σχετικά μέσω ευθειών μόνο εφόσον μπορούν να δεσμευτούν γεωμετρικά ορισμένες από τις απεικονιζόμενες ευθείες του χώρου, πχ. ως συνεπίπεδες (Πέτσα, 1996, Petsa & Karras, 2000).

<sup>2</sup> Η γεωμετρική ποιότητα της 3D ανακατασκευής στο αυθαίρετο σύστημα είναι δυνατόν να ενισχυθεί με την εισαγωγή γνωστών γεωμετρικών δεσμεύσεων, πχ. συνεπιπεδότητας, μεταξύ σημείων του αντικειμένου στην διαδικασία του σχετικού προσανατολισμού (Καλούση, 2006, Χατζησταύρου, 2006).

γενίκευσής του ως προσανατολισμού περισσότερων εικόνων σε αυθαίρετο σύστημα – είναι η πλήρης αξιοποίηση της “εσωτερικής” ακρίβειας των εικόνων, καθώς δεν απαιτείται κατ’ αρχήν καμία *a priori* γεωμετρική πληροφορία για τον απεικονιζόμενο 3D χώρο.

### 3.1.1 Γεωμετρία του στερεοζεύγους

Κάθε σημείο  $X$  του αντικειμένου ορίζει μέσω των προβολικών κέντρων των εικόνων  $O$  και  $O'$  δύο οπτικές ακτίνες, οι οποίες τέμνουν τα επίπεδα των εικόνων στα αντίστοιχα εικονοσημεία  $x$  και  $x'$  (Σχ. 3.1). Η ευθεία της βάσης  $OO'$  του στερεοζεύγους, η οποία ορίζεται από τα δύο κέντρα προβολής, τέμνει επίσης τις εικόνες στους πόλους  $e$  και  $e'$  του ζεύγους. Κάθε μια από τις ομόλογες οπτικές ακτίνες ορίζει, μαζί με την βάση, το *επιπολικό επίπεδο*, το οποίο τέμνει τα επίπεδα των εικόνων στις δύο ομόλογες *επιπολικές ευθείες*. Κατ’ αυτόν τον τρόπο, τα σημεία του χώρου ορίζουν δέσμη επιπολικών επιπέδων, αξονική ως προς την βάση, η οποία με την σειρά της ορίζει επί των εικόνων δύο ομόλογες επίπεδες δέσμες επιπολικών ευθειών με κορυφές τους πόλους. Δεδομένου λοιπόν ότι ορίζονται από τομές με αξονική δέσμη επιπέδων, οι δέσμες αυτές είναι μεταξύ τους προβολικές (Hallert, 1960).



Σχήμα 3.1. Γεωμετρία του στερεοζεύγους.

### 3.1.2 Συνθήκη συνεπιπεδότητας

Με αντιστροφή της διαδικασίας σχηματισμού των εικόνων, κάθε ζεύγος ομόλογων εικονοσημείων  $x$  και  $x'$  επιτρέπει, δια του εσωτερικού προσανατολισμού, να ορίζονται στον χώρο δύο ευθείες (οπτικές ακτίνες) που οφείλουν να τέμνονται. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι τα διανύσματα  $\mathbf{p} = \overrightarrow{Ox}$  και  $\mathbf{p}' = \overrightarrow{O'x'}$ , που ορίζονται από τα ομόλογα σημεία και τα αντίστοιχα κέντρα προβολής των εικόνων, να είναι συνεπίπεδα με το διάνυσμα  $\mathbf{B} = \overrightarrow{OO'}$  της βάσης του στερεοζεύγους. Η συνθήκη συνεπιπεδότητας, όπως είναι γνωστή στην φωτογραμμετρική ορολογία, επιτρέπει να προσδιορίζεται ο σχετικός προσανατολισμός ζεύγους εικόνων, εκφράζεται δε αλγεβρικά με το μεικτό γινόμενο των τριών διανυσμάτων:

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{p}') = 0 \quad (3.1)$$

όπου:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \mathbf{p}' = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x' - x'_0 \\ y' - y'_0 \\ -c' \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

και  $\mathbf{R}$  ο πίνακας στροφής των σχετικών στροφών των δύο εικόνων,  $x, y$  και  $x', y'$  οι εικονοσυντεταγμένες των ομόλογων σημείων στις δύο εικόνες, ενώ  $x_0, y_0$  και  $x'_0, y'_0$  είναι οι αντίστοιχες εικονοσυντεταγμένες των πρωτεύοντων σημείων και  $c, c'$  οι αντίστοιχες τιμές της σταθεράς μηχανής των δύο εικόνων.

Το εξωτερικό γινόμενο στην Εξ. (3.1) εκφράζει διάνυσμα κάθετο στο επιπολικό επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα  $\mathbf{B}$  και  $\mathbf{p}'$ , ενώ το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος αυτού με το  $\mathbf{p}$  ισούται με το συνημίτονο της γωνίας τους, επομένως μηδενίζεται δεδομένου ότι το  $\mathbf{p}$  επίσης ανήκει στο επιπολικό επίπεδο (γεωμετρικά, το μεικτό γινόμενο εκφράζει τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που ορίζουν τα τρία διανύσματα, ο οποίος βέβαια οφείλει να είναι μηδενικός αφού τα διανύσματα είναι συνεπίπεδα).

Στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία (Δερμάνης, 1991, Atkinson, 1996, Πέτσα, 2000), το μεικτό γινόμενο της Εξ. (3.1) υπολογίζεται μέσω της ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

η οποία επιλύεται μη γραμμικά ως προς τις τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους του πίνακα στροφής (στροφές  $\omega, \phi, \kappa$  της δεύτερης εικόνας ως προς την πρώτη<sup>3</sup>) και τις συνιστώσες της βάσης του στερεοζεύγους. Πολλαπλασιασμός του διανύσματος της βάσης με σταθερά  $\lambda \neq 0$  προφανώς δεν επηρεάζει τον μηδενισμό της ορίζουσας, συνεπώς κάθε διάνυσμα της μορφής  $\lambda \mathbf{B} = \lambda [b_x \ b_y \ b_z]^T$  ικανοποιεί την Εξ. (3.3), αποτελώντας άρα αποδεκτή λύση του σχετικού προσανατολισμού. Αυτή η αβεβαιότητα κλίμακας – η οποία γεωμετρικά ισοδυναμεί με μετάθεση των εικόνων στην διεύθυνση της βάσης  $\mathbf{B}$  – είναι δυνατόν να αντιμετωπιστεί με αυθαίρετο ορισμό είτε μιας των συνιστωσών της βάσης είτε του μέτρου του διανύσματος  $\mathbf{B}$  (τελικά, συνεπώς, εκείνο που προσδιορίζεται είναι η διεύθυνση της βάσης). Για να προσδιοριστούν οι 5 ανεξάρτητες παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού αρκούν 5 κατ' ελάχιστον αντιστοιχίες σημείων (περίσσεια ομολογιών αντιμετωπίζεται με ελαχιστοτετραγωνική συνόρθωση). Υπενθυμίζεται ότι, όπως ήδη αναφέρθηκε στην Εισαγωγή (ενότητα 1.2.1), στην οριακή περίπτωση των 5 ομόλογων σημείων το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού του ζεύγους έχει 10 πιθανές λύσεις, ορισμένες από τις οποίες ενδέχεται να είναι μιγαδικές (Kruppa, 1913, Demazure, 1988, Faugeras & Maybank, 1990).

### 3.1.3 Δεσμευμένος επιπολικός πίνακας

Σε αντίθεση με την τυπική διάταξη λήψης της αεροφωτογραμμετρίας, η τυχαία γεωμετρία των λήψεων σε επίγειες εφαρμογές καθιστά, συχνά, την εκτίμηση αρχικών τιμών για την ελαχιστοτετραγωνική συνόρθωση της Εξ. (3.3) υπόθεση αρκετά πιο σύνθετη. Αν επιπλέον

<sup>3</sup> Ο Thompson (1959) υπολογίζει αντί αυτών τις τρεις γωνίες Rodrigues, ενώ ο Horn (1991) εκφράζει τον πίνακα στροφής συναρτήσει μοναδιαίων 'quaternions'.

ληφθεί υπόψη το αίτημα για αυτοματισμό, ακόμα μάλιστα και σε πραγματικό χρόνο, καθίσταται εμφανής η ανάγκη για αλγόριθμους που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του σχετικού προσανατολισμού χωρίς απαίτηση για αρχικές τιμές. Τέτοιοι αλγόριθμοι διατυπώθηκαν από νωρίς, τόσο στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία (Thompson, 1959, Stefanovic, 1973, Khlebnikova, 1983, Cheng, 1986, Shih, 1992) όσο και σε εκείνη της Όρασης Υπολογιστών (Longuet-Higgins, 1981, Tsai & Huang, 1984). Στην πλειονότητά τους αποτελούνται από ένα πρώτο βήμα υπολογισμού 8 εξαρτημένων παραμέτρων, από τις οποίες κατόπιν προκύπτουν οι 5 ανεξάρτητες παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού. Δημοφιλέστερος ανάμεσά τους είναι ο αλγόριθμος του Longuet-Higgins (1981) που βασίζεται στον υπολογισμό εκείνου που αποδίδεται εδώ ως *δεσμευμένος επιπολικός πίνακας* (*essential matrix*), ο οποίος αποτέλεσε αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας στην Όραση Υπολογιστών.

Με την βοήθεια των πινάκων εσωτερικού προσανατολισμού  $\mathbf{K}$  και  $\mathbf{K}'$  (Εξ. 2.55) των δύο εικόνων στην περίπτωση τετραγωνικών εικονοψηφίδων ( $\alpha = 1$  και  $s = 0$ ), ορίζονται οι “κανονικοποιημένες” συντεταγμένες των ομόλογων σημείων:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -c \end{bmatrix} \text{ και } \tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{K}'^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x' - x'_0 \\ y' - y'_0 \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

όπου το σύμβολο “ $\sim$ ” υποδηλώνει ισότητα η οποία συμπεριλαμβάνει πολλαπλασιασμό με σταθερά  $\lambda \neq 0$ . Τέτοιος πολλαπλασιασμός δεν αναιρεί τον μηδενισμό του μεικτού γινομένου (Εξ. 3.1), και η συνθήκη συνεπιπεδότητας γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\tilde{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}}') = 0 \quad (3.5)$$

Εάν επιπλέον το εξωτερικό γινόμενο εκφραστεί συναρτήσει του αντισυμμετρικού πίνακα εξωτερικού γινομένου (Εξ. 2.11), η Εξ. (3.5) απλοποιείται περαιτέρω:

$$\tilde{\mathbf{x}}^T [\mathbf{B}]_{\times} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}}' = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{x}}' = 0, \text{ όπου } \mathbf{E} = [\mathbf{B}]_{\times} \mathbf{R} \quad (3.6)$$

Η Εξ. (3.6) παραμένει μη γραμμική ως προς τα στοιχεία της βάσης  $\mathbf{B}$  και τις τρεις στροφές που ορίζουν τον πίνακα  $\mathbf{R}$ , μπορεί όμως να επιλυθεί γραμμικά ως προς τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{E} = [\mathbf{B}]_{\times} \mathbf{R}$ . Ο  $\mathbf{E}$  ονομάζεται *δεσμευμένος επιπολικός πίνακας* του στερεοζεύγους και έχει διαστάσεις  $3 \times 3$ , αλλά αρκούν 8 τιμές για τον προσδιορισμό του (πχ. ορίζεται αυθαίρετα η τιμή ενός στοιχείου ή δεσμεύεται η τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των στοιχείων του) καθώς πολλαπλασιασμός των στοιχείων του με μη μηδενική σταθερά αφήνει ανεπηρέαστη την Εξ. (3.6). Η γραμμική επίλυση για τις παραμέτρους του  $\mathbf{E}$  πραγματοποιείται αφού προηγουμένως αναχθούν οι κανονικοποιημένες εικονοσυντεταγμένες των ομόλογων σημείων σε μορφή:

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad 1]^T \text{ και } \tilde{\mathbf{x}}' = [\tilde{x}'_1 \quad \tilde{x}'_2 \quad 1]^T \quad (3.7)$$

Μέσω αυτών, η Εξ. (3.6) αναπτύσσεται ως:

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}'_1 E_{11} + \tilde{x}_2 \tilde{x}'_1 E_{12} + \tilde{x}'_1 E_{13} + \tilde{x}_1 \tilde{x}'_2 E_{21} + \tilde{x}_2 \tilde{x}'_2 E_{22} + \tilde{x}'_2 E_{23} + \tilde{x}_1 E_{31} + \tilde{x}_2 E_{32} + E_{33} = 0 \quad (3.8)$$

δηλαδή σε μορφή γραμμική ως προς τα στοιχεία του  $\mathbf{E}$ . Οι Weng et al. (1989 και 1993) πρότειναν επίσης εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα που στηρίζονται σε μη γραμμική συνόρθωση της Εξ. (3.6) και οδηγούν σε ακριβέστερα αποτελέσματα. Η εύρεση των 8 παραμέτρων του  $\mathbf{E}$  μπορεί να γίνει και με τους αλγόρι-

θμους υπολογισμού του επιπολικού πίνακα που παρουσιάζονται στα επόμενα (βλ. ενότητα 3.2.4), αρκεί στην θέση των ομογενών να χρησιμοποιηθούν οι κανονικοποιημένες συντεταγμένες των ομόλογων σημείων.

### 3.1.3.1 Ιδιότητες δεσμευμένου επιπολικού πίνακα

Οι 8 παράμετροι του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα δεν είναι βέβαια ανεξάρτητες. Είναι συναρτήσεις των 5 φυσικών παραμέτρων του σχετικού προσανατολισμού, γεγονός που εξηγεί την διαφορά μεταξύ του αριθμού των δύο. Πράγματι, για να μπορεί ο πίνακας  $\mathbf{E}$  να αναλυθεί σε γινόμενο αντισυμμετρικού ( $[\mathbf{B}]_{\times}$ ) και ορθογώνιου πίνακα ( $\mathbf{R}$ ) πρέπει να ισχύουν ορισμένες δεσμεύσεις μεταξύ των στοιχείων του. Εξαιτίας του αντισυμμετρικού πίνακα, ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας είναι κατ' αρχήν μη αντιστρέψιμος, και συνεπώς έχει μηδενική ορίζουσα και βαθμό 2:

$$|\mathbf{E}| = 0 \Leftrightarrow \text{rank}(\mathbf{E}) = 2 \quad (3.9)$$

Η δέσμευση αυτή μειώνει κατά έναν τους βαθμούς ελευθερίας του  $\mathbf{E}$ . Για τους δύο εναπομένοντες βαθμούς ελευθερίας έχουν διατυπωθεί στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών αρκετές ισοδύναμες αλγεβρικές δεσμεύσεις. Στην συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά οι πιο σημαντικές από αυτές (παραλείπονται οι αποδείξεις, τις οποίες μπορεί κανείς να βρει συγκεντρωμένες στα βιβλία των Maybank, 1993, Faugeras, 1993, και Faugeras & Luong, 2001).

Ο Demazure (1988) απέδειξε ότι ο  $\mathbf{E}$  οφείλει να ικανοποιεί την δέσμευση:

$$\text{trace}^2(\mathbf{E}\mathbf{E}^T) = 2\text{trace}((\mathbf{E}\mathbf{E}^T)^2) \quad (3.10)$$

Παρόμοια σχέση έχει διατυπώσει και ο Trivedi (1988).

Οι Huang & Faugeras (1989) κατέληξαν σε ισοδύναμη σχέση μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών<sup>4</sup> (SVD – *singular values decomposition*). Γενικά, ένας πίνακας μπορεί να αναλυθεί μέσω της SVD σε γινόμενο δύο ορθογώνιων και ενός θετικού διαγώνιου πίνακα σύμφωνα με την σχέση:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T, \text{ όπου } \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ με } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0 \quad (3.11)$$

Οι  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ονομάζονται ιδιάζουσες τιμές του πίνακα και είναι ενδεικτικές του βαθμού του. Συγκεκριμένα, ο βαθμός ενός πίνακα ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιζουσών τιμών του, και εφόσον ο  $\mathbf{E}$  είναι μη αντιστρέψιμος η  $\lambda_3$  οφείλει να είναι μηδενική. Για να είναι, επιπλέον, δυνατόν να αναλυθεί σε γινόμενο αντισυμμετρικού και ορθογώνιου πίνακα, και άρα να συνιστά δεσμευμένο επιπολικό πίνακα ζεύγους εικόνων, οι Huang & Faugeras (1989) έδειξαν ότι πρέπει οι δύο μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του να είναι ίσες. Απέδειξαν, ακόμα, ότι αυτό ισοδυναμεί με την δέσμευση:

$$(\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2)^2 = 4(\|\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2\|^2 + \|\mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_3\|^2 + \|\mathbf{I}_3 \times \mathbf{I}_1\|^2) \quad (3.12)$$

όπου  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ , οι γραμμές του πίνακα  $\mathbf{E}$ .

<sup>4</sup> Αναλυτικά στοιχεία σχετικά με τον υπολογισμό της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών (SVD), τις ιδιότητές της και την χρήση της για την επίλυση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων παρουσιάζονται στο εγχειρίδιο θεωρίας πινάκων των Golub & van Loan (1989).

Εναλλακτική διατύπωση πρότεινε ο Maybank (1990), ορίζοντας το συμμετρικό και το αντι-συμμετρικό μέρος του πίνακα  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) \text{ και } \mathbf{E}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^T), \text{ με } \mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_a \quad (3.13)$$

Αν  $q_1, q_2, q_3$  είναι οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{E}_s$  και  $\mathbf{v}$  διάνυσμα τέτοιο ώστε  $\mathbf{E}_a = [\mathbf{v}]_\times$ , τότε κάθε μη αντιστρέψιμος πίνακας  $\mathbf{E}$  διαστάσεων  $3 \times 3$  είναι δεσμευμένος επιπολικός εάν, και μόνο εάν, ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο δεσμεύσεις:

1.  $q_1 + q_2 = q_3$
  2.  $\mathbf{v}$  κάθετο στο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $q_3$ .
- (3.14)

### 3.1.3.2 Δεσμεύσεις στον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα

Όλες οι προαναφερθείσες δεσμεύσεις είναι ισοδύναμες, αποτελώντας αναγκαία συνθήκη ώστε να μπορεί να αναλυθεί ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας στο διάνυσμα της βάσης και τον πίνακα στροφής στερεοζεύγους εικόνων. Εξαιτίας όμως της ύπαρξης θορύβου στις μετρήσεις, οι πίνακες  $\mathbf{E}$  που προκύπτουν από γραμμική επίλυση της Εξ. (3.6) δεν αναμένεται ότι θα τις ικανοποιούν. Αυτό αντιμετωπίζεται με την ταυτόχρονη ελαχιστοτετραγωνική συνόρθωση της Εξ. (3.6) με μια από τις ισοδύναμες εξισώσεις δέσμευσης της προηγούμενης ενότητας (Weng et al., 1993a, 1993b). Η προσέγγιση αυτή οδηγεί βέβαια σε μη γραμμική επίλυση, αλλά οι απαραίτητες αρχικές τιμές των 8 παραμέτρων του  $\mathbf{E}$  προκύπτουν εύκολα από μια πρώτη γραμμική λύση της Εξ. (3.6).

Βασιζόμενος στην δέσμευση των Huang & Faugeras (1989), ο Hartley (1992) αντιμετώπισε τον προσδιορισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα με πιο άμεσο τρόπο, αξιοποιώντας την ανάλυση SVD. Επιλύοντας γραμμικά την Εξ. (3.6), υπολογίζει αρχικά πίνακα  $\mathbf{E}$ , τον οποίο αναλύει μέσω της SVD στο γινόμενο:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathbf{V}^T \quad (3.15)$$

Εξαιτίας σφαλμάτων στην μέτρηση των ομολογών σημείων, οι ιδιάζουσες τιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  του  $\mathbf{E}$  δεν αναμένονται ίσες ούτε η  $\lambda_3$  μηδενική. Μέσω αυτών όμως υπολογίζει τον πίνακα  $\mathbf{E}'$ :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{U} \text{diag}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, 0\right) \mathbf{V}^T \quad (3.16)$$

ο οποίος, όπως αποδεικνύει, διαφέρει κατά το ελάχιστο δυνατό από τον  $\mathbf{E}$  (το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των στοιχείων τους είναι ελάχιστο) και ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός δεσμευμένου επιπολικού πίνακα.

Σε επίλυση της Εξ. (3.6) υπό τις δεσμεύσεις της προηγούμενης ενότητας, τις οποίες οφείλει να ικανοποιεί ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας, στηρίζονται και οι αλγόριθμοι υπολογισμού του από 5 ομολογίες σημείων (Philip, 1996, Nister, 2003, Li & Hartley, 2006, Batra et al., 2007).

### 3.1.3.3 Υπολογισμός πίνακα στροφής και μετάθεσης

Για την τελική εξαγωγή του πίνακα στροφής και του διανύσματος της βάσης από τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα, οι Longuet-Higgins (1981), Tsai & Huang (1984) και Faug-



ras & Maybank (1990) διατύπωσαν παρεμφερείς αλγορίθμους, τους οποίους απλοποίησε ο Hartley (1992) μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών του  $\mathbf{E}$ . Εναλλακτικές προσεγγίσεις έχουν προτείνει ακόμα οι Horn (1990b) και Wenzel & Grigat (2005). Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 της παρούσας διατριβής διατυπώνεται, μεταξύ άλλων, αλγόριθμος υπολογισμού της διεύθυνσης της βάσης και του πίνακα στροφής ζεύγους εικόνων με την αξιοποίηση – αντί αλγεβρικών ιδιοτήτων του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα – γεωμετρικών δεσμεύσεων μεταξύ των πόλων και των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού.

Εδώ παρουσιάζεται, ενδεικτικά, ο αλγόριθμος του Hartley (1992). Έστω  $\mathbf{E}$  δεσμευμένος επιπολικός πίνακας ζεύγους εικόνων που πληροί τις δεσμεύσεις της ενότητας 3.1.3.1 και έχει πολλαπλασιαστεί με μη μηδενική σταθερά ώστε να αναλύεται μέσω της SVD στο γινόμενο:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathbf{V}^T \quad (3.17)$$

Εάν οριστούν οι πίνακες  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ο  $\mathbf{E}$  μπορεί να αναλυθεί στο γινόμενο  $\mathbf{E} = [\mathbf{B}]_{\times} \mathbf{R}$  όπου:

$$\mathbf{B} = \pm \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

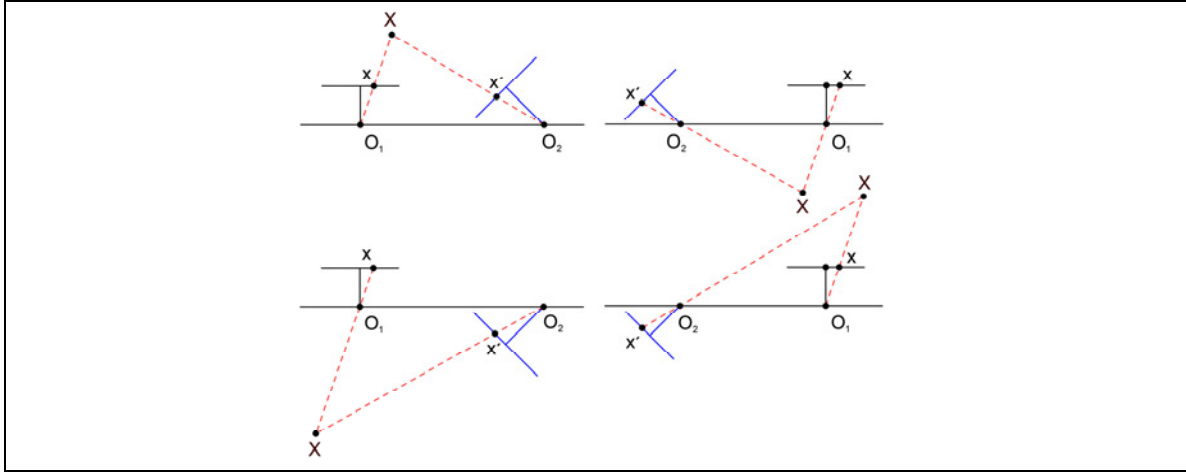
και:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T \quad \text{ή} \quad \mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{W}^T \mathbf{V}^T \quad (3.20)$$

Η ανάλυση αυτή δεν είναι μονοσήμαντη. Οι δύο τιμές του διανύσματος της βάσης που διαφέρουν κατά πρόσημο (Εξ. 3.19) αντιστοιχούν σε αντιμετάθεση των δύο εικόνων (Σχ. 3.2) και οφείλονται στην αβεβαιότητα της σχετικής θέσης τους (αριστερά ή δεξιά, πάνω ή κάτω, μπροστά ή πίσω). Επιπλέον, οι δύο πιθανοί πίνακες στροφής (Εξ. 3.20) αντιστοιχούν σε γεωμετρικές λήψεις που διαφέρουν κατά στροφή  $180^\circ$  της δεύτερης εικόνας περί την βάση, η οποία δεν διαταράσσει την συνεπιπεδότητα των οπτικών ακτίνων. Σε δεδομένο δεσμευμένο επιπολικό πίνακα αντιστοιχούν, έτσι, οι τέσσερις γεωμετρικές λήψεις του Σχ. 3.2. Η πολλαπλότητα αυτή λύσεων αντιμετωπίζεται απλώς με το να προσδιοριστούν εμπροσθοτομικά οι 3D συντεταγμένες σημείου του απεικονιζόμενου αντικειμένου και να επιλεγεί η μοναδική γεωμετρία στην οποία το ανακατασκευασμένο σημείο βρίσκεται μπροστά και από τις δύο μηχανές λήψης (περίπτωση πάνω αριστερά στο Σχ. 3.2).

Οι εκτιμήσεις για την βάση και τον πίνακα στροφής που προκύπτουν από τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα μπορούν φυσικά να βελτιωθούν περαιτέρω αν αξιοποιηθούν ως αρχικές τιμές σε μη γραμμική ελαχιστοτετραγωνική συνόρθωση με την συνθήκη συνεπιπεδότητας. Από τα δεδομένα για τα  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{R}$  και τους πίνακες εσωτερικού προσανατολισμού  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}'$  μπορούν, τέλος, να υπολογιστούν οι προβολικοί πίνακες μηχανής (Εξ. 2.54) των δύο εικόνων:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \left[ \mathbf{I}_{(3 \times 3)} \mid \mathbf{0} \right] \quad \text{και} \quad \mathbf{P}' = \mathbf{K}' [\mathbf{R} \mid \mathbf{B}] \quad (3.21)$$



Σχήμα 3.2. Οι τέσσερις γεωμετρίες λήψης που αντιστοιχούν σε δεσμευμένο επιπολικό πίνακα.

### 3.1.3.4 Ορισμός πόλων και επιπολικών ευθειών

Αφού αποκατασταθεί η συνεπιπεδότητα των ομόλογων ακτίνων με τον προσδιορισμό του σχετικού προσανατολισμού, είναι πλέον δυνατόν να οριστούν οι πόλοι όσο και οι επιπολικές ευθείες. Πόλοι στερεοζεύγους είναι τα σημεία τομής της βάσης με τα επίπεδα των εικόνων και προκύπτουν ως η απεικόνιση του κέντρου προβολής κάθε εικόνας στην άλλη. Αν είναι γνωστοί οι προβολικοί πίνακες μηχανής των εικόνων, οι συντεταγμένες των κέντρων προβολής τους υπολογίζονται από την λύση των γραμμικών ομογενών συστημάτων:

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{P}'\mathbf{C}' = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

ενώ οι πόλοι προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}\mathbf{C}' \text{ και } \mathbf{e}' = \mathbf{P}'\mathbf{C} \quad (3.23)$$

Κάθε εικονοσημείο  $\mathbf{x}$  ορίζει μέσω του αντίστοιχου προβολικού κέντρου ευθεία στον χώρο, η οποία προβαλλόμενη στην άλλη εικόνα ορίζει την επιπολική ευθεία του  $\mathbf{x}$ . Με βάση την προσέγγιση των Xu & Zhang (1996) για τον προσδιορισμό των επιπολικών ευθειών μέσω των προβολικών πινάκων της μηχανής δύο εικόνων, η οπτική ακτίνα του  $\mathbf{x}$  ορίζεται από το σύνολο των σημείων του χώρου που ικανοποιούν την Εξ. (2.56):

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{P}^+ \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C}, \text{ όπου } \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^T (\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1}$$

Δύο σημεία της είναι το προβολικό κέντρο  $\mathbf{C}$  και το  $\mathbf{P}^+ \mathbf{x}$ , τα οποία αντίστοιχα προβάλλονται στην δεύτερη εικόνα μέσω του πίνακα  $\mathbf{P}'$  στον πόλο  $\mathbf{e}'$  και στο σημείο  $\mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{x}$ . Αυτά τα σημεία ορίζουν την επιπολική ευθεία  $\mathbf{l}'$ :

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{x} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{x} = [\mathbf{P}'\mathbf{C}]_{\times} \mathbf{P}'\mathbf{P}^+ \mathbf{x} \quad (3.24)$$

Αντιστρέφοντας τους ρόλους των δύο εικόνων είναι κατ' αντιστοιχία δυνατόν να ορίσει κανείς στην πρώτη εικόνα την επιπολική ευθεία  $\mathbf{l}$  εικονοσημείου  $\mathbf{x}'$  της δεύτερης:

$$\mathbf{l} = [\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{P}\mathbf{P}'^+ \mathbf{x}' = [\mathbf{P}\mathbf{C}']_{\times} \mathbf{P}\mathbf{P}'^+ \mathbf{x}' \quad (3.25)$$

Οι Εξ. (3.24) και (3.25) έχουν ιδιαίτερη σημασία καθώς συνδέουν απευθείας τις ομογενείς συντεταγμένες σημείων με την ομογενή αναπαράσταση των αντίστοιχων επιπολικών ευθειών. Μέσω αυτών μπορούν να οριστούν οι προβολικές δέσμες των επιπολικών ευθειών

διά των πόλων, ενώ ταυτόχρονα λειτουργούν ως δεσμεύσεις, γεωμετρικές και αλγεβρικές, για τις πιθανές θέσεις των ομόλογων σημείων στις εικόνες.

Πράγματι, το ομόλογο  $\mathbf{x}'$  εικονοσημείου  $\mathbf{x}$  της πρώτης εικόνας οφείλει στην δεύτερη εικόνα να κείται επί της επιπολικής ευθείας  $l'$  και συνεπώς να ικανοποιεί την σχέση:

$$\mathbf{x}'^T l' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}'^T [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{P}' \mathbf{P}^+ \mathbf{x} = 0 \quad (3.26)$$

Η δέσμευση αυτή διευκολύνει αποφασιστικά την αυτόματη αναζήτηση ομόλογων σημείων σε προσανατολισμένες εικόνες. Οι πιθανές θέσεις για το ομόλογο ενός δεδομένου εικονοσημείου περιορίζονται επί της επιπολικής του ευθείας, οπότε η αναζήτησή του μετατρέπεται σε πρόβλημα κατ' αρχήν μονοδιάστατο.

## 3.2 2D Επιπολική Γεωμετρία

### 3.2.1 Επιπολικός πίνακας

Ο ορισμός των πόλων και των επιπολικών ευθειών στην προηγούμενη ενότητα προϋποθέτει γνωστούς προσανατολισμούς – εσωτερικό και σχετικό – των δύο εικόνων ενός ζεύγους. Παρατηρώντας όμως κανείς την μορφή της Εξ. (3.24) θα διαπιστώσει ότι περιγράφει μια μη αντιστρέψιμη ετερογραφία (βλ. ενότητα 2.5.3) που συνδέει σημεία με ευθείες του επιπέδου και αναπαριστάται από τον πίνακα:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{P}' \mathbf{P}^+ \quad (3.27)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{F}$  ονομάζεται εδώ *επιπολικός πίνακας* (*fundamental matrix*) του στερεοζεύγους και, λόγω του αντισυμμετρικού του μέρους  $[\mathbf{e}']_{\times}$ , έχει μηδενική ορίζουσα. Με αυτό είναι όντως συμβατή η γεωμετρία των επιπολικών ευθειών. Το σύνολό τους ορίζει, όπως ήδη αναφέρθηκε, δύο επίπεδες κεντρικές δέσμες ευθειών που βρίσκονται σε προβολική σχέση, συνεπώς υπάρχει ομογραφία του  $\mathbf{P}^1$  που τις συνδέει αμφιμονοσήμαντα αλλά και ετερογραφία που συνδέει σημεία της μιας με ευθείες της άλλης (Λαδόπουλος, 1972). Επίσης, καθώς σε δεδομένη ευθεία δια του πόλου της δεύτερης εικόνας δεν αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο της πρώτης αλλά ευθεία (η ομόλογη επιπολική ευθεία της), η ετερογραφία αυτή δεν αντιστρέφεται (έχει μηδενική ορίζουσα). Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει να αντιμετωπιστεί ο προσδιορισμός των επιπολικών ευθειών ως πρόβλημα ορισμένο στον 2D προβολικό χώρο. Αντί λοιπόν του σχετικού προσανατολισμού του στερεοζεύγους, ζητούμενη σε αυτό το πλαίσιο είναι η εύρεση της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας που αντιστοιχίζει σημεία της μιας εικόνας στις επιπολικές ευθείες της άλλης και, αλγεβρικά, ισοδυναμεί με υπολογισμό του επιπολικού πίνακα  $\mathbf{F}$ .

Σύμφωνα με το μαθηματικό μοντέλο της ετερογραφίας, η επιπολική ευθεία εικονοσημείου  $\mathbf{x}$  ορίζεται από την εξίσωση:

$$l' = \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (3.28)$$

ενώ η δέσμευση των ομόλογων εικονοσημείων να κείται επί των ομόλογων επιπολικών ευθειών εκφράζεται ως συζυγία ως προς την ετερογραφία  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{F} \mathbf{x} = 0 \quad (3.29)$$

Η Εξ. (3.29), και η ισοδύναμή της Εξ. (3.26), εμφανίζουν μεγάλη ομοιότητα με την έκφραση της συνθήκης συνεπιπεδότητας μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (Εξ. 3.6). Βασική διαφορά τους ωστόσο είναι η απευθείας χρήση των ομογενών συντεταγμένων των ομόλογων σημείων αντί των κανονικοποιημένων συντεταγμένων (ο ορισμός των οποίων απαιτεί γνωστό εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής λήψης). Η διαφορά αυτή δεν είναι απλώς αλγεβρική αλλά απορρέει από το γεγονός ότι οι δύο εξισώσεις εκφράζουν στην πραγματικότητα διαφορετικές γεωμετρικές δεσμεύσεις. Η Εξ. (3.6) συνιστά την μαθηματική έκφραση της 3D δέσμευσης συνεπιπεδότητας (*coplanarity constraint*) των ομόλογων οπτικών ακτίνων με την βάση του στερεοζεύγους – η Εξ. (3.29), αντίθετα, εκφράζει την 2D δέσμευση επιπολικότητας (*epipolar constraint*), δηλαδή την δέσμευση ομόλογων σημείων επί προβολικά αντίστοιχων επιπολικών ευθειών.

Αυτή ακριβώς η διαφορετική προσέγγιση επιτρέπει να ορίζεται η 2D επιπολική γεωμετρία ακόμα και σε περίπτωση εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές. Πράγματι, ο πίνακας  $F$  – αν και εδώ ορίστηκε μέσω των προβολικών πινάκων μηχανής του στερεοζεύγους (Εξ. 3.27) – είναι δυνατόν να υπολογίζεται, και μάλιστα γραμμικά, μέσω της Εξ. (3.30) απευθείας από μετρήσεις ομόλογων εικονοσημείων, δηλαδή χωρίς να προϋποτίθεται προσδιορισμός του σχετικού προσανατολισμού αλλά ούτε και γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων.

Η έννοια της 2D επιπολικής γεωμετρίας δεν είναι ξένη στην Φωτογραμμετρία. Πίνακα αντίστοιχο του  $F$  χρησιμοποίησε ο Bender (1971) για να περιγράψει εκείνο που ονόμασε “γενικευμένο σχετικό προσανατολισμό”, ενώ και η αξιοποίηση του μαθηματικού μοντέλου της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας (*singular correlation*) για τον ορισμό των επιπολικών ευθειών αποτέλεσε αντικείμενο του Thompson (1968) και αργότερα των Niini (1992, 1994, 2000) και Brandstätter (1996). Ωστόσο η επαναδιατύπωση και συστηματική μελέτη της 2D επιπολικής γεωμετρίας έλαβε χώρα τα τελευταία χρόνια στο επιστημονικό πεδίο της Όρασης Υπολογιστών. Εκεί κατέστη σαφές πως ο *επιπολικός πίνακας* (Luong, 1992) συνιστά μαθηματικό μοντέλο διακριτό από εκείνο του σχετικού προσανατολισμού, το οποίο περιγράφει την προβολική σχέση ανάμεσα στις δέσμες επιπολικών ευθειών απευθείας στο επίπεδο της εικόνας. Αποδεικνύεται, έτσι, ότι είναι εφικτό να προσδιορίζεται η επιπολική γεωμετρία εικόνων προερχόμενων από μηχανές άγνωστης εσωτερικής γεωμετρίας (Faugeras, 1992, Hartley, 1992, Hartley et al., 1992). Παράλληλα, διερευνήθηκαν οι ιδιότητες του επιπολικού πίνακα και διατυπώθηκαν εναλλακτικοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του (Luong & Faugeras, 1996, Hartley, 1997a, Zhang, 1998a και 1998b, Hartley & Zisserman, 2000, Faugeras & Luong, 2001).

### 3.2.2 Ιδιότητες του επιπολικού πίνακα

Ο επιπολικός πίνακας  $F$  αποτελεί γενίκευση του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα  $E$ . Ορίζεται και αυτός από 8 στοιχεία (όλοι οι πίνακες  $\lambda F$  με  $\lambda \neq 0$  είναι ισοδύναμοι), αλλά η μοναδική αλγεβρική δέσμευση που οφείλει να ικανοποιεί είναι εκείνη της μηδενικής ορίζουσας. Συνεπώς, ο  $F$  έχει 7 βαθμούς ελευθερίας αντί των 5 του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα.

Οι δύο πίνακες συνδέονται μέσω της σχέσης<sup>5</sup>:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-T} \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \quad (3.30)$$

ή και αντίστροφα:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}'^T \mathbf{F} \mathbf{K} \quad (3.31)$$

Μέσω του επιπολικού πίνακα ορίζεται στην δεύτερη εικόνα η επιπολική ευθεία εικονοσημείου  $\mathbf{x}$  της πρώτης (Εξ. 3.28), ενώ αν αντιστραφούν οι ρόλοι των δύο εικόνων οι επιπολικές ευθείες προσδιορίζονται μέσω του ανάστροφου  $\mathbf{F}^T$ :

$$\mathbf{l} = \mathbf{F}^T \mathbf{x}' \quad (3.32)$$

Οι πόλοι  $\mathbf{e}$  και  $\mathbf{e}'$  των εικόνων προκύπτουν από τις λύσεις των γραμμικών συστημάτων:

$$\mathbf{F} \mathbf{e} = \mathbf{0} \text{ και } \mathbf{F}^T \mathbf{e}' = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

Έστω  $\mathbf{l}$  ευθεία δια του πόλου  $\mathbf{e}$  στην πρώτη εικόνα. Η ευθεία αυτή είναι η τομή του επιπέδου της εικόνας με κάποιο επιπολικό επίπεδο που τέμνει την άλλη εικόνα στην ευθεία  $\mathbf{l}'$ . Προφανώς η επιπολική ευθεία κάθε σημείου της  $\mathbf{l}$  είναι η  $\mathbf{l}'$ , και αντίστροφα. Οι ευθείες  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}'$  καλούνται ομόλογες επιπολικές ευθείες, και η μια μπορεί να προσδιοριστεί από την άλλη μέσω του επιπολικού πίνακα. Κάθε ευθεία της πρώτης εικόνας μη διερχόμενη δια του πόλου ορίζει σημείο τομής  $\mathbf{x}$  με την  $\mathbf{l}$ , και αυτό με την σειρά του ορίζει την επιπολική ευθεία  $\mathbf{l}'$  (Εξ. 3.28). Μια τέτοια ευθεία, που προσφέρεται εν προκειμένω, είναι η οριζόμενη σε ομογενείς συντεταγμένες από το διάνυσμα  $\mathbf{e}$ , αφού στην γενική περίπτωση  $\mathbf{e}^T \mathbf{e} \neq 0$  (βλ. Εξ. 2.8). Έτσι, οι ομόλογες επιπολικές ευθείες συνδέονται με την σχέση:

$$\mathbf{l}' = \mathbf{F}[\mathbf{e}]_{\times} \mathbf{l} \text{ και } \mathbf{l} = \mathbf{F}^T[\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{l}' \quad (3.34)$$

### 3.2.3 Γεωμετρική ερμηνεία του επιπολικού πίνακα

Μέχρι στιγμής ο επιπολικός πίνακας έχει οριστεί μέσω των προβολικών πινάκων μηχανής δύο εικόνων (Εξ. 3.27), μέσω του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα (Εξ. 3.30) αλλά και ως μη αντιστρέψιμη ετερογραφία στο προβολικό επίπεδο. Στην βιβλιογραφία έχουν υιοθετηθεί εναλλακτικές γεωμετρικές προσεγγίσεις που οδηγούν σε κοινό μαθηματικό μοντέλο με εκείνο του επιπολικού πίνακα, αλλά συχνά σε διαφορετική ερμηνεία των παραμέτρων του.

#### 3.2.3.1 Πόλοι και ομογραφία του $\mathbf{P}^1$

Οι δέσμες των επιπολικών ευθειών στις δύο εικόνες είναι προβολικές. Εάν οι ευθείες κάθε δέσμης αντιμετωπιστούν ως στοιχεία του μονοδιάστατου προβολικού χώρου  $\mathbf{P}^1$  (βλ. ενότητα 2.5.1.1) τότε υπάρχει ομογραφία που τις συνδέει αμφιμονοσήμαντα. Υιοθετώντας την συγκεκριμένη γεωμετρική προσέγγιση οι Luong et al. (1993) και Luong & Faugeras (1996) εξέφρασαν τα στοιχεία του επιπολικού πίνακα συναρτήσει της ομογραφίας του  $\mathbf{P}^1$  και της θέσης των δύο πόλων στα επίπεδα των εικόνων. Εάν οι πόλοι δεν βρίσκονται στο άπειρο (περίπτωση εικόνων παράλληλων στην βάση) μπορούν να εκφραστούν σε ομογενείς συν-

<sup>5</sup> Για να είναι συμβατές οι Εξ. (3.30) και (3.31) με την Εξ. (3.6) πρέπει κανονικά να χρησιμοποιηθεί ο ανάστροφος του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Επιλέχθηκε ωστόσο η παρουσίαση της συγκεκριμένης μορφής των εξισώσεων, που είναι συνήθης στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών, στην οποία στον ορισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα το διάνυσμα της βάσης και ο πίνακας στροφής αναφέρονται στο σύστημα συντεταγμένων της δεύτερης εικόνας.

τεταγμένες ως  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ 1]^T$  και  $\mathbf{e}' = [e'_1 \ e'_2 \ 1]^T$ . Κάθε ευθεία  $l$  της δέσμης επιπολικών ευθειών της πρώτης εικόνας και  $l'$  της δεύτερης ορίζονται από τις κλίσεις τους  $s$  και  $s'$ , αντίστοιχα, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν από την τομή κάθε ευθείας με την ευθεία του απείρου  $l_\infty$  (βλ. ενότητα 2.5.2.1). Η ομογραφία του  $P^1$  που τις συνδέει αμφιμονοσήμαντα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας και γράφεται ως:

$$s' = \frac{as + b}{cs + d} \quad (3.35)$$

όπου μόνο οι λόγοι των τεσσάρων παραμέτρων είναι σημαντικοί. Αποδεικνύεται ότι ο επιπολικός πίνακας  $\mathbf{F}$  είναι ίσος με:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} b & a & -ae_2 - be_1 \\ -d & -c & ce_2 + de_1 \\ de'_2 - be'_1 & ce'_2 - ae'_1 & -ce'_2e_2 - de'_2e_1 + ae'_2e'_1 + be_1e'_1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Σύμφωνα με την παραμετροποίηση αυτή απαιτούνται 4 βαθμοί ελευθερίας για τον ορισμό των πόλων στις δύο εικόνες και 3 για την ομογραφία. Το σύνολό τους συμφωνεί με τους 7 βαθμούς ελευθερίας του επιπολικού πίνακα. Ακόμα, έτσι εκφραζόμενος ο πίνακας  $\mathbf{F}$  έχει μηδενική ορίζουσα καθώς οι στήλες του είναι γραμμικά εξαρτημένες. Χάρη σε αυτή την ιδιότητα, η συγκεκριμένη παραμετροποίηση χρησιμοποιείται συχνά σε αλγορίθμους υπολογισμού του επιπολικού πίνακα (βλ. ενότητα 3.2.4.3) ώστε να επιβάλλεται άμεσα η δέσμευση μηδενικής ορίζουσας.

Η Εξ. (3.36) μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης κατά την αντίστροφη λογική για να προσδιοριστούν οι θέσεις των πόλων και οι παράμετροι της ομογραφίας μεταξύ των ομόλογων επιπολικών ευθειών:

$$\begin{aligned} a &= f_{12} & b &= f_{11} \\ c &= -f_{22} & d &= -f_{21} \\ e_1 &= \frac{f_{23}f_{12} - f_{22}f_{13}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} & e_2 &= \frac{f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} \\ e'_1 &= \frac{f_{32}f_{21} - f_{22}f_{31}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} & e'_2 &= \frac{f_{31}f_{12} - f_{11}f_{32}}{f_{22}f_{11} - f_{21}f_{12}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

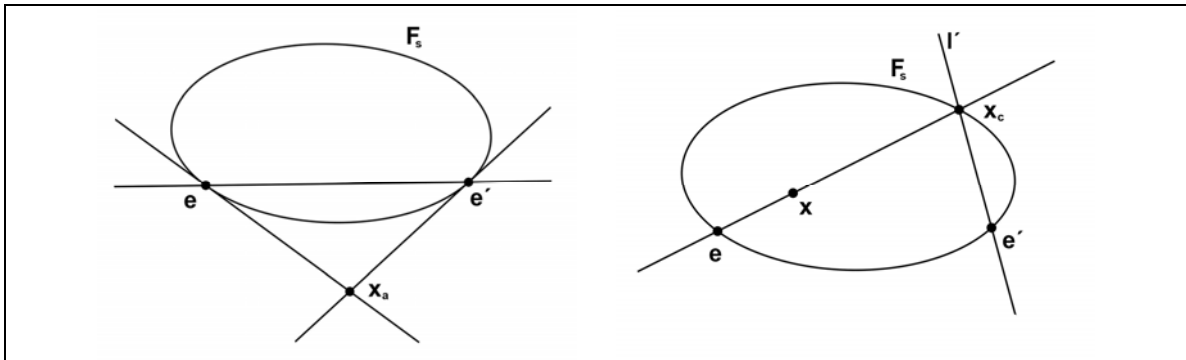
### 3.2.3.2 Πόλοι και κωνική τομή

Εάν τοποθετηθούν οι δέσμες των επιπολικών ευθειών στο ίδιο επίπεδο τότε, κατά το θεώρημα του Steiner (βλ. ενότητα 2.5.1.1), οι ομόλογες επιπολικές ευθείες, καθώς συνδέονται μέσω ομογραφίας, θα τέμνονται επί κωνικής τομής διερχόμενης από τους δύο πόλους. Αν επιπλέον θεωρηθεί κοινό σύστημα συντεταγμένων (υπέρθυση των εικόνων ώστε να ταυτίζονται τα δύο συστήματα εικονοσυντεταγμένων), τότε η κωνική τομή είναι ταυτόχρονα ο γεωμετρικός τύπος όλων των ομόλογων εικονοσημείων που ταυτίζονται στις δύο εικόνες.

Εάν οριστούν το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό μέρος του επιπολικού πίνακα με τρόπο ανάλογο της Εξ. (3.13):

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) \text{ και } \mathbf{F}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T), \text{ με } \mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_a \quad (3.38)$$

τότε αποδεικνύεται ότι η κωνική τομή της τελευταίας περίπτωσης αναπαριστάται σε ομογενείς συντεταγμένες από τον πίνακα  $F_s$  (Thompson, 1968, Maybank, 1993, Hartley & Zisserman, 2000). Επίσης, το σημείο  $x_a$  που ορίζεται ως  $[x_a]_x = F_a$  και η ευθεία  $ee'$  που συνδέει τους δύο πόλους έχουν σχέση πόλου-πολικής ως προς την κωνική  $F_s$  (Σχ. 3.3, αριστερά). Μέσω της κωνικής τομής  $F_s$  μπορεί να προσδιοριστεί γεωμετρικά η επιπολική ευθεία  $l'$  που αντιστοιχεί σε εικονοσημείο  $x$ . Το σημείο  $x$  με τον πόλο  $e$  ορίζουν ευθεία που τέμνει την κωνική στο σημείο  $x_c$ . Το σημείο αυτό ανήκει επίσης στην επιπολική ευθεία  $l'$ . Έτσι, η τελευταία προκύπτει με την σύνδεση του  $x_c$  με τον πόλο  $e'$  (Σχ. 3.3, δεξιά). Η συγκεκριμένη γεωμετρική ερμηνεία εξηγεί επίσης τους 7 βαθμούς ελευθερίας του επιπολικού πίνακα, καθώς 5 βαθμοί ελευθερίας απαιτούνται για τον ορισμό της κωνικής τομής  $F_s$  και 2 επιπλέον για τον ορισμό των πόλων επί αυτής.



Σχήμα 3.3. Γεωμετρική ερμηνεία του επιπολικού πίνακα.

### 3.2.3.3 Μεταφορά σημείων μέσω επιπέδου

Οι Hartley & Gupta (1993) ακολούθησαν διαφορετική γεωμετρική προσέγγιση για να ορίσουν τις επιπολικές ευθείες και κατ' επέκταση τον επιπολικό πίνακα, προβάλλοντας τα σημεία της μιας εικόνας στην άλλη μέσω τυχαίου επιπέδου. Κάθε εικονοσημείο  $x$  της πρώτης εικόνας ορίζει μια 3D οπτική ακτίνα. Τομή της με τυχαίο επίπεδο  $\pi$  του χώρου που δεν περιλαμβάνει τα οπτικά κέντρα ορίζει σημείο  $x_\pi$  (προφανώς διαφορετικό από το πραγματικό  $x$  του αντικειμένου), το οποίο προβάλλεται στην δεύτερη εικόνα ως  $x'_\pi$  (Σχ. 3.4). Λόγω της προβολής αυτής μέσω επιπέδου, τα σημεία  $x$  και  $x'_\pi$  στις δύο εικόνες συνδέονται μέσω ομογραφίας (βλ. ενότητα 2.5.1.2). Υπάρχει άρα πίνακας  $H_\pi$  διαστάσεων  $3 \times 3$  τέτοιος ώστε:

$$x'_\pi = H_\pi x \quad (3.39)$$

Επιπλέον, το σημείο  $x_\pi$  ανήκει στην οπτική ακτίνα του  $x$ , άρα η προβολή του  $x'_\pi$  στην δεύτερη εικόνα ανήκει στην επιπολική ευθεία  $l'$ . Έτσι η τελευταία προκύπτει από την σύνδεση του  $x'_\pi$  με τον πόλο  $e'$  της δεύτερης εικόνας:

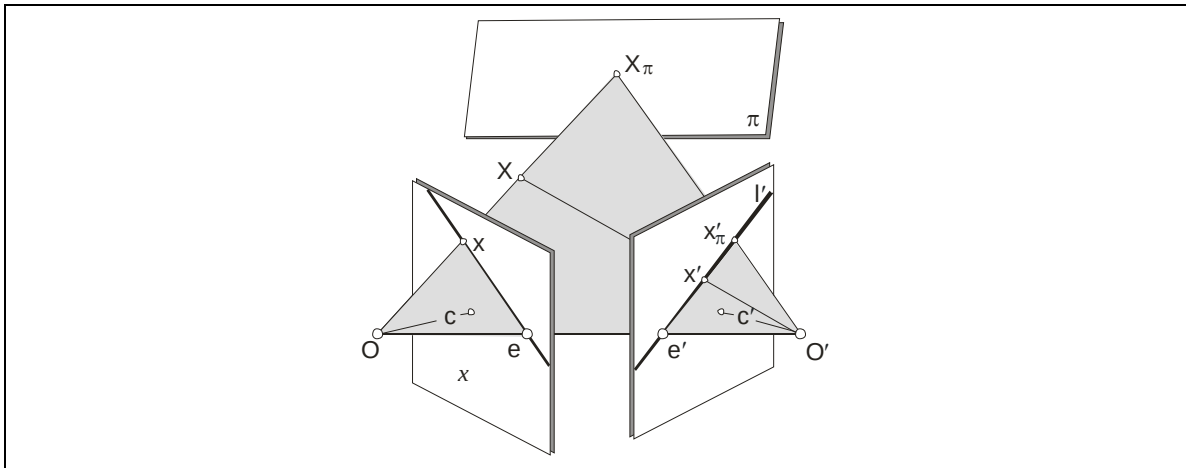
$$l' = [e']_x x'_\pi = [e']_x H_\pi x \quad (3.40)$$

Στην πραγματικότητα, για να οριστεί η επιπολική ευθεία  $l'$  δεν απαιτείται γνώση της θέσης του πόλου  $e'$  και της ομογραφίας  $H_\pi$  αλλά αρκεί ο προσδιορισμός του πίνακα:

$$F = [e']_x H_\pi \quad (3.41)$$

Ο επιπολικός πίνακας ορίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο ως γινόμενο αντισυμμετρικού πίνακα

και ομογραφίας<sup>6</sup>.



Σχήμα 3.4. Μεταφορά σημείων μέσω τυχαίου επιπέδου και ορισμός επιτολικών ευθειών.

Σε αντίστοιχη σχέση κατέληξαν και οι Boufama & Mohr (1995) και Sinclair et al. (1995). Οι Luong & Vieville (1996) απέδειξαν την ισοδυναμία της Εξ. (3.41) με την (3.27), δείχνοντας ότι αν για την μεταφορά των σημείων επιλεγεί το επίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$  τότε η ομογραφία  $H_\pi$  είναι ίση με:

$$H_\pi = H_\infty = P'P^\dagger \quad (3.42)$$

Οι Luong & Faugeras (1993), επιζητώντας να υπολογίσουν τον επιτολικό πίνακα από σημεία που κείνται σε δύο ή περισσότερα επίπεδα, διατύπωσαν την δέσμευση που οφείλουν να ικανοποιούν οι ομογραφίες προκειμένου να είναι συμβατές με επιτολικό πίνακα στερεοζεύγους. Κάθε ομογραφία  $H$  που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$H^T F + F^T H = 0 \quad (3.43)$$

μεταφέρει τα σημεία της πρώτης εικόνας σε σημεία της δεύτερης που βρίσκονται επί των επιτολικών ευθειών. Έδειξαν επίσης ότι αν από σημεία που είναι γνωστά ως συνεπίπεδα υπολογιστεί η ομογραφία  $H$  που συνδέει τις απεικονίσεις τους στις εικόνες, τότε δύο επιπλέον ομολογίες σημείων εκτός του επιπέδου των πρώτων αρκούν για να οριστεί ο πόλος  $e'$ . Όντως, από κάθε ομολογία  $x$  και  $x'$  σημείου (εκτός του επιπέδου) μπορεί να κατασκευαστεί η επιτολική του ευθεία δια των σημείων  $x'$  και  $Hx$ . Η τομή δύο τέτοιων επιτολικών ευθειών ορίζει τον πόλο  $e'$ . Στην ίδια λογική στηρίζεται και ο “αλγόριθμος των 6 σημείων” (6-point algorithm) του Beardsley (1992) για τον υπολογισμό της 2D επιτολικής γεωμετρίας από 6 σημεία, 4 εκ των οποίων είναι συνεπίπεδα.

### 3.2.4 Αλγόριθμοι υπολογισμού του επιτολικού πίνακα

Όπως προαναφέρθηκε, βασικό πλεονέκτημα του επιτολικού πίνακα είναι η δυνατότητα να υπολογίζεται αυτός, απευθείας μέσω της Εξ. (3.29), από μετρήσεις ομολογων σημείων σε

<sup>6</sup> Υπενθυμίζεται εδώ ότι ο δεσμευμένος επιτολικός πίνακας αναλύεται σε γινόμενο αντισυμμετρικού και ορθογώνιου πίνακα. Στην διαφορά αυτή οφείλονται και οι διαφορετικές αλγεβρικές ιδιότητες των δύο πινάκων.



εικόνες άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού. Οι μετρήσεις στο επικαλυπτόμενο τμήμα των εικόνων εκφράζονται σε ομογενείς συντεταγμένες, ωστόσο μπορούν να πραγματοποιηθούν σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων (όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις της φωτογραμμετρικής αναγωγής και του άμεσου γραμμικού μετασχηματισμού). Αποφεύγεται κατ' αυτόν τον τρόπο το, τυπικό στην φωτογραμμετρική πρακτική, στάδιο του αφινικού μετασχηματισμού και η ανάγκη για εικονοσήματα, ενώ είναι δυνατόν να αντιμετωπισθούν ακόμα και τμήματα εικόνων. Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλοί τρόποι για την επίλυση της Εξ. (3.29) από περίσσεια ομόλογων σημείων, οι οποίοι διαφοροποιούνται ως προς την ποσότητα που ελαχιστοποιείται κατά την συνόρθωση και την επιλογή των 7 ανεξάρτητων παραμέτρων ώστε ο υπολογιζόμενος επιτολικός πίνακας να ικανοποιεί την δέσμευση μηδενικής ορίζουσας. Στην συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικότεροι σχετικοί αλγόριθμοι.

### 3.2.4.1 Γραμμική επίλυση από περίσσεια ομόλογων σημείων

Η απευθείας γραμμική επίλυση της Εξ. (3.29) από 8 ή περισσότερες ομολογίες σημείων – που ακολουθεί το πρότυπο επίλυσης του δεσμευμένου επιτολικού πίνακα των Longuet-Higgins (1981) και Tsai & Huang (1984) – είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως “αλγόριθμος των 8 σημείων” (*8-point algorithm*). Έστω  $\mathbf{x} = [x_i \ y_i \ 1]^T$  και  $\mathbf{x}' = [x'_i \ y'_i \ 1]^T$  οι συντεταγμένες ζεύγους ομόλογων σημείων στις δύο εικόνες και  $\mathbf{f}$  διάνυσμα που περιέχει τα στοιχεία του επιτολικού πίνακα:

$$\mathbf{f} = [f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{31} \ f_{32} \ f_{33}]^T \quad (3.44)$$

Η Εξ. (3.29) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{f} = 0 \quad (3.45)$$

όπου:

$$\mathbf{A}_i = [x_i x'_i \ y_i x'_i \ x'_i \ x_i y'_i \ y_i y'_i \ y'_i \ x_i \ y_i \ 1] \quad (3.46)$$

Εάν έχουν μετρηθεί  $n \geq 8$  ομόλογα σημεία, προκύπτει το ομογενές σύστημα εξισώσεων:

$$\mathbf{A}_{n \times 9} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Ένα ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις (πέραν της προφανούς  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ) της μορφής  $\lambda \mathbf{f}$ . Το πρόβλημα μπορεί να ξεπεραστεί εάν οριστεί αυθαίρετα ένα στοιχείο του  $\mathbf{f}$  (πχ.  $f_{33} = 1$ ). Κατόπιν η Εξ. (3.47) μπορεί να επιλυθεί γραμμικά με μεθόδους γραμμικής άλγεβρας ή την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Αποδεικνύεται επίσης (Golub & van Loan, 1989) ότι εάν

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (3.48)$$

η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών (SVD) του πίνακα  $\mathbf{A}$ , τότε η τελευταία στήλη του πίνακα  $\mathbf{V}$  αντιστοιχεί στην ελαχιστοτετραγωνική λύση  $\mathbf{f}$  του προβλήματος:

$$\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{A}_{n \times 9} \mathbf{f}\|^2 \text{ υπό την δέσμευση } \|\mathbf{f}\|^2 = 1 \quad (3.49)$$

Η δέσμευση μοναδιαίας νόρμας έχει το πλεονέκτημα ότι αίρει το πρόβλημα της απειρίας λύσεων του ομογενούς συστήματος με γενικότερο τρόπο, αποφεύγοντας τον κίνδυνο να οριστεί αυθαίρετα κάποιο στοιχείο του επιτολικού πίνακα που ενδεχομένως στην πραγματικότητα είναι μηδενικό. Επιπλέον, μέσω της SVD είναι εφικτός ο προσδιορισμός του επιτολικού πίνακα από μετρήσεις 7 μόνο ομόλογων σημείων.

### 3.2.4.2 Επίλυση από 7 ομολογίες σημείων

Στην περίπτωση αυτή, όπως εξηγεί ο Hartley (1994), κατά την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα  $\mathbf{A}$  οι δύο τελευταίες στήλες του πίνακα  $\mathbf{V}$ , οι  $\mathbf{f}_1$  και  $\mathbf{f}_2$ , ορίζουν δύο πίνακες διαστάσεων  $3 \times 3$  (με τρόπο αντίστροφο της Εξ. 3.44), τους  $\mathbf{F}_1$  και  $\mathbf{F}_2$ , οι οποίοι με την σειρά τους ορίζουν μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων του επιπολικού πίνακα της μορφής:

$$\mathbf{F} = a\mathbf{F}_1 + (1-a)\mathbf{F}_2 \quad (3.50)$$

Η δέσμευση πως ο πίνακας  $\mathbf{F}$  έχει μηδενική ορίζουσα οδηγεί σε εξίσωση  $3^{\text{ου}}$  βαθμού ως προς την παράμετρο  $a$ . Αν κρατηθούν μόνο οι πραγματικές λύσεις της, προκύπτουν τρεις το πολύ πιθανοί επιπολικοί πίνακες. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως “αλγόριθμος των 7 σημείων” (*7-point algorithm*) και αποτελεί συστατικό στοιχείο αλγορίθμων εντοπισμού χονδροειδών σφαλμάτων σε ομολογίες σημείων που έχουν μετρηθεί αυτόματα σε στερεοζεύγος (βλ. ενότητα 3.2.4.5).

Διαφορετική γεωμετρική μέθοδο προσδιορισμού των δύο πόλων και κατ’ επέκταση του επιπολικού πίνακα από 7 ομολογίες σημείων παρουσίασαν οι Luong & Faugeras (1998). Η προσέγγισή τους βασίζεται στην διατήρηση του διπλού λόγου και την λύση του προβλήματος του M. Chasles από τον R. Sturm (βλ. ενότητα 1.2.2.1). Οι πόλοι προκύπτουν από την τομή δύο καμπυλών  $3^{\text{ου}}$  βαθμού και ορίζουν επίσης τρεις πιθανές λύσεις για τον επιπολικό πίνακα.

### 3.2.4.3 Μη γραμμική επίλυση

Οι Luong et al. (1993) και Luong & Faugeras (1996) επισήμαναν πως η γραμμική επίλυση του επιπολικού πίνακα (βλ. ενότητα 3.2.4.1) δεν καταλήγει σε πίνακα μηδενικής ορίζουσας αφού η δέσμευση αυτή αγνοείται. Παράλληλα, η λύση είναι ευαίσθητη σε σφάλματα μετρήσεων και η ακρίβειά της εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων των ομόλογων σημείων. Έτσι, προτείνουν μη γραμμική συνόρθωση με κατάλληλη παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα. Ο τελευταίος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο 7 ανεξάρτητων παραμέτρων εάν οριστεί αυθαίρετα ένα στοιχείο του και εκφραστεί μια γραμμή του (ή μια στήλη του) ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα μέσω των πόλων και της ομογραφίας του  $\mathbb{P}^1$  (ενότητα 3.2.3.1). Αρχικές τιμές για τις 7 επιλεγμένες παραμέτρους υπολογίζονται με τον “αλγόριθμο των 8 σημείων”, και κατόπιν οι βέλτιστες τιμές τους προσδιορίζονται με επαναλήψεις που ελαχιστοποιούν την τιμή του αθροίσματος:

$$\sum_i (\mathbf{x}_i^T \mathbf{F} \mathbf{x}_i)^2 \quad (3.51)$$

Ο Zhang (1998a) υποστηρίζει πως για τον βέλτιστο προσδιορισμό του επιπολικού πίνακα πρέπει να ελεγχθούν όλες οι πιθανές παραμετροποιήσεις του και να επιλεγεί τελικά εκείνη που προσφέρει αποτελέσματα μεγαλύτερης ακρίβειας.

Ένα άλλο θέμα που τίθεται κατά τον μη γραμμικό υπολογισμό του επιπολικού πίνακα αφορά την ποσότητα που ελαχιστοποιείται στην συνόρθωση. Το “αλγεβρικό κλείσιμο” της Εξ. (3.47) που εκφράζει η Εξ. (3.51) δεν είναι το ενδεδειγμένο (Zhang, 1998a) καθώς εισάγει συστηματικά σφάλματα στην θέση των πόλων (τίνουν προς το κέντρο της εικόνας).

Αντ' αυτού είναι προτιμότερο να ελαχιστοποιείται κάποια γεωμετρική ποσότητα, με συνήθεστερη την απόσταση των ομόλογων σημείων στις δύο εικόνες από τις αντίστοιχες επιπολικές ευθείες (Luong et al., 1993, Luong & Faugeras, 1996, Zhang, 1998a):

$$\min \sum_i \left( d^2(\mathbf{x}'_i, \mathbf{F}\mathbf{x}_i) + d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{F}^T \mathbf{x}'_i) \right) \quad (3.52)$$

ή εάν  $\mathbf{F}\mathbf{x}_i = [l_1 \ l_2 \ l_3]^T$  και  $\mathbf{F}^T \mathbf{x}'_i = [l'_1 \ l'_2 \ l'_3]^T$ :

$$\min \sum_i \left( \frac{1}{l_1^2 + l_2^2} + \frac{1}{l'^2_1 + l'^2_2} \right) (\mathbf{x}'_i{}^T \mathbf{F}\mathbf{x}_i)^2 \quad (3.53)$$

#### 3.2.4.4 Βελτιώσεις της γραμμικής επίλυσης

Ο Hartley (1997) υπερασπίζεται “τον αλγόριθμο των 8 σημείων” προτείνοντας βελτιώσεις της γραμμικής επίλυσης που αντιμετωπίζουν το ζήτημα της μηδενικής ορίζουσας και την ευαισθησία στον θόρυβο των μετρήσεων. Για την ελαχιστοποίηση της τελευταίας αλλά και των συστηματικών σφαλμάτων που εισάγει η επιλογή συστήματος συντεταγμένων των ομόλογων σημείων προτείνει την κανονικοποίηση των εικονοσυντεταγμένων. Έτσι, πριν από την γραμμική επίλυση μετασχηματίζονται γραμμικά (μετάθεση και κλίμακα) οι μετρήσεις των ομόλογων σημείων σε κάθε εικόνα ώστε το κέντρο βάρους τους να ταυτιστεί με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και η μέση απόστασή τους από αυτήν να είναι ίση με  $\sqrt{2}$ :

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{T}\mathbf{x} \text{ και } \mathbf{x}'_i = \mathbf{T}'\mathbf{x}' \quad (3.54)$$

Εάν  $\mathbf{F}_i$  ο επιπολικός πίνακας που υπολογίστηκε από τις κανονικοποιημένες συντεταγμένες των ομόλογων σημείων, τότε ο  $\mathbf{F}$  που αντιστοιχεί στις αρχικές μετρήσεις προκύπτει ως:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}'\mathbf{F}_i\mathbf{T} \quad (3.55)$$

Το πρόβλημα της μηδενικής ορίζουσας αντιμετωπίζεται σε επόμενο βήμα με μηδενισμό της τελευταίας ιδιάζουσας τιμής του πίνακα  $\mathbf{F}$ . Έτσι, εάν:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathbf{V}^T \quad (3.56)$$

η ανάλυση ιδιάζουσών τιμών (SVD) του επιπολικού πίνακα που υπολογίστηκε κατά τα προηγούμενα, τότε ο πίνακας  $\mathbf{F}'$ :

$$\mathbf{F}' = \mathbf{U}\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)\mathbf{V}^T \quad (3.57)$$

έχει μηδενική ορίζουσα και διαφέρει από τον  $\mathbf{F}$  κατά το ελάχιστο δυνατόν (το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των στοιχείων τους είναι ελάχιστο). Αντίστοιχη μέθοδο είχαν προτείνει οι Tsai & Huang (1984) για τον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Συγκρινόμενος με τις πιο σύνθετες μη γραμμικές προσεγγίσεις ο “κανονικοποιημένος αλγόριθμος των 8 σημείων” (*normalized 8-point algorithm*) του Hartley (1997) προσφέρει αποτελέσματα αντίστοιχης ακρίβειας.

#### 3.2.4.5 Εντοπισμός χονδροειδών σφαλμάτων στις ομολογίες σημείων (RANSAC)

Προϋπόθεση για να καταλήξουν σε αξιόπιστα αποτελέσματα οι αναφερθέντες αλγόριθμοι είναι η κανονική κατανομή των σφαλμάτων στις μετρήσεις. Χονδροειδή σφάλματα (τάξης αρκετών εικονοψηφίδων) στις ομολογίες – αναμενόμενα όταν τα ομόλογα σημεία μετρού-

νται αυτόματα με τεχνικές συνταύτισης εικόνων (βλ. ενότητα 1.2.2.5) – μπορούν να οδηγήσουν τις συνορθώσεις σε εσφαλμένες λύσεις ή και σε αδυναμία σύγκλισης. Πριν λοιπόν από την τελική συνόρθωση υπολογισμού του επιτολικού πίνακα απαιτείται εντοπισμός των εσφαλμένων ομολογιών. Στην βιβλιογραφία έχουν διατυπωθεί διαφορετικοί αλγόριθμοι εντοπισμού χονδροειδών σφαλμάτων (Torr & Murray, 1993, Shapiro & Brady, 1995, Chai & Ma, 1998, Tang et al., 1999, Torr & Zisserman, 2000, Torr, 2002). Δημοφιλέστερος ανάμεσά τους είναι ο αλγόριθμος RANSAC (*random sampling consensus*) των Fischler & Bolles (1981), ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά σε υπολογισμό επιτολικού πίνακα από τους Torr & Murray (1993). Σε επόμενη εργασία τους, μάλιστα, οι ίδιοι (Torr & Murray, 1997) τον συγκρίνουν με άλλους αλγορίθμους, καταλήγοντας ότι συγκαταλέγεται ανάμεσα στους αποτελεσματικότερους ακόμα και σε περιπτώσεις όπου οι εσφαλμένες ομολογίες είναι περισσότερες από τις ορθές. Συνοπτικά, η μέθοδος RANSAC, προσαρμοσμένη στον υπολογισμό του επιτολικού πίνακα, συνίσταται στα παρακάτω βήματα:

- Από το σύνολο των ομολογιών επιλέγεται τυχαία υποσύνολο, αποτελούμενο από τον ελάχιστο αριθμό σημείων που απαιτείται για να υπολογιστεί ο επιτολικός πίνακας (7 ή 8).
- Από αυτά υπολογίζεται ο επιτολικός πίνακας με τον “αλγόριθμο των 7 σημείων”. Προκύπτουν 3 το πολύ πραγματικές λύσεις  $F_i$  (εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο “αλγόριθμος των 8 σημείων”).
- Για κάθε ομολογία σημείων εκτός του χρησιμοποιηθέντος υποσυνόλου υπολογίζεται η μέση απόσταση από τις αντίστοιχες επιτολικές γραμμές (Εξ. 3.52 και 3.53) και ελέγχεται κατά πόσο είναι μικρότερη από ένα κατώφλι (ποσοστό της διάστασης της εικονοψηφίδας). Τα σημεία που υπερβαίνουν το κατώφλι θεωρούνται εσφαλμένα για την συγκεκριμένη λύση  $F_i$  του επιτολικού πίνακα.
- Τα παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται  $N$  φορές. Κατ’ αυτόν τον τρόπο προκύπτουν για τον επιτολικό πίνακα  $3 \times N$  (ή  $N$  εφόσον επιλεγεί ο “αλγόριθμος των 8 σημείων”) εκτιμήσεις καθώς και το πλήθος των εσφαλμένων ομολογιών για κάθε μια.
- Επιλέγεται εκείνη η λύση που οδηγεί στον μικρότερο αριθμό χονδροειδών σφαλμάτων στις ομολογίες σημείων και άρα βρίσκεται σε καλύτερη “συμφωνία” (*consensus*) με τις μετρήσεις.
- Αφού αφαιρεθούν οι εσφαλμένες ομολογίες υπολογίζεται ο επιτολικός πίνακας από όλα τα υπόλοιπα σημεία με έναν από τους προαναφερθέντες αλγορίθμους.

Ο αριθμός  $N$  των επαναλήψεων που απαιτείται ώστε να είναι βέβαιο (με πιθανότητα  $p$ ) ότι μια από τις υποομάδες που επιλέγονται περιλαμβάνει μόνο σωστές ομολογίες (και άρα θα οδηγήσει σε σωστό εντοπισμό των χονδροειδών σφαλμάτων) δίνεται από την σχέση:

$$N = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\varepsilon)^s)} \quad (3.58)$$

όπου  $s$  ο αριθμός των ελάχιστων απαιτούμενων σημείων για την επίλυση του επιτολικού πίνακα και  $\varepsilon$  εκτίμηση του ποσοστού των εσφαλμένων ομολογιών.

### 3.2.4.6 Κρίσιμες γεωμετρίες

Ως κρίσιμες χαρακτηρίζονται οι γεωμετρίες για τις οποίες δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ο επιτολικός πίνακας. Σε ό,τι αφορά την γεωμετρία των εικόνων δεν υπάρχει κρίσιμη γεωμετρία για τον  $F$ , πέρα από την ταύτιση των δύο κέντρων προβολής (οπότε οι δύο ει-

κόνες συνδέονται μέσω ομογραφίας). Πράγματι, ο επιπολικός πίνακας μπορεί σε κάθε περίπτωση να προσδιοριστεί μοναδικά από τους προσανατολισμούς των δύο εικόνων ή ισοδύναμα από τους προβολικούς πίνακες μηχανής (Εξ. 3.27). Ωστόσο, ο όρος “κρίσιμη γεωμετρία” χρησιμοποιείται συνήθως σε σχέση με τον υπολογισμό του  $F$  από ομολογίες σημείων στις δύο εικόνες, αναφερόμενος σε εκείνες τις κατανομές των σημείων αυτών στον χώρο που δεν οδηγούν σε μοναδική λύση.

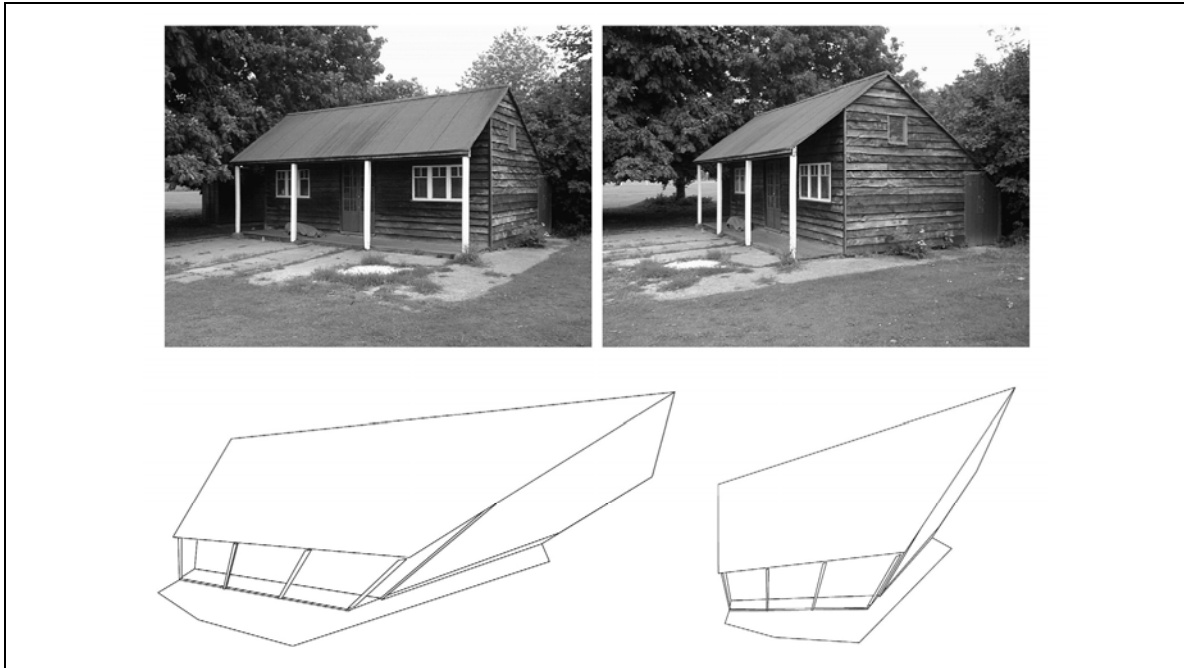
Υπ’ αυτήν την έννοια, κρίσιμη για τον  $F$  είναι εκείνη η γεωμετρία όπου τα σημεία μαζί με τα προβολικά κέντρα των εικόνων ανήκουν σε ευθειογενή επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού (Maybank, 1993), κανονική (πχ. υπερβολικό παραβολοειδές, μονόχωνο υπερβολοειδές) ή εκφυλισμένη (πχ. κώνος, κύλινδρος, δύο επίπεδα). Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν 3 πιθανές λύσεις. Αυτό συμφωνεί με την ύπαρξη 3 λύσεων στον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα από 7 ομολογίες σημείων καθώς πράγματι, εάν προστεθούν τα δύο προβολικά κέντρα, 9 σημεία του χώρου ορίζουν πάντοτε ευθειογενή επιφάνεια  $2^{\text{ου}}$  βαθμού. Ειδικότερα, από τις πιθανές κρίσιμες γεωμετρίες σημαντικότερη είναι η περίπτωση συνεπίπεδων σημείων, όπου το μαθηματικό μοντέλο του επιπολικού πίνακα εκφυλίζεται σε ομογραφία. Αξίζει να σημειωθεί πως αυτές οι κρίσιμες γεωμετρίες αφορούν και το μαθηματικό μοντέλο του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Σε αντίστοιχη “επικίνδυνη επιφάνεια” για την περίπτωση του σχετικού προσανατολισμού είχαν καταλήξει πολύ παλαιότερα και οι Krames (1940 και 1942) και Wunderlich (1941).

### 3.3 3D προβολική ανακατασκευή

Στην περίπτωση εικόνων από βαθμονομημένες μηχανές, ομολογίες σημείων επιτρέπουν τον υπολογισμό του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Από αυτόν είναι δυνατή η εξαγωγή του σχετικού προσανατολισμού και η εμπροσθοτομική ανακατασκευή των απεικονιζόμενων αντικειμένων. Τόσο το 3D μοντέλο του αντικειμένου όσο και οι εξωτερικοί προσανατολισμοί των εικόνων διαφέρουν από την πραγματικότητα (εάν αγνοηθεί η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων) κατά θέση, στροφή και κλίμακα. Η ανακατασκευή, δηλαδή, του 3D χώρου είναι *μετρική*. Δεν είναι όμως μονοσήμαντη. Στην πραγματικότητα μπορούν να υπολογιστούν άπειρα ζεύγη εξωτερικών προσανατολισμών ή προβολικών πινάκων μηχανής (και συνεπώς άπειρες διαφορετικές ανακατασκευές του χώρου) που αντιστοιχούν σε κοινό δεσμευμένο επιπολικό πίνακα και κοινό σχετικό προσανατολισμό. Όλα όμως συνδέονται μεταξύ τους μέσω 3D μετασχηματισμών ομοιότητας (βλ. ενότητα 2.5.3.2). Αν είναι γνωστή η θέση τριών τουλάχιστον σημείων του μοντέλου στον χώρο (φωτοσταθερά), τότε μπορεί να βρεθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός και να αποκατασταθεί η αβεβαιότητα αυτή, διαδικασία γνωστή στην φωτογραμμετρία ως απόλυτος προσανατολισμός του στερεοζεύγους.

Όταν όμως οι εσωτερικοί προσανατολισμοί των εικόνων είναι άγνωστοι, τότε είναι δυνατόν να προσδιορίζεται μόνον ο επιπολικός τους πίνακας. Από αυτόν υπολογίζονται οι θέσεις των δύο πόλων και οι δέσμες των ομόλογων επιπολικών ευθειών στα επίπεδα των δύο εικόνων. Τίθεται το ερώτημα εάν, με δεδομένο τον επιπολικό πίνακα, είναι δυνατόν εν συνεχεία να προσδιοριστούν οι προσανατολισμοί των εικόνων (εσωτερικοί και σχετικός) ή, ισοδύναμα, οι αντίστοιχοι προβολικοί πίνακες μηχανής, λαμβανομένου υπόψη ότι η αντίστροφη διαδικασία είναι όντως εφικτή (Εξ. 2.17). Οι Faugeras (1992) και Hartley (1992) απέδει-

ξαν, ανεξάρτητα, ότι στην περίπτωση εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές είναι δυνατός ο υπολογισμός προβολικών πινάκων μηχανής συμβατών με τον επιπολικό πίνακα και μια εν συνεχεία 3D ανακατασκευή του χώρου, ωστόσο η συνολική αβεβαιότητα είναι πλέον *προβολική*. Η ανακατασκευή δηλαδή είναι αυτή την φορά μη μετρική (Σχ. 3.5), τα δε δυνατά 3D μοντέλα αλλά και οι αντίστοιχοι προβολικοί πίνακες μηχανής συνδέονται μέσω 3D προβολικών μετασχηματισμών<sup>7</sup> (βλ. ενότητα 2.5.1.3). Μάλιστα η αβεβαιότητα αυτή δεν είναι, κατ' αρχήν, δυνατόν να παρακαμφθεί ούτε με την εκμετάλλευση περισσότερων εικόνων – εκτός αν επιβληθούν δεσμεύσεις, όπως πχ. ότι όλες οι εικόνες ή ορισμένες από αυτές έχουν τον ίδιο εσωτερικό προσανατολισμό).



Σχήμα 3.5. Παράδειγμα προβολικών ανακατασκευών από τον επιπολικό πίνακα ζεύγους εικόνων άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού (από Liebowitz et al., 1999).

Έτσι, αν  $H$  είναι η ομογραφία του 3D προβολικού χώρου, αποδεικνύεται ότι ζεύγη εικόνων με προβολικούς πίνακες μηχανής  $P$ ,  $P'$  και  $PH$ ,  $P'H$  έχουν τον ίδιο επιπολικό πίνακα  $F$ , και οι 3D ανακατασκευές που προκύπτουν από αυτά συνδέονται μέσω της αντίστροφης ομογραφίας  $H^{-1}$  (Hartley et al., 1992). Πράγματι, οι απεικονίσεις  $x = PX$  και  $x = PH(H^{-1}X) = PX$  είναι ίδιες και άρα οδηγούν σε κοινό επιπολικό πίνακα. Αποδεικνύεται επίσης πως αυτή είναι και η μόνη αβεβαιότητα της ανακατασκευής. Δηλαδή εάν  $P_1$ ,  $P_1'$  και  $P_2$ ,  $P_2'$  είναι προβολικοί πίνακες μηχανής συμβατοί με επιπολικό πίνακα  $F$ , τότε υπάρχει ομογραφία  $H$  τέτοια ώστε  $P_2 = P_1H$  και  $P_2' = P_1'H$  (Hartley et al., 1992). Προφανώς, μετασχηματισμός του προβολικού πίνακα μηχανής εικόνας μέσω ομογραφίας μεταβάλλει όχι μόνο τον εξωτερικό αλλά και τον εσωτερικό της προσανατολισμό. Έτσι, ο επιπολικός πίνακας δεν ορίζει μονοσήμαντα ούτε τον σχετικό αλλά ούτε και τον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων, αλλά αντιστοιχεί σε άπειρους συνδυασμούς τους. Η αναζήτηση ευκλείδειου, γεωμετρικού τρόπου παραμετροποίησης όλων αυτών των συνδυασμών στην περίπτωση μηχανών σημα-

<sup>7</sup> Η δυνατότητα 3D προβολικής ανακατασκευής από εικόνες άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού ήταν γνωστή στην φωτογραμμετρία ήδη από την αρχική φάση θεμελίωσής της (Finsterwalder, 1899), αλλά και από μετέπειτα προσπάθειες μεταγραφής της στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας (Bender, 1971).

κής οπής (*pinhole camera*) και η μελέτη των δεσμεύσεων που προκύπτουν εάν είναι μερικώς γνωστοί οι εσωτερικοί προσανατολισμοί των εικόνων, ή σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων τους (πχ. ότι είναι κοινές για τις δύο εικόνες), αποτελούν αντικείμενα του 4<sup>ου</sup> Κεφαλαίου της παρούσας διατριβής και συνιστούν μέρος της πρωτοτυπίας της.

Άμεση συνέπεια των προηγηθέντων είναι η αδυναμία να προσδιορίζεται το σχήμα των απεικονιζόμενων αντικειμένων από εικόνες άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού. Η μοναδική γεωμετρική πληροφορία που είναι δυνατόν να εξαχθεί σε μια τέτοια περίπτωση για τον 3D χώρο αφορά προβολικές ιδιότητες, όπως αυτές του διπλού λόγου, της συγγραμμικότητας σημείων, της συνεπιπεδότητας σημείων και ευθειών ή της τομής παράλληλων ευθειών σε σημείο και παράλληλων επιπέδων σε ευθεία. Μολαταύτα, οι προκύπτουσες προβολικές ανακατασκευές επαρκούν για εφαρμογές όπως είναι, για παράδειγμα, ο εντοπισμός εμποδίων που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο του εδάφους κατά την πλοήγηση ρομπότ (Faugeras & Luong, 2001) ή η δημιουργία προοπτικών εικόνων από νέες θέσεις (Faugeras & Laveau, 1994, Avidan & Shashua, 1997, Irani et al., 1998).

### 3.3.1 Εύρεση προβολικών πινάκων μηχανής συμβατών με τον επιπολικό

Όπως αναφέρουν οι Hartley & Zisserman (2000), δύο προβολικοί πίνακες μηχανής  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$  είναι συμβατοί με επιπολικό πίνακα  $\mathbf{F}$  εάν, και μόνο εάν, ο πίνακας  $\mathbf{P}'\mathbf{F}\mathbf{P}$  είναι αντισυμμετρικός. Μέσω της ιδιότητας αυτής ορίζουν από τον επιπολικό πίνακα ζεύγος προβολικών πινάκων μηχανής  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$  ως εξής:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}_{(3 \times 3)} | \mathbf{0}] \text{ και } \mathbf{P}' = [\mathbf{S}\mathbf{F} | \mathbf{e}'] \quad (3.59)$$

όπου  $\mathbf{S}$  τυχαίος αντισυμμετρικός πίνακας. Η παραγοντοποίηση αυτή, στην οποία ο  $\mathbf{P}$  της πρώτης εικόνας έχει την απλή μορφή  $[\mathbf{I} | \mathbf{0}]$ , ονομάζεται κανονική (canonical). Οι Luong & Vieville (1996) μελέτησαν τις ιδιότητες της κανονικής αναπαράστασης των προβολικών πινάκων μηχανής στην γενικότητά της (για περισσότερες εικόνες, από μηχανές λήψης βαθμονομημένες ή όχι) και για την περίπτωση του επιπολικού πίνακα πρότειναν ισοδύναμη εναλλακτική σχέση:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}_{(3 \times 3)} | \mathbf{0}] \text{ και } \mathbf{P}' = \left[ [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{F} + \mathbf{e}' \mathbf{v}^T \mid \lambda \mathbf{e}' \right] \quad (3.60)$$

όπου  $\mathbf{v}$  τυχαίο διάνυσμα 3 διαστάσεων και  $\lambda$  τυχαία μη μηδενική σταθερά. Η απλούστερη μορφή που μπορεί να πάρει η Εξ. (3.60) είναι:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}_{(3 \times 3)} | \mathbf{0}] \text{ και } \mathbf{P}' = \left[ [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{F} \mid \mathbf{e}' \right] \quad (3.61)$$

στην οποία όμως το προβολικό κέντρο της δεύτερης εικόνας ανήκει στο επίπεδο του απείρου  $\Pi_{\infty}$ . Οι Hartley (1993b) και Werner & Pajdla (2001) προτείνουν επίσης αλγορίθμους υπολογισμού προβολικών πινάκων μηχανής από τον επιπολικό πίνακα, οι οποίοι στην συνέχεια οδηγούν σε προβολικές ανακατασκευές με σχετικά περιορισμένες προβολικές παραμορφώσεις.

### 3.3.2 Εμπροσθοτομία

Από την στιγμή που έχουν προσδιοριστεί οι προβολικοί πίνακες μηχανής των δύο εικόνων

είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι 3D συντεταγμένες ομόλογων σημείων με εμπροσθοτομία. Αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον συνήθη τρόπο, με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, με την αναζήτηση κάθε φορά σημείου  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ 1]^T$  που ελαχιστοποιεί τις διαφορές της απεικόνισής του στις δύο εικόνες από τις αντίστοιχες παρατηρούμενες εικονοσυντεταγμένες  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ :

$$\min \sum \left( (\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{X})^2 + (\mathbf{x}' - \mathbf{P}'\mathbf{X})^2 \right) \quad (3.62)$$

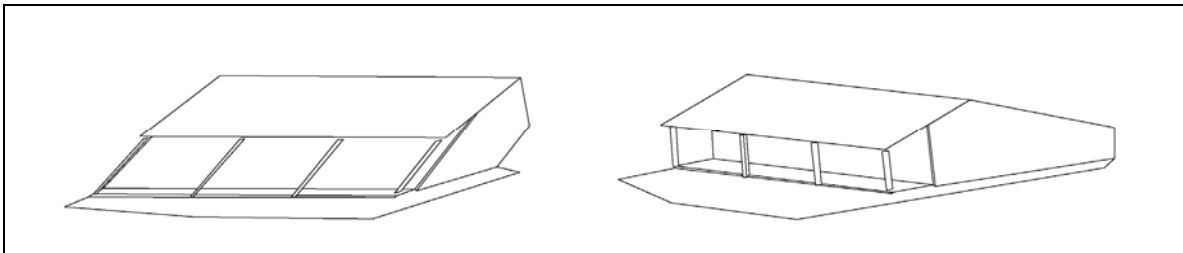
Οι Hartley & Sturm (1997) εξέτασαν την ελαχιστοποίηση διαφορετικών γεωμετρικών κριτηρίων κατά την διαδικασία εμπροσθοτομίας και διατύπωσαν γραμμικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό αρχικών τιμών.

### 3.3.3 Άρση προβολικής αβεβαιότητας μέσω φωτοσταθερών σημείων

Όπως προαναφέρθηκε, τα 3D σημεία που υπολογίζονται με αυτόν τον τρόπο διαφέρουν από την πραγματική τους θέση κατά 3D προβολικό μετασχηματισμό  $\mathbf{H}$ . Αν είναι γνωστή η θέση ορισμένων σημείων στον 3D ευκλείδειο χώρο (φωτοσταθερά σημεία), τότε κατ' αντιστοιχία με τον απόλυτο προσανατολισμό στερεοζεύγους είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός  $\mathbf{H}$  (Hartley et al., 1992, Liebowitz et al., 1999), ο οποίος έχει 15 βαθμούς ελευθερίας (βλ. ενότητα 2.5.1.3). Για τον σκοπό αυτό απαιτούνται 5 κατ' ελάχιστον φωτοσταθερά σημεία, αφού κάθε ένα προσφέρει τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις (Εξ. 2.37), και η επίλυση είναι γραμμική. Μετασχηματισμός, κατόπιν, όλων των σημείων με την ομογραφία  $\mathbf{H}$  αίρει την προβολική αβεβαιότητα, αναβαθμίζοντας την ανακατασκευή σε ευκλείδεια.

### 3.3.4 Επάλληλη ανακατασκευή

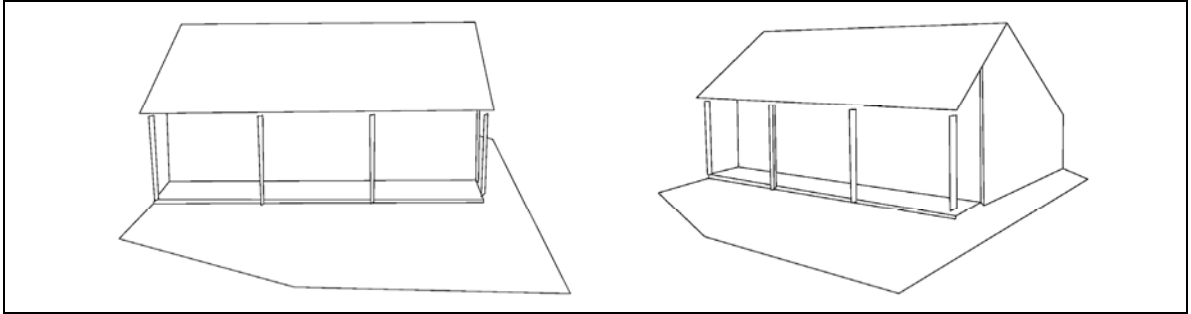
Οι Boufama et al. (1993), Faugeras (1995), Mohr et al. (1995), Faugeras et al. (1998) και Liebowitz et al. (1999) μελέτησαν την δυνατότητα αναβάθμισης της προβολικής ανακατασκευής σε μετρική μέσω γνωστών γεωμετρικών ιδιοτήτων του αντικειμένου. Αν είναι γνωστό πχ. πως ορισμένες ευθείες είναι παράλληλες, τότε σημείο τομής τους είναι το σημείο φυγής της διεύθυνσής τους και ανήκει στο επίπεδο του απείρου  $\Pi_\infty$ . Εφόσον λοιπόν εντοπιστούν σε 3D προβολικό μοντέλο που προκύπτει από επιπολικό πίνακα τρία σημεία φυγής, είναι πλέον δυνατόν να προσδιοριστεί η θέση του επιπέδου του απείρου. Από αυτό μπορούν να εξαχθούν αφινικές γεωμετρικές ιδιότητες, όπως η παραλληλία ή ο λόγος των μηκών σε παράλληλες διευθύνσεις (βλ. ενότητα 2.5.2). Για παράδειγμα, κάθε ζεύγος ευθειών ή επιπέδων που τέμνεται στο  $\Pi_\infty$  είναι παράλληλο. Επίσης μπορεί να βρεθεί ο μετασχηματισμός εκείνος που επαναφέρει το επίπεδο του απείρου στην κανονική του θέση (Εξ. 2.40) και μετατρέπει ολόκληρο το 3D μοντέλο από προβολικό σε αφινικό (Σχ. 3.6).



Σχήμα 3.6. Αναβάθμιση της προβολικής ανακατασκευής σε αφινική μέσω αφινικών γεωμετρικών δεσμεύσεων (από Liebowitz et al., 1999).



Διαφορετικού τύπου δεσμεύσεις οδηγούν κατόπιν σε μετρική ανακατασκευή. Παράδειγμα τέτοιων “μετρικών” δεσμεύσεων είναι ο εντοπισμός ευθειών ή επιπέδων που θα όφειλαν να είναι κάθετα μεταξύ τους ή να σχηματίζουν γνωστή γωνία. Και στις δύο περιπτώσεις οι γνωστές γεωμετρικές ιδιότητες μετατρέπονται σε δεσμεύσεις για την θέση της απόλυτης κωνικής  $\Omega_\infty$  (βλ. ενότητα 2.5.3). Η καθετότητα εκφράζεται ως συζυγία ως προς την απόλυτη κωνική (Εξ. 2.47), ενώ μια γνωστή γωνία διατυπώνει δέσμευση μέσω της Εξ. (2.46). Με την βοήθεια των εκφράσεων αυτών είναι δυνατόν να εντοπιστεί η θέση της απόλυτης κωνικής  $\Omega_\infty$  (ή της “δυσικής” της) και εν συνεχεία να εξαχθούν μετρικές γεωμετρικές ιδιότητες. Μπορεί επίσης να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός που την επαναφέρει στην κανονική της θέση (Εξ. 2.50), αναβαθμίζοντας ολόκληρη την 3D ανακατασκευή σε μετρική (Σχ. 3.7).



Σχήμα 3.7. Αναβάθμιση της αφινικής ανακατασκευής σε μετρική μέσω ευκλείδειων γεωμετρικών δεσμεύσεων (από Liebowitz et al., 1999).

Επίσης, η θέση της απόλυτης κωνικής στο 3D μοντέλο επιτρέπει, μέσω των προβολικών πινάκων μηχανής, να υπολογίζεται η απεικόνισή της  $\omega$  στο επίπεδο των εικόνων. Η θέση της εικόνας της απόλυτης κωνικής (Εξ. 2.58) συνδέεται άμεσα με τον εσωτερικό προσανατολισμό της μηχανής (βλ. ενότητα 2.6.2):

$$\omega = (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1} \Leftrightarrow \omega^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha^2 c^2 + s^2 + x_0^2 & -sc + x_0 y_0 & x_0 \\ -sc + x_0 y_0 & c^2 + y_0^2 & y_0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Μέσω αυτής, συνεπώς, μπορούν να προσδιορίζονται τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού των δύο εικόνων αλλά και ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας του στερεοζεύγους (Εξ. 3.31), και να δημιουργηθεί ένα μετρικό 3D μοντέλο της πραγματικότητας. Ένα πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι ορισμένες γεωμετρικές δεσμεύσεις, όπως η καθετότητα, μπορούν να διατυπωθούν απευθείας στο επίπεδο των εικόνων χωρίς να απαιτείται προβολική ανακατασκευή του χώρου. Για παράδειγμα, δύο σημεία φυγής  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ορθογώνιων διευθύνσεων οφείλουν να ικανοποιούν την σχέση (Liebowitz et al., 1999):

$$\mathbf{u}^T \omega \mathbf{v} = 0 \quad (3.64)$$

Στην περίπτωση μηχανών απλής κεντρικής προβολής ( $\alpha = 1, s = 0$ ) ο εντοπισμός στις εικόνες του στερεοζεύγους τριών σημείων φυγής ορθογώνιων διευθύνσεων αρκεί για τον υπολογισμό της  $\omega$  και, συνεπώς, την βαθμονόμηση των μηχανών λήψης.

Η έννοια της επαλληλίας (*stratification*) – της δημιουργίας, δηλαδή, επάλληλων ανακατασκευών (*stratified reconstruction*) διαφορετικού βαθμού γεωμετρικής αβεβαιότητας – μπορεί να γενικευθεί σε περισσότερες από δύο εικόνες και σε διαφορετικού τύπου δεσμεύσεις. Έτσι, οι Mundy & Zisserman (1994) και Vieville & Lingrand (1999) εξέτασαν την περίπτω-

ση να είναι εν μέρει γνωστή η κίνηση της μηχανής λήψης. Η δέσμευση, ακόμα, ότι ο εσωτερικός προσανατολισμός των εικόνων είναι κοινός (σε όλα ή σε ορισμένα μόνο στοιχεία του) επιτρέπει την αναβάθμιση της ανακατασκευής σε μετρική. Οι μέθοδοι της τελευταίας αυτής περίπτωσης εντάσσονται στην θεωρία της αυτοβαθμονόμησης.

### 3.4 Αυτοβαθμονόμηση

Στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών ο όρος αυτοβαθμονόμηση (*autocalibration* ή *self-calibration*) αναφέρεται στον προσδιορισμό των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού μηχανής λήψης αποκλειστικά από ομολογίες σημείων σε περισσότερες εικόνες, δηλαδή χωρίς καμία *a priori* γεωμετρική πληροφορία για τον 3D χώρο. Η δυνατότητα αυτή έγινε γνωστή τα τελευταία χρόνια και, με εξαίρεση την εργασία του Chang (1986), φαίνεται ότι ήταν μάλλον άγνωστη στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία. Γενικά, όπως αναφέρθηκε στην Εισαγωγή της διατριβής όπου επισκοπήθηκε η σχετική βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών, ομολογίες σημείων σε τρεις εικόνες αρκούν για να προσδιορίζεται ο εσωτερικός προσανατολισμός τους υπό την προϋπόθεση ότι αυτός είναι κοινός (Maybank & Faugeras, 1992). Στην περίπτωση του ζεύγους δυνατή είναι η μερική μόνο βαθμονόμηση της μηχανής λήψης και κυρίως – περίπτωση που παρουσιάζει μεγαλύτερο πρακτικό ενδιαφέρον – ο υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής όταν η θέση του πρωτεύοντος σημείου είναι γνωστή (Hartley, 1992, Newsam et al., 1996, Bougnoux, 1998, Sturm, 2001).

Οι μέθοδοι αυτοβαθμονόμησης διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: εκείνες που διατυπώνουν δεσμεύσεις μεταξύ του επιπολικού πίνακα και των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού, και εκείνες που στηρίζονται στην έννοια της επαλληλίας. Οι πρώτες είναι είτε αμιγώς αλγεβρικές (Hartley, 1992, Niini, 1993 και 1994, Mendonça & Cipolla, 1999), βασιζόμενες στις ιδιότητες που οφείλει να διαθέτει ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας (βλ. ενότητα 3.1.3.1) είτε κινούνται στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας, βασιζόμενες στην γεωμετρική σχέση των πόλων και της ομογραφίας των επιπολικών ευθειών με την εικόνα της απόλυτης κωνικής (Faugeras et al., 1992, Zeller & Faugeras, 1996, Luong & Faugeras, 1997, Hartley, 1997b, Lourakis & Deriche, 2000, Ronda & Valdés, 2007). Οι δεύτερες, εκκινώντας από εκτιμήσεις των προβολικών πινάκων μηχανής και του 3D χώρου, επιχειρούν μέσω δεσμεύσεων επί του εσωτερικού προσανατολισμού να εντοπίσουν το επίπεδο του απείρου και την απόλυτη κωνική (Hartley, 1993a, Heyden & Åström, 1996, Pollefeys et al., 1996, Triggs, 1997, Pollefeys & van Gool, 1999). Στα επόμενα θα παρουσιαστεί συνοπτικά η βασική θεωρία των μεθόδων της πρώτης κατηγορίας, καθώς σε αυτήν εμπίπτει η πλειονότητα των αλγορίθμων μερικής βαθμονόμησης από ζεύγος εικόνων. Αναλυτικότερα στοιχεία για τις προσεγγίσεις της δεύτερης κατηγορίας, αλλά και τα σχετικά με αποδείξεις και ζητήματα επίλυσης των εξισώσεων που ακολουθούν, μπορούν να αναζητηθούν στην προαναφερθείσα βιβλιογραφία όσο και στα βασικά εγχειρίδια αναφοράς (Hartley & Zisserman, 2000, Faugeras & Luong, 2001).

#### 3.4.1 Επιπολικός πίνακας και εσωτερικός προσανατολισμός

##### 3.4.1.1 Αλγεβρική προσέγγιση

Οι δύο επιπλέον βαθμοί ελευθερίας του επιπολικού πίνακα ως προς εκείνους του δεσμευ-

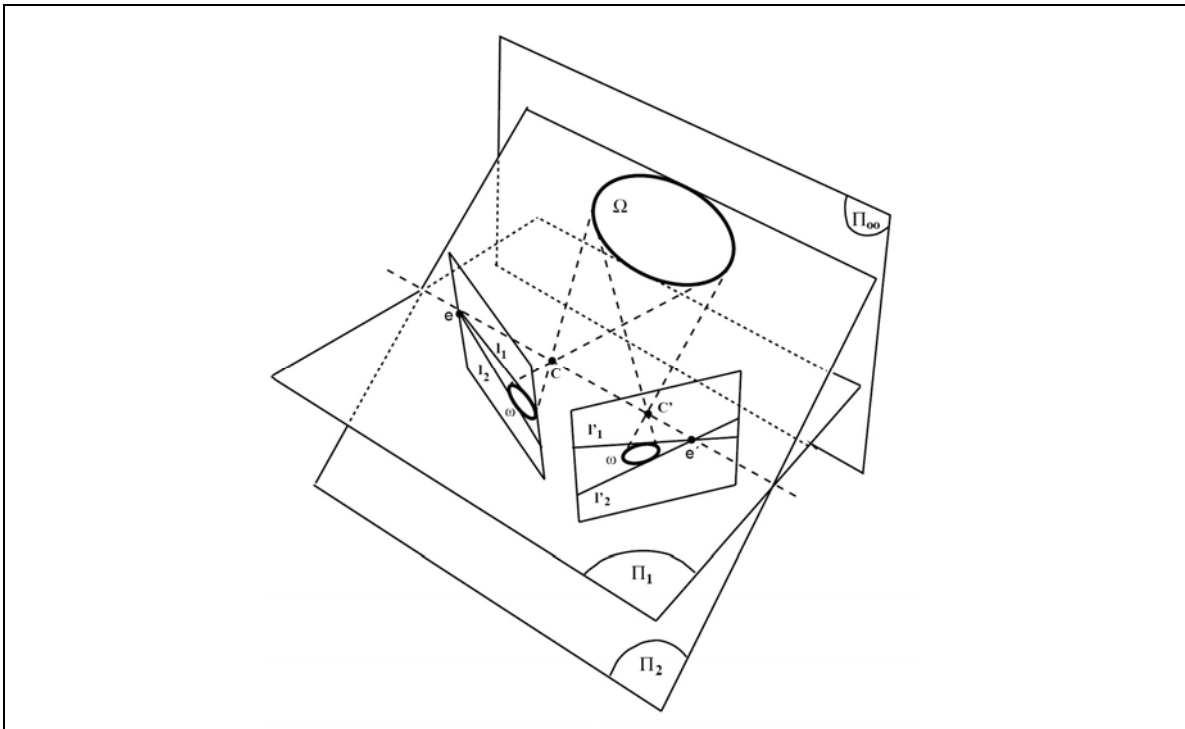
μένου επιπολικού μπορούν να αντιμετωπισθούν ως δεσμεύσεις ανάμεσα στα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού των δύο εικόνων. Αν συνδυαστεί η Εξ. (3.31), που συνδέει τους δύο πίνακες  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{E}$  μέσω των πινάκων εσωτερικού προσανατολισμού  $\mathbf{K}$  και  $\mathbf{K}'$ , με μια από τις ισοδύναμες αλγεβρικές δεσμεύσεις που οφείλει να ικανοποιεί ο  $\mathbf{E}$  (βλ. ενότητα 3.1.3.1), προκύπτουν πράγματι δύο ανεξάρτητες πολυωνυμικές εξισώσεις 8<sup>ου</sup> βαθμού ανάμεσα στα στοιχεία του  $\mathbf{F}$  και των  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}'$  (Luong & Faugeras, 1997). Εφόσον έχουν υπολογιστεί οι επιπολικοί πίνακες ( $\mathbf{F}_{12}$ ,  $\mathbf{F}_{23}$ ,  $\mathbf{F}_{13}$ ) τριών εικόνων κοινού εσωτερικού προσανατολισμού ( $\mathbf{K} = \mathbf{K}' = \mathbf{K}''$ ), τότε μέσω των εξισώσεων αυτών είναι δυνατή η βαθμονόμηση της μηχανής λήψης (Hartley, 1992, Niini, 1993, 1994, Mendonça & Cipolla, 1999).

### 3.4.1.2 Γεωμετρική προσέγγιση

Οι Faugeras & Maybank (1992) και Faugeras et al. (1992) διατύπωσαν επίσης δύο ανεξάρτητες δεσμεύσεις μεταξύ του επιπολικού πίνακα και του εσωτερικού προσανατολισμού ακολουθώντας την γεωμετρική προσέγγιση του Kruppa (1913). Έστω  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  επιπολικά επίπεδα εφαπτόμενα στην απόλυτη κωνική τομή  $\Omega_\infty$  (Σχ. 3.8). Αυτά ορίζουν στις δύο εικόνες τις επιπολικές ευθείες  $l_1$ ,  $l_2$  και  $l'_1$ ,  $l'_2$ , οι οποίες είναι εφαπτόμενες στην εικόνα της απόλυτης κωνικής  $\omega$ . Όμως οι επιπολικές ευθείες συνδέονται μεταξύ τους μέσω του επιπολικού πίνακα, με αποτέλεσμα να προκύπτει σύστημα εξισώσεων ανάμεσα στα στοιχεία του  $\mathbf{F}$  και της δυϊκής της απόλυτης κωνικής:

$$\mathbf{F}\omega^*\mathbf{F}^T \sim [\mathbf{e}']_{\times} \omega^* [\mathbf{e}']_{\times} \Leftrightarrow \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{K}^T\mathbf{F}^T \sim [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{K}'\mathbf{K}'^T [\mathbf{e}']_{\times} \quad (3.65)$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται “εξισώσεις Kruppa” και είναι ισοδύναμες με δύο πολυώνυμα 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού.



Σχήμα 3.8. Επιπολικά επίπεδα εφαπτόμενα στην απόλυτη κωνική και οι αντίστοιχες επιπολικές ευθείες (από Luong & Faugeras, 1997).

Οι Luong & Faugeras (1997) απέδειξαν πως οι εξισώσεις Kruppa είναι ισοδύναμες με την

αλγεβρική δέσμευση των Huang & Faugeras (1989), σύμφωνα με την οποία οι δύο μη μη-δενικές ιδιάζουσες τιμές του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα οφείλουν να είναι ίσες. Επίσης, μέσω της ανάλυσης ιδιάζουσών τιμών (SVD) του επιπολικού πίνακα:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0) \mathbf{V}^T \quad (3.66)$$

ο Hartley (1997b) απλοποίησε τις εξισώσεις Kruppa στην μορφή:

$$\frac{\lambda_1^2 \mathbf{v}_1^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T) \mathbf{v}_1}{\mathbf{u}_2^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T) \mathbf{u}_2} = \frac{\lambda_2^2 \mathbf{v}_2^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T) \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T) \mathbf{u}_1} = - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mathbf{v}_1^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T) \mathbf{v}_1}{\mathbf{u}_2^T (\mathbf{K} \mathbf{K}^T) \mathbf{u}_2} \quad (3.67)$$

όπου  $\mathbf{u}_i$  και  $\mathbf{v}_i$  η  $i$ -οστή στήλη του πίνακα  $\mathbf{U}$  και  $\mathbf{V}$ , αντίστοιχα.

Για την επίλυση των εξισώσεων Kruppa ως προς τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού, εφόσον αυτά θεωρηθούν σταθερά, απαιτούνται τρεις τουλάχιστον εικόνες. Η επίλυση είναι δυνατή είτε τμηματικά με αριθμητικές μεθόδους επίλυσης πολυωνύμων (Faugeras et al., 1992) είτε σε ένα βήμα με ενιαία συνόρθωση (Zeller & Faugeras, 1996, Faugeras & Luong, 1997). Οι εξισώσεις αυτές λειτουργούν επίσης ως απόδειξη για την δυνατότητα αυτοβαθμονόμησης από απλές ομολογίες σημείων, πράγμα που θεμελιώνει την επίλυση με την, τυπική στην φωτογραμμετρία, μέθοδο της δέσμης χωρίς χρήση φωτοσταθερών σημείων.

### 3.4.2 Υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής

Δύο εικόνες κοινού εσωτερικού προσανατολισμού δεν επαρκούν για αυτοβαθμονόμηση ούτε στην περίπτωση μηχανών κεντρικής προβολής ( $\alpha = 1, s = 0$ ). Οι δεσμεύσεις του επιπολικού πίνακα είναι δύο, ενώ οι άγνωστες παράμετροι είναι τρεις ( $c, x_0, y_0$ ). Αν όμως είναι γνωστή η θέση του πρωτεύοντος σημείου (ή απλώς θεωρηθεί πως ταυτίζεται με το κέντρο της εικόνας), τότε είναι δυνατός ο υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής ακόμα και αν αυτή διαφέρει στις δύο εικόνες.

Ο Hartley (1992) αντιμετώπισε πρώτος το πρόβλημα του προσδιορισμού των δύο τιμών της σταθεράς της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα με έναν αρκετά σύνθετο αλγόριθμο. Διαφορετικούς αλγορίθμους έχουν προτείνει οι Pan et al. (1995), Newsam et al. (1996), Bougnoux (1998), Kanatani & Matsunaga (2000), Huang et al. (2004). Οι Newsam et al. (1996) εντόπισαν μάλιστα πρώτοι τις γεωμετρίες για τις οποίες δεν είναι εφικτό να υπολογίζονται δύο τιμές σταθεράς της μηχανής. Αυτό συμβαίνει όταν οι οπτικοί άξονες των δύο εικόνων είναι συνεπίπεδοι ή όταν ο οπτικός άξονας μιας εικόνας και η βάση του ζεύγους ορίζουν επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα της άλλης. Οι αναφερθέντες αλγόριθμοι στηρίζονται είτε στις εξισώσεις Kruppa είτε στην αλγεβρική προσέγγιση της ενότητας 3.4.1.1.

Απλούστερος ανάμεσα στους αλγορίθμους αυτούς είναι εκείνος του Bougnoux (1998). Αν  $\mathbf{F}$  είναι ο επιπολικός πίνακας στερεοζεύγους εικόνων,  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  οι θέσεις του πρωτεύοντος σημείου στις δύο εικόνες και:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

τότε η σταθερά της μηχανής της πρώτης εικόνας υπολογίζεται από την σχέση:

$$c_1 = \sqrt{-\frac{\mathbf{p}'^T [\mathbf{e}']_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{F} \mathbf{p} \mathbf{p}'^T \mathbf{F}^T \mathbf{p}'}{\mathbf{p}'^T [\mathbf{e}']_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{I}}^T \mathbf{p}'}} \quad (3.68)$$

Η τιμή της σταθεράς της μηχανής της δεύτερης εικόνας προκύπτει αν αντιστραφούν οι ρόλοι των δύο εικόνων. Υιοθετώντας διαφορετική γεωμετρική προσέγγιση, οι Hartley & Kaucic (2002) κατέληξαν επίσης στην ίδια εξίσωση.

Οι Newsam et al. (1996) διατύπωσαν ειδικό αλγόριθμο για την περίπτωση εικόνων με κοινή σταθερά μηχανής ο οποίος βασίζεται στις αλγεβρικές ιδιότητες του δεσμευμένου επιπολικού πίνακα. Μέσω της ανάλυσης ιδιοζουσών τιμών του επιπολικού πίνακα (Εξ. 3.66) και θεωρώντας το πρωτεύον σημείο στο κέντρο των εικόνων, κατέληξαν σε πολυώνυμο 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς την ποσότητα  $m = c^2 - 1$ :

$$\begin{aligned} & \left[ (\mathbf{u}_1^T \mathbf{i}_3)(\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_3) \lambda_1 - (\mathbf{u}_2^T \mathbf{i}_3)(\mathbf{v}_2^T \mathbf{i}_3) \lambda_2 \right] f_{33} m^2 + \\ & \left[ \left( (\mathbf{u}_1^T \mathbf{i}_3)^2 + (\mathbf{v}_1^T \mathbf{i}_3)^2 \right) \lambda_1^2 - \left( (\mathbf{u}_2^T \mathbf{i}_3)^2 + (\mathbf{v}_2^T \mathbf{i}_3)^2 \right) \lambda_2^2 \right] m + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

όπου  $\mathbf{i}_i$  η  $i$ -οστή στήλη του μοναδιαίου πίνακα  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ . Η Εξ. (3.69) έχει δύο λύσεις, που για να οδηγούν σε πραγματική τιμή σταθεράς της μηχανής πρέπει να είναι μεγαλύτερες της μονάδας.

Με το ίδιο πρόβλημα ασχολήθηκαν επίσης οι Sturm (2001) και Sturm et al. (2004). Μέσω των απλοποιημένων εξισώσεων Kruppa (Εξ. 3.67) κατέληξαν σε τρεις διαφορετικές εξισώσεις, δύο γραμμικές και μια 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς το τετράγωνο της σταθεράς της μηχανής:

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda_1 \mathbf{u}_{13} \mathbf{u}_{23} (1 - \mathbf{v}_{13}^2) + \lambda_2 \mathbf{v}_{13} \mathbf{v}_{23} (1 - \mathbf{u}_{23}^2) \right] c^2 + \mathbf{u}_{23} \mathbf{v}_{13} (\lambda_1 \mathbf{u}_{13} \mathbf{v}_{13} + \lambda_2 \mathbf{u}_{23} \mathbf{v}_{23}) = 0 \\ & \left[ \lambda_1 \mathbf{v}_{13} \mathbf{v}_{23} (1 - \mathbf{u}_{13}^2) + \lambda_2 \mathbf{u}_{13} \mathbf{u}_{23} (1 - \mathbf{v}_{23}^2) \right] c^2 + \mathbf{u}_{13} \mathbf{v}_{23} (\lambda_1 \mathbf{u}_{13} \mathbf{v}_{13} + \lambda_2 \mathbf{u}_{23} \mathbf{v}_{23}) = 0 \\ & \left[ \lambda_1^2 (1 - \mathbf{u}_{13}^2) (1 - \mathbf{v}_{13}^2) - \lambda_2^2 (1 - \mathbf{u}_{23}^2) (1 - \mathbf{v}_{23}^2) \right] c^4 + \\ & \left[ \lambda_1^2 (\mathbf{u}_{13}^2 + \mathbf{v}_{13}^2 - 2 \mathbf{u}_{13}^2 \mathbf{v}_{13}^2) - \lambda_2^2 (\mathbf{u}_{23}^2 + \mathbf{v}_{23}^2 - 2 \mathbf{u}_{23}^2 \mathbf{v}_{23}^2) \right] c^2 + \\ & (\lambda_1^2 \mathbf{u}_{13}^2 \mathbf{v}_{13}^2 - \lambda_2^2 \mathbf{u}_{23}^2 \mathbf{v}_{23}^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Εξετάζοντας την επιλυσιμότητα των εξισώσεων αυτών μελέτησαν τις κρίσιμες γεωμετρίες. Απέδειξαν πως για τις γραμμικές εξισώσεις ισχύουν τα συμπεράσματα των Newsam et al. (1996), αλλά μέσω της τρίτης εξίσωσης είναι δυνατόν να υπολογίζεται κοινή τιμή της σταθεράς της μηχανής ακόμα και όταν οι οπτικοί άξονες των εικόνων είναι συνεπίπεδοι, αρκεί να μην είναι παράλληλοι μεταξύ τους ή το σημείο τομής τους να μην ισαπέχει από τα δύο προβολικά κέντρα.

Οι προηγούμενοι αλγόριθμοι έχουν το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτούν αρχικές τιμές. Έχει διαπιστωθεί όμως ότι είναι ευαίσθητοι στον θόρυβο των μετρήσεων (Hartley & Silpa-Anan, 2002) και στην υπόθεση σχετικά με την θέση του πρωτεύοντος σημείου (Hartley & Kaucic, 2002). Τα αποτελέσματά τους μπορούν, ωστόσο, να βελτιωθούν αισθητά μέσω της μεθόδου της δέσμης (Sturm et al., 2004, Kalisperakis et al., 2005). Αντίστοιχοι κλειστοί αλγόρι-

θμοι (*closed-form*) για τον προσδιορισμό κοινής ή διαφορετικών σταθερών της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα αναπτύχθηκαν και στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής και παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5. Η βασική διαφορά τους με εκείνους που εκτέθηκαν εδώ είναι ότι βασίζονται σε ευκλείδειες γεωμετρικές δεσμεύσεις μεταξύ των πόλων και των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού.

# 4

## Η 2D Επιπολική Γεωμετρία στον Ευκλείδειο 3D Χώρο

### 4.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκαν συνοπτικά ορισμένα αποτελέσματα της έρευνας που διεξάγεται τα τελευταία χρόνια στο επιστημονικό πεδίο της Όρασης Υπολογιστών σχετικά με την γεωμετρία του στερεοζεύγους. Ενώ στην περίπτωση ζευγών εικόνων από βαθμονομημένες μηχανές είναι δυνατόν να προσδιορίζεται πλήρως ο σχετικός προσανατολισμός και μάλιστα γραμμικά, στην αντίθετη περίπτωση (εικόνες άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού) εκείνο που μπορεί να αποκατασταθεί είναι μόνον η 2D επιπολική τους γεωμετρία. Μπορούν, δηλαδή, να προσδιοριστούν στα επίπεδα των δύο εικόνων

- η θέση των πόλων
- και η ομογραφία που συνδέει τις ομόλογες επιπολικές ευθείες.

Την γεωμετρία αυτή περιγράφει το μαθηματικό μοντέλο της *μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας*, η οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση αναπαριστάται από τον επιπολικό πίνακα **F** του στερεοζεύγους. Από αυτόν μπορούν κατόπιν, εάν επιλέξει κανείς τυχαία τις τιμές ορισμένων αλγεβρικών ποσοτήτων (βλ. ενότητα 3.3.1), να εξαχθούν άπειρα ζεύγη προβολικών πινάκων μηχανής, τα οποία αντιστοιχούν σε απειρία συνδυασμών σχετικού και εσωτερικών προσανατολισμών των δύο εικόνων. Κάθε επιλογή οδηγεί, από την μεριά της, σε διαφορετική 3D ανακατασκευή του απεικονιζόμενου χώρου. Η συνολική αβεβαιότητα των ανακατασκευών αυτών – και εφόσον αγνοηθεί η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων – είναι προβολική. Όμως η απειρία των πιθανών γεωμετριών λήψης είναι, εν μέρει, δεσμευμένη. Μεταξύ των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού και του επιπολικού πίνακα υφίστανται συγκεκριμένες δεσμεύσεις, οι οποίες έχουν διατυπωθεί είτε αμιγώς αλγεβρικά είτε στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας ως γεωμετρικές δεσμεύσεις στην θέση της εικόνας της απόλυτης κωνικής. Μέσω αυτών αποδεικνύεται δυνατή η βαθμονόμηση της μηχανής λήψης αποκλειστικά από ομολογίες σημείων σε τουλάχιστον τρεις εικόνες από την

ίδια μηχανή, αλλά και η *μερική* βαθμονόμηση (“μερική” υπό την έννοια ότι κάποια στοιχεία του εσωτερικού πρέπει να είναι γνωστά) στην περίπτωση του στερεοζεύγους από την ίδια ή και από δύο διαφορετικές μηχανές.

Ωστόσο – και παρά την αδιαμφισβήτητη κομψότητα της αλγεβρικής ή αμιγώς προβολικής προσέγγισης που υιοθετείται από τους ερευνητές στο πεδίο της Όρασης Υπολογιστών – η διερεύνηση της γεωμετρίας του στερεοζεύγους με ευκλείδειους όρους είναι σημαντική για την Φωτογραμμετρία. Η προσέγγιση της απειρίας των γεωμετριών λήψης των συμβατών με δεδομένο επιπολικό πίνακα μέσω της αντίστοιχης απειρίας των πιθανών προβολικών πινάκων μηχανής δεν δίνει σαφή εικόνα για την *φυσική σημασία* των βαθμών ελευθερίας του στερεοζεύγους ούτε για την *άμεση γεωμετρική σχέση* μεταξύ των πιθανών σχετικών προσανατολισμών του ζεύγους και των στοιχείων του εσωτερικού προσανατολισμού κάθε εικόνας. Επιπλέον, στην (τυπική για την Φωτογραμμετρία) περίπτωση όπου θεωρείται δεδομένο ότι οι εικόνες προέρχονται από μηχανές σημειακής οπής (*pinhole camera*) η αναπαράστασή τους μέσω του προβολικού πίνακα μηχανής (ή ισοδύναμα μέσω του Άμεσου Γραμμικού Μετασχηματισμού) – δηλαδή χωρίς την επιβολή δεσμεύσεων μεταξύ των στοιχείων του – κρύβει τον κίνδυνο να θεωρηθούν εικόνες που δεν θα μπορούσαν να έχουν προκύψει από κανέναν συνδυασμό εσωτερικού και εξωτερικού προσανατολισμού. Η απόκλιση των αξόνων της εικόνας από την ορθογωνικότητα και οι διαφορετικές κλίμακες στις διευθύνσεις αυτών των αξόνων, τα οποία ενυπάρχουν στο μαθηματικό μοντέλο του προβολικού πίνακα μηχανής (ενότητα 2.6.1), δεν συνιστούν στοιχεία της κεντρικής προβολής, αλλά, όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Horn (1999), αντιστοιχούν ενίοτε σε συνδυασμό δύο διαφορετικών κεντρικών προβολών (προοπτική απεικόνιση προοπτικής απεικόνισης).

Στο παρόν κεφάλαιο της διατριβής επιχειρείται ακριβώς να διερευνηθεί η 2D επιπολική γεωμετρία στον ευκλείδειο 3D χώρο. Εξετάζεται γεωμετρικά το σύνολο των συνδυασμών δύο κεντρικών προβολών από τους οποίους θα μπορούσαν να έχουν προκύψει δύο δεδομένες εικόνες (που απεικονίζουν άγνωστα αντικείμενα), όταν είναι γνωστός ο επιπολικός τους πίνακας και, άρα, είναι δεδομένες οι ομόλογες δέσμες επιπολικών ευθειών. Η αναζήτηση αυτή αποσκοπεί, αφενός, στην πληρέστερη κατανόηση της 3D γεωμετρίας που εγγράφεται στο μαθηματικό μοντέλο του επιπολικού πίνακα, όσο και, αφετέρου, στην διατύπωση εναλλακτικής, άμεσα γεωμετρικής παραγοντοποίησής του σε διαφορετικούς συνδυασμούς σχετικού και εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων. Παράλληλα, θα καταστεί σαφές ποιες παράμετροι της γεωμετρίας του στερεοζεύγους δεσμεύονται από τον επιπολικό πίνακα και ποιές μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα, αλλά και γιατί μερική γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού, ή σχέσεων μεταξύ των στοιχείων του, επιτρέπουν αυτοβαθμονόμηση της μηχανής λήψης<sup>1</sup>.

Η προσέγγιση που υιοθετείται είναι γεωμετρική, στηριζόμενη στην αναζήτηση εκείνων των μεταβολών της γεωμετρίας του στερεοζεύγους (σχετικός και εσωτερικοί προσανατολισμοί) που αφήνουν ανεπηρέαστη την συνεπιπεδότητα των οπτικών ακτίνων. Εν προκειμένω, έτσι, μοναδική απαραίτητη δέσμευση είναι ότι οι ομόλογες οπτικές ακτίνες και η βάση του στερεοζεύγους παραμένουν επί κοινού επιπολικού επιπέδου. Κατά τα άλλα, τα επιπολικά

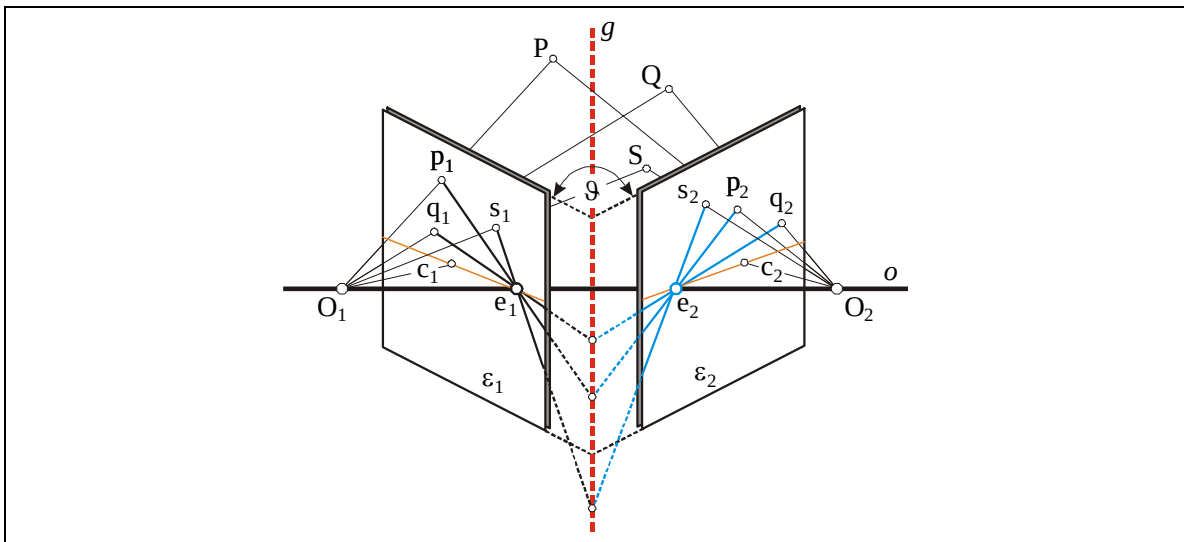
<sup>1</sup> Στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο προτείνεται απλούστερη εναλλακτική διατύπωση των δεσμεύσεων που επιβάλλει η 2D επιπολική γεωμετρία στον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων, και μέσω αυτής προτείνονται κλειστοί αλγόριθμοι υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα.



επίπεδα είναι προφανώς ελεύθερα να μεταβάλλονται, όπως άλλωστε και τα σημεία τομής των οπτικών ακτίνων επί αυτών, με συνέπεια την προβολική αβεβαιότητα της εκάστοτε 3D ανακατασκευής του απεικονιζόμενου χώρου. Κατ' αρχάς, στην ενότητα 4.2 παρουσιάζονται συνοπτικά οι πρόσθετοι γεωμετρικοί βαθμοί ελευθερίας ζεύγους εικόνων με γνωστό επιτολικό πίνακα αλλά άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό (πέραν, δηλαδή, της μετάθεσης των εικόνων στην διεύθυνση της βάσης ή και της συνολικής μετάθεσης και στροφής του στερεομοντέλου στον 3D χώρο). Στην συνέχεια του κεφαλαίου η γεωμετρία αυτή αναλύεται διεξοδικά, παρέχονται οι απαραίτητες αποδείξεις και διατυπώνονται οι αναλυτικές σχέσεις που την συνδέουν με τα στοιχεία του επιτολικού πίνακα.

## 4.2 Βαθμοί ελευθερίας εικόνων γνωστής 2D επιτολικής γεωμετρίας

Στην γενική περίπτωση όπου τα επίπεδα των εικόνων στερεοζεύγους δεν είναι παράλληλα, οι ομόλογες επιτολικές ευθείες, δεδομένου ότι ανήκουν σε κοινό επιτολικό επίπεδο, τέμνονται επί της ευθείας τομής  $g$  των επιπέδων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  των εικόνων (Σχ. 4.1).



Σχήμα 4.1. Δέσμες επιτολικών ευθειών σε προοπτική θέση.

Οι δέσμες των επιτολικών ευθειών είναι, δηλαδή, όχι απλώς προβολικές μεταξύ τους αλλά βρίσκονται και σε προοπτική θέση (βλ. ενότητα 2.5.1.1). Η ιδιότητα αυτή συνιστά βασικό κριτήριο για να αναζητηθεί το σύνολο των γεωμετριών λήψης που αντιστοιχούν σε δεδομένο επιτολικό πίνακα. Έτσι, εάν τα επίπεδα  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τοποθετηθούν κατά τρόπον ώστε οι δέσμες των επιτολικών ευθειών να έρθουν σε προοπτική θέση, τότε από τους δύο πόλους ορίζονται η ευθεία  $o$  της βάσης του ζεύγους και έπειτα, μέσω των ομόλογων επιτολικών ευθειών, τα αντίστοιχα επιτολικά επίπεδα. Οποιαδήποτε σημεία επί της ευθείας της βάσης είναι δυνατά προβολικά κέντρα των εικόνων, αφού οι οπτικές ακτίνες που σχηματίζονται από ομόλογα εικονοσημεία παραμένουν συνεπίπεδες. Πράγματι, εάν για σταθερά επίπεδα εικόνων μετακινηθούν τα προβολικά κέντρα  $O_1$ ,  $O_2$  (Σχ. 4.1) επί της βάσης, τότε οι οπτικές ακτίνες προφανώς μεταβάλλονται, παραμένοντας όμως επί των επιτολικών τους επιπέδων τα οποία μένουν σταθερά. Η μετακίνηση αυτή μεταβάλλει βέβαια και τον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων (που προκύπτει από την ορθή προβολή των προβο-

λικών κέντρων στα επίπεδα  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ). Έτσι, για δεδομένη θέση των επιπέδων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , ο γεωμετρικός τόπος του πρωτεύοντος σημείου κάθε εικόνας είναι ευθεία διερχόμενη από τον πόλο της και οριζόμενη από την ορθή προβολή της ευθείας  $o$  της βάσης στο επίπεδο της εικόνας. Σε κάθε σημείο αυτής της ευθείας αντιστοιχεί διαφορετική τιμή σταθεράς της μηχανής ( $c_1$  για την μια εικόνα ή  $c_2$  για την άλλη), ίση με την απόσταση του αντίστοιχου πρωτεύοντος σημείου από την βάση.

Επιπλέον, τα επίπεδα των εικόνων είναι ελεύθερα να στρέφονται περί την ευθεία τομής τους  $g$  κατά οποιαδήποτε γωνία  $\vartheta$  χωρίς να διαταράσσεται η συνεπιπεδότητα των οπτικών ακτίνων, αφού οι δέσμες των επιπολικών ευθειών διατηρούνται σε προοπτική θέση. Για επίπεδο  $\varepsilon_1$  σταθερό, η περιστροφή του  $\varepsilon_2$  περί την  $g$  ορίζει κύκλο κάθετο σε αυτήν ως τον γεωμετρικό τόπο του δεύτερου πόλου  $e_2$  (βλ. και Σχ. 4.10). Σε κάθε θέση του πόλου  $e_2$  η ευθεία  $o$  της βάσης του στερεοζεύγους προκύπτει με σύνδεσή του με τον πόλο  $e_1$ , και έτσι, καθώς η γωνία  $\vartheta$  μεταβάλλεται, η ευθεία  $o$  περιγράφει πλάγιο κώνο με κορυφή το  $e_1$  και βάση τον προαναφερθέντα κύκλο επί του οποίου δεσμεύεται το  $e_2$ . Η ορθή προβολή της ευθείας  $o$  της βάσης στα επίπεδα των δύο εικόνων ορίζει τις ευθείες του γεωμετρικού τόπου του αντίστοιχου πρωτεύοντος σημείου, οι οποίες μεταβάλλονται με αλλαγή της γωνίας  $\vartheta$ . Στην ενότητα 4.6.2 διατυπώνεται σχέση υπολογισμού των ευθειών του πρωτεύοντος σημείου συναρτήσει του επιπολικού πίνακα, της ευθείας  $g$  και της γωνίας  $\vartheta$ . Αποδεικνύεται επίσης ότι οι ευθείες αυτές στις δύο εικόνες συνδέονται μέσω ομογραφίας, τα στοιχεία της οποίας εξαρτώνται από τον επιπολικό πίνακα και την ευθεία  $g$  (βλ. ενότητα 4.6.3). Με αυτόν τον τρόπο δείχνεται ότι ο εσωτερικός προσανατολισμός των δύο εικόνων δεν είναι ανεξάρτητος. Για δεδομένη ευθεία  $g$  ορίζονται στα επίπεδα των εικόνων, εκτός των δεσμών των επιπολικών ευθειών, δύο νέες προβολικές δέσμες ευθειών με κέντρα και πάλι τους πόλους, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τους γεωμετρικούς τόπους των δύο πρωτευόντων σημείων. Αν είναι επιπλέον γνωστό ότι οι δύο εικόνες έχουν το ίδιο πρωτεύον σημείο, τότε η θέση του δεσμεύεται περαιτέρω σε τμήμα κωνικής τομής (βλ. και Σχ. 4.12, αριστερά), η εξίσωση της οποίας προσδιορίζεται από τον επιπολικό πίνακα και την ευθεία  $g$  (βλ. ενότητα 4.8.1).

Οι προαναφερθέντες βαθμοί ελευθερίας προϋποθέτουν ότι έχει προσδιοριστεί η ευθεία τομής των επιπέδων των εικόνων ή, πράγμα ισοδύναμο, ότι οι επιπολικές δέσμες έχουν έρθει σε προοπτική θέση. Με εξέταση του ζητήματος αυτού στο επίπεδο  $\varepsilon_1$  της πρώτης εικόνας (θεωρείται δηλαδή γωνία  $\vartheta = \pi$ ) αποδεικνύεται πως ο ορισμός της ευθείας  $g$  δεν δεσμεύεται από τον επιπολικό πίνακα (βλ. ενότητα 4.3). Με κατάλληλη στροφή και μετάθεση της δεύτερης εικόνας στο επίπεδο της πρώτης, επιτυγχάνεται τομή των ομόλογων επιπολικών ευθειών επί οποιασδήποτε ευθείας  $g$ . Έτσι, η επιλογή της  $g$  είναι απολύτως ελεύθερη δίνοντας, σε συνδυασμό με τις μεταβολές που αναφέρθηκαν προηγουμένως, διαφορετικές κάθε φορά 3D γεωμετρικές στερεοζεύγους. Ωστόσο παράλληλες ευθείες  $g$  οδηγούν σε γεωμετρίες που διαφέρουν μόνο κατά κλίμακα, και άρα μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες (η αλλαγή κλίμακας δεν επηρεάζει τους σχετικούς και εσωτερικούς προσανατολισμούς που προκύπτουν). Υπ' αυτήν, λοιπόν, την έννοια ως δυνατές ευθείες τομής των επιπέδων των δύο εικόνων μπορούν να θεωρηθούν μόνο οι διερχόμενες από τυχαίο σημείο  $K$  του  $\varepsilon_1$  (βλ. και Σχ. 4.5). Απομένει, τότε, ένας μόνο βαθμός ελευθερίας για την  $g$  (η κλίση της ή η γωνία της με την ευθεία  $e_1K$ ). Η δεσμευση της ευθείας  $g$  δια σταθερού σημείου έχει το πλεονέκτημα ότι περιορίζει τις δυνατές θέσεις της κορυφής της επιπολικής δέσμης της

δεύτερης εικόνας επί κύκλου διερχόμενου από τον πόλο  $\mathbf{e}_1$ , ο οποίος μπορεί να προσδιοριστεί από τον επιπολικό πίνακα (βλ. ενότητα 4.4). Κάθε σημείο αυτού του *επιπολικού κύκλου*, όπως ονομάστηκε, αντιστοιχεί σε διαφορετική ευθεία  $\mathbf{g}$ . Το σημείο τομής της τελευταίας με την ευθεία που συνδέει τους δύο πόλους αποδεικνύεται ότι κείται επί κωνικής (βλ. και Σχ. 4.6), γεγονός που διευκολύνει την αντιστοίχιση μεταξύ των σημείων του επιπολικού κύκλου και των ευθειών  $\mathbf{g}$ , τόσο γεωμετρικά όσο και αναλυτικά, καθώς αυτή περιγράφεται από το μαθηματικό μοντέλο της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας (βλ. ενότητα 4.5.2).

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν, μπορεί κανείς να πει ότι το σύνολο των γεωμετριών λήψης οι οποίες αντιστοιχούν σε δεδομένο επιπολικό πίνακα  $\mathbf{F}$  είναι δυνατόν να προσδιοριστεί γεωμετρικά ως εξής. Από τον επιπολικό πίνακα προσδιορίζονται οι πόλοι, οι δέσμες των επιπολικών ευθειών και, με επιλογή σημείου  $\mathbf{K}$  στην πρώτη εικόνα, ο επιπολικός κύκλος. Εν συνεχεία, τοποθετείται η δεύτερη εικόνα στο επίπεδο της πρώτης (με στροφή και μετάθεση) κατά τρόπον ώστε, αφενός, ο πόλος  $\mathbf{e}_2$  να ανήκει στον επιπολικό κύκλο και, αφετέρου, το σημείο  $\mathbf{K}$  να κείται επί της επιπολικής του ευθείας. Έτσι, όλες οι ομόλογες επιπολικές ευθείες θα τέμνονται επί ευθείας  $\mathbf{g}$  διερχόμενης από το  $\mathbf{K}$ , η οποία αντιπροσωπεύει την ευθεία τομής των επιπέδων των εικόνων (βλ. και Σχ. 4.5). Σε κάθε δυνατή θέση του πόλου  $\mathbf{e}_2$  αντιστοιχεί διαφορετική διεύθυνση της  $\mathbf{g}$  ή, αντίστροφα, περιστροφή της  $\mathbf{g}$  περί το σημείο  $\mathbf{K}$  μεταβάλλει την θέση του  $\mathbf{e}_2$  επί του επιπολικού κύκλου. Προφανώς, τα επίπεδα των δύο εικόνων είναι σε κάθε περίπτωση ελεύθερα να περιστρέφονται περί την ευθεία  $\mathbf{g}$ , ενώ και τα προβολικά κέντρα  $\mathbf{O}_1$ ,  $\mathbf{O}_2$  μπορούν να επιλέγονται ελεύθερα επί της ευθείας της βάσης που ορίζεται από τους πόλους. Οι εσωτερικοί προσανατολισμοί των εικόνων προκύπτουν, τέλος, με ορθή προβολή του προβολικού κέντρου κάθε μιας στο επίπεδο της. Πρέπει να σημειωθεί βέβαια πως ισχύει και εδώ η πολλαπλότητα λύσεων του σχετικού προσανατολισμού, δηλαδή η δυνατότητα αντιμετάθεσης των εικόνων και στροφής της δεύτερης κατά γωνία  $\omega = \pi$  περί την ευθεία  $o$  της βάσης (βλ. ενότητα 4.5.3).

Μετά λοιπόν από αυτήν την συνοπτική παρουσίαση των γεωμετρικών βαθμών ελευθερίας ζεύγους για το οποίο δεδομένος είναι μόνον ο επιπολικός πίνακας, οι επόμενες ενότητες αναλύουν αυτή την γεωμετρία, την τεκμηριώνουν με τις αναγκαίες αποδείξεις και παρουσιάζουν αναλυτικές σχέσεις που διατυπώνονται στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής.

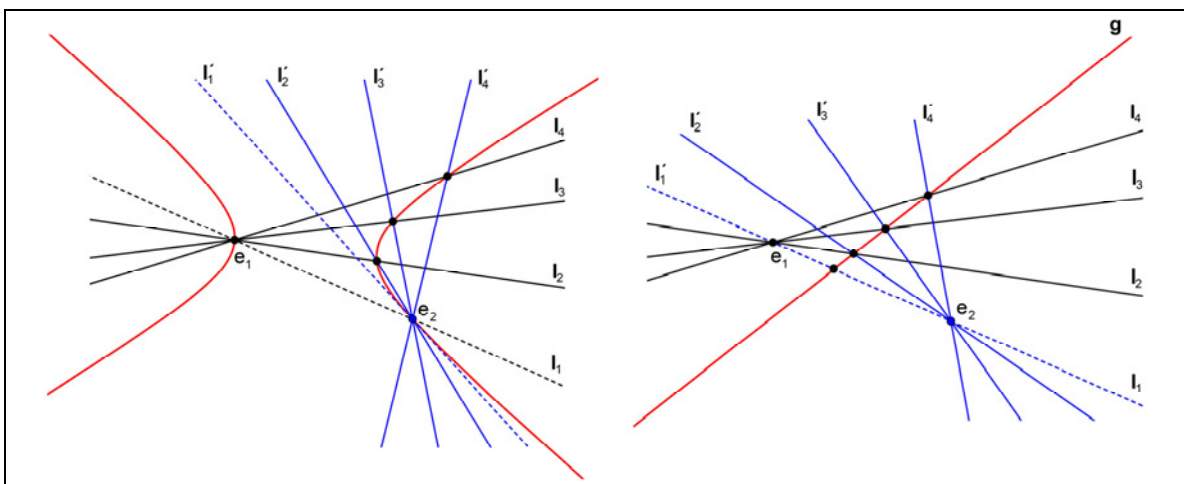
### 4.3 Επιπολικές δέσμες σε προοπτική θέση

Από τον επιπολικό πίνακα  $\mathbf{F}$  στερεοζεύγους προσδιορίζονται οι πόλοι  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{e}_2$  των εικόνων (Εξ. 3.33 και 3.37). Επιπλέον, σε κάθε ευθεία  $l_i$  της πρώτης εικόνας δια του πόλου  $\mathbf{e}_1$  αντιστοιχεί ευθεία  $l_i'$  της δεύτερης (Εξ. 3.34). Ορίζονται κατ' αυτόν τον τρόπο δύο δέσμες ομόλογων επιπολικών ευθειών. Αν θεωρηθεί ότι τα επίπεδα των εικόνων δεν είναι παράλληλα (δηλαδή ορίζεται ευθεία τομής τους) ούτε παράλληλα με την βάση (δηλαδή οι πόλοι δεν βρίσκονται στο άπειρο), τότε αναγκαία προϋπόθεση για να τοποθετηθούν σωστά στον χώρο είναι οι δέσμες των επιπολικών ευθειών να τέμνονται επί της ευθείας τομής των επιπέδων των εικόνων (Σχ. 4.1), να βρίσκονται δηλαδή σε προοπτική θέση. Δεδομένου πως στροφή των εικόνων περί την ευθεία τομής των επιπέδων τους δεν διαταράσσει την προοπτική θέση των ομόλογων επιπολικών ευθειών, το ζήτημα της προοπτικότητας μπορεί να αντιμετωπιστεί στις δύο διαστάσεις με κατάκλιση του  $\varepsilon_2$  στο  $\varepsilon_1$  (γωνία  $\vartheta = \pi$ ). Τίθεται έτσι

το ερώτημα του πώς πρέπει να μετατεθεί και να στραφεί η δεύτερη εικόνα στο επίπεδο της πρώτης ώστε όλα τα ζεύγη ομόλογων επιπολικών ευθειών να τέμνονται επί ευθείας. Η απάντηση δεν είναι μοναδική. Δύο επίπεδες προβολικές δέσμες ευθειών μπορούν, με κατάλληλο συνδυασμό στροφής και μετάθεσης, να τέμνονται επί κάθε ευθείας μη διερχόμενης από ένα από τα κέντρα τους. Εν συνεχεία εξετάζεται πώς δύο προβολικές δέσμες έρχονται σε προοπτική θέση μόνο με στροφή της μιας, αλλά και πώς πρέπει να στραφεί και να μετακινηθεί η μια δέσμη ώστε να τέμνει την άλλη επί δεδομένης ευθείας του επιπέδου. Αναγκαία και ικανή συνθήκη σε κάθε περίπτωση είναι η τομή τριών ομόλογων επιπολικών ευθειών επί ευθείας. Εάν συμβεί αυτό, τότε – χάρη στην διατήρηση του διπλού λόγου (βλ. ενότητα 2.5.1.1) – όλες οι άλλες ομόλογες ακτίνες οφείλουν επίσης να τέμνονται επί της ευθείας τομής των τριών.

#### 4.3.1 Προοπτικότητα με δεδομένη θέση των πόλων

Εάν τοποθετηθεί η δεύτερη εικόνα στο επίπεδο της πρώτης σε τυχαία θέση, τότε κατά το θεώρημα του Steiner οι τομές των ομόλογων επιπολικών ευθειών θα ανήκουν σε κωνική τομή διερχόμενη από τους πόλους (ενότητα 2.5.1.1). Αν μάλιστα τοποθετηθεί έτσι ώστε τα συστήματα συντεταγμένων των εικόνων να ταυτίζονται, η εξίσωση της κωνικής υπολογίζεται απευθείας από τον επιπολικό πίνακα (βλ. ενότητα 3.2.3.2). Έστω  $e_2$  η θέση του δευτέρου πόλου,  $l_1$  η ευθεία που συνδέει τους δύο πόλους και  $l_1'$  η ομόλογη επιπολική ευθεία της, η οποία γεωμετρικά αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κωνικής στο σημείο  $e_2$  (Σχ. 4.2, αριστερά). Στροφή της δεύτερης δέσμης των επιπολικών ευθειών περί το  $e_2$  τέτοια ώστε η  $l_1'$  να συμπίψει με την  $l_1$  εκφυλίζει την κωνική τομή σε ευθεία, με αποτέλεσμα οι δέσμες να βρίσκονται πλέον σε προοπτική θέση (Σχ. 4.2, δεξιά)<sup>2</sup>. Πράγματι, τα σημεία τομής δύο τυχαίων ζευγών  $l_2, l_2'$  και  $l_3, l_3'$  ορίζουν ευθεία  $g$  επί της οποίας τέμνονται επίσης οι  $l_1, l_1'$  που έχουν ήδη ταυτιστεί. Λόγω της διατήρησης του διπλού λόγου, κάθε νέο ζεύγος ομόλογων επιπολικών ευθειών  $l_4, l_4'$  θα τέμνεται επίσης επί της  $g$ . Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί και ο προσδιορισμός της κωνικής τομής που διέρχεται από τους δύο πόλους και τα τρία συνευθειακά σημεία τομής των επιπολικών ευθειών. Η κωνική στην περίπτωση αυτή είναι εκφυλισμένη και αποτελείται από δύο ευθείες, την  $g$  και την  $l_1 \equiv l_1'$ .



Σχήμα 4.2. Δέσμες επιπολικών ευθειών σε προβολική (αριστερά) και προοπτική θέση (δεξιά).

<sup>2</sup> Αυτό μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικές γωνίες στροφής, οι οποίες διαφέρουν κατά  $\pi$ .

Η ευθεία  $\mathbf{g}$  ονομάζεται άξονας προοπτικότητας των δύο δεσμών και συνιστά δυνατή θέση της ευθείας τομής των επιπέδων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . Μετάθεση του κέντρου της δεύτερης δέσμης επί της ευθείας των δύο πόλων έχει ως συνέπεια παράλληλη μετακίνηση της ευθείας  $\mathbf{g}$  (που αντιστοιχεί σε μετάθεση των δύο εικόνων στην διεύθυνση της βάσης). Κάθε άλλη μετάθεση της δεύτερης δέσμης ορίζει νέα ευθεία  $\mathbf{g}$  διαφορετικής θέσης και διεύθυνσης. Η απαραίτητη γωνία στροφής  $\kappa$  (ή  $\kappa + \pi$ ) της δεύτερης δέσμης περί τον πόλο ισούται κάθε φορά με την γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\mathbf{l}_1'$  (στην νέα της θέση) και  $\mathbf{l}_1$ . Αν  $\mathbf{l}_1 = [a \ b \ c]^T$  και  $\mathbf{l}_1' = [a' \ b' \ c']^T$  οι ομογενείς τους αναπαραστάσεις, τότε:

$$\tan(\kappa) = \frac{a'b - ab'}{a'a + b'b} \quad (4.1)$$

Από την Εξ. (4.1) μπορούν να εξαχθούν οι δύο τιμές,  $\kappa$  και  $\kappa + \pi$ , της γωνίας.

#### 4.3.1.1 Αλγόριθμος υπολογισμού της ευθείας $\mathbf{g}$

Ο αλγόριθμος εύρεσης της ευθείας  $\mathbf{g}$  που αντιστοιχεί σε τυχαία θέση  $\mathbf{e}_2' = [x_2' \ y_2' \ 1]^T$  του δεύτερου πόλου περιγράφεται, συνοπτικά, από τα εξής βήματα:

- Μέσω του επιπολικού πίνακα υπολογίζονται οι θέσεις των πόλων  $\mathbf{e}_1 = [x_1 \ y_1 \ 1]^T$  και  $\mathbf{e}_2 = [x_2 \ y_2 \ 1]^T$  (Εξ. 3.33 ή Εξ. 3.37).
- Προσδιορίζονται η ευθεία  $\mathbf{l}_1$  από το εξωτερικό γινόμενο των σημείων  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{e}_2'$  (Εξ. 2.10) και η ομόλογη επιπολική της  $\mathbf{l}_1'$  μέσω του επιπολικού πίνακα (Εξ. 3.34).
- Υπολογίζεται η γωνία  $\kappa$  των δύο ευθειών (Εξ. 4.1).
- Μέσω του επιπολικού πίνακα ορίζονται δύο ζεύγη ομόλογων επιπολικών ευθειών  $\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_2'$  και  $\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_3'$ , με επιλογή είτε δύο τυχαίων σημείων στην πρώτη εικόνα (Εξ. 3.28) είτε των ευθειών  $\mathbf{l}_2 = [1 \ -1 \ x_1+y_1]^T$  και  $\mathbf{l}_3 = [-1 \ -1 \ x_1+y_1]^T$  που διέρχονται από το  $\mathbf{e}_1$  και έχουν κλίση 1 και -1, αντίστοιχα (Εξ. 3.34).
- Ορίζεται ευθεία  $\mathbf{l}_2''$  δια του  $\mathbf{e}_2'$  με κλίση  $s$  η οποία προκύπτει από το άθροισμα της γωνίας κλίσης της  $\mathbf{l}_2'$  και της γωνίας  $\kappa$ . Αν  $\mathbf{l}_2' = [a_2' \ b_2' \ c_2']^T$ , η κλίση της δίνεται από την σχέση  $s_2' = -(a_2' / b_2')$ , ενώ η κλίση της  $\mathbf{l}_2''$  (από την σχέση υπολογισμού της εφαπτομένης του αθροίσματος γωνιών) προκύπτει ως:

$$s = \frac{s_2' + \tan(\kappa)}{1 - s_2' \tan(\kappa)} \quad (4.2)$$

Έτσι:

$$\mathbf{l}_2'' = [s \ -1 \ y_2' - sx_2']^T \quad (4.3)$$

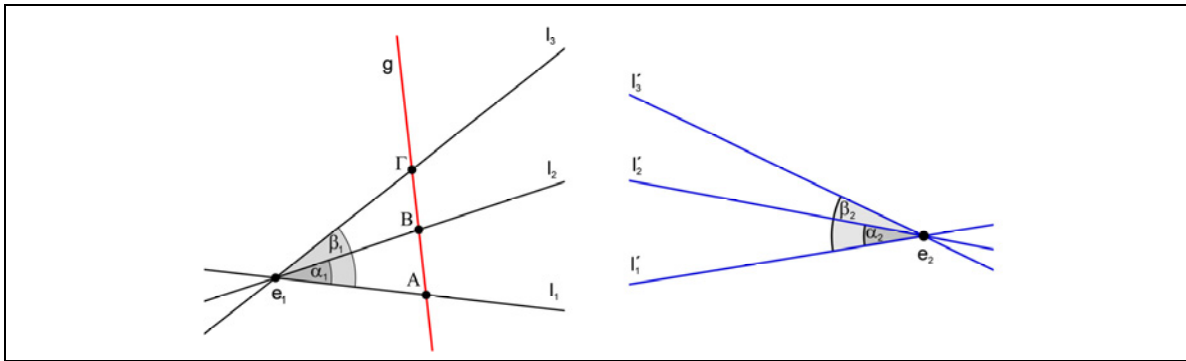
Η  $\mathbf{l}_2''$  αντιστοιχεί στην νέα θέση της  $\mathbf{l}_2'$  όταν η δέσμη των επιπολικών ευθειών της δεύτερης εικόνας στραφεί περί τον πόλο  $\mathbf{e}_2$  κατά γωνία  $\kappa$  (ή  $\kappa + \pi$ ) και μετατεθεί στην θέση  $\mathbf{e}_2'$ . Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η ευθεία  $\mathbf{l}_3''$ .

- Βρίσκονται τα σημεία τομής των ευθειών  $\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_2''$  και  $\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_3''$  (Εξ. 2.9), και από αυτά η ευθεία  $\mathbf{g}$  (Εξ. 2.10).

#### 4.3.2 Προοπτικότητα επί δεδομένου άξονα

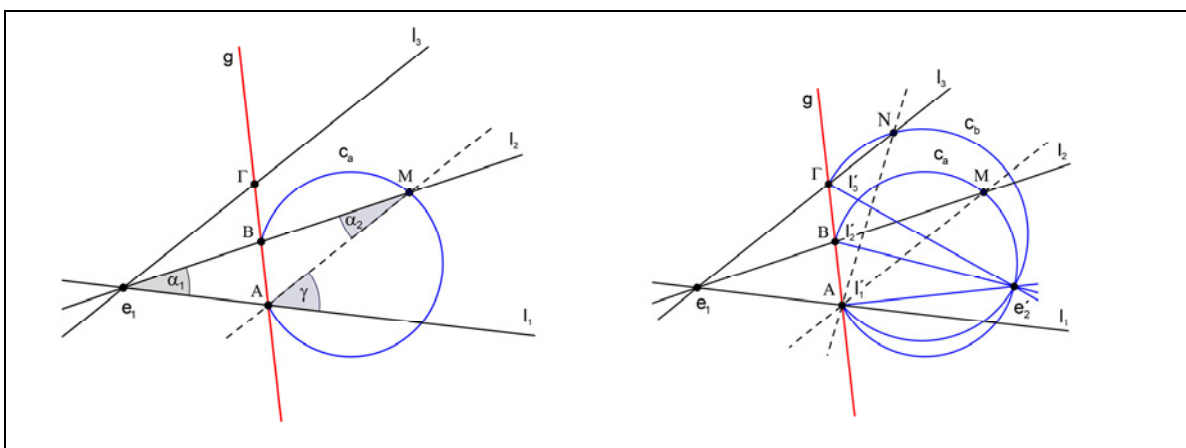
Εάν, αντιθέτως, ζητούμενη δεν είναι απλώς η τοποθέτηση των δεσμών σε προοπτική θέ-

ση αλλά η τομή τους επί δεδομένης ευθείας  $g$ , τότε εκτός από στροφή απαιτείται και μετάθεση της δεύτερης δέσμης. Για τον προσδιορισμό της αρκούν τρία ζεύγη ομόλογων επιπολικών ευθειών  $(l_1, l_1')$ ,  $(l_2, l_2')$  και  $(l_3, l_3')$  στις δύο εικόνες. Έστω ότι  $\alpha_1$  και  $\beta_1$  είναι οι γωνίες των ευθειών  $l_1, l_2$  και  $l_1, l_3$ , αντίστοιχα, και  $\alpha_2, \beta_2$  εκείνες των  $l_1', l_2'$  και  $l_1', l_3'$  (Σχ. 4.3).



Σχήμα 4.3. Δέσμες επιπολικών ευθειών και δεδομένος άξονας προοπτικότητας.

Η ευθεία  $g$  τέμνει τις επιπολικές ευθείες της πρώτης εικόνας στα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$ . Η απαίτηση να διέρχονται οι επιπολικές ευθείες  $l_1'$  και  $l_2'$  από τα αντίστοιχα σημεία  $A$  και  $B$  περιορίζει τις δυνατές θέσεις της κορυφής της δεύτερης δέσμης σε κυκλικό τόξο  $c_a$ , που είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία γωνία  $\alpha_2$  βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  (Σχ. 4.4, αριστερά). Για να προσδιοριστεί το κυκλικό τόξο  $c_a$  απαιτείται ένα τρίτο σημείο του εκτός των  $A, B$ . Τέτοιο είναι το σημείο  $M$ , όπου ο κύκλος τέμνει την ευθεία  $l_2$  που διέρχεται από το  $A$  και σχηματίζει γωνία  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$  με την  $l_1$ . Από το τρίγωνο  $Ame_1$  φαίνεται ότι η γωνία  $Ame_1$  πράγματι ισούται με την  $\alpha_2$ . Το  $M$  είναι, έτσι, το σημείο τομής του κυκλικού τόξου  $c_a$  με την  $l_2$ .



Σχήμα 4.4. Τομή επιπολικών ευθειών επί δεδομένης ευθείας.

Ομοίως, οι επιπολικές ευθείες  $l_1'$  και  $l_3'$  ορίζουν για το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$  ένα δεύτερο κυκλικό τόξο  $c_b$ . Αυτό προσδιορίζεται από τα  $A, \Gamma$  και ένα τρίτο σημείο  $N$ , το οποίο προκύπτει κατά τρόπο ανάλογο του  $M$  (Σχ. 4.4, δεξιά). Η δεύτερη δέσμη οφείλει να βαίνει ταυτόχρονα στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  υπό γωνία  $\alpha_2$  και στο  $A\Gamma$  υπό  $\beta_2$ . Η θέση όπου ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες και στην οποία πρέπει να μετατεθεί η κορυφή της δεύτερης δέσμης είναι το σημείο τομής  $e_2'$  των δύο κυκλικών τόξων. Σημειώνεται ότι υπάρχει βέβαια

και δεύτερη τέτοια θέση, στην άλλη πλευρά της ευθείας  $\mathbf{g}$ , αν θεωρηθούν τα αντικατοπτρικά των κυκλικών τόξων  $c_a$  και  $c_b$  ως προς την  $\mathbf{g}$ . Η θέση αυτή αντιστοιχεί στην αντικατοπτρική της δεύτερης δέσμης και έτσι μπορεί προς στιγμήν να αγνοηθεί, θα περιγραφεί όμως αργότερα μέσω στροφής της δεύτερης εικόνας περί την ευθεία  $\mathbf{g}$  (βλ. ενότητα 4.6).

Εκτός της απαραίτητης μετάθεσης της δεύτερης εικόνας που φέρνει τον πόλο  $\mathbf{e}_2$  στην θέση  $\mathbf{e}_2'$ , απαιτείται και κατάλληλη στροφή  $\kappa$  (ή  $\kappa + \pi$ ) ώστε η ευθεία  $\mathbf{l}_1'$  να διέρχεται από το σημείο  $\mathbf{A}$ . Η γωνία αυτή ισούται με εκείνη που σχηματίζουν οι ευθείες  $\mathbf{e}_2'\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{l}_1'$  και μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά από την Εξ. (4.1), αφού προηγουμένως προσδιοριστούν οι ομογενείς αναπαραστάσεις των δύο ευθειών.

#### 4.3.2.1 Αλγόριθμος υπολογισμού στροφής και μετάθεσης της δεύτερης δέσμης

Έτσι, ο επόμενος αλγόριθμος υπολογίζει από τον επιτολικό πίνακα την θέση  $\mathbf{e}_2'$  του πόλου της δεύτερης δέσμης και την στροφή  $\kappa$  περί αυτόν προκειμένου οι ομόλογες επιτολικές ευθείες να τέμνονται επί δεδομένης ευθείας  $\mathbf{g}$ :

- Μέσω του επιτολικού πίνακα υπολογίζονται οι θέσεις των πόλων  $\mathbf{e}_1 = [x_1 \ y_1 \ 1]^T$  και  $\mathbf{e}_2 = [x_2 \ y_2 \ 1]^T$  (Εξ. 3.33 ή Εξ. 3.37).
- Κατόπιν ορίζονται τρία ζεύγη ομόλογων επιτολικών ευθειών  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_1')$ ,  $(\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_2')$ ,  $(\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_3')$ , με επιλογή τριών τυχαίων σημείων στην πρώτη εικόνα (Εξ. 3.28) είτε των ευθειών  $\mathbf{l}_1 = [0 \ 1 \ -y_1]^T$ ,  $\mathbf{l}_2 = [1 \ -1 \ x_1 + y_1]^T$  και  $\mathbf{l}_3 = [-1 \ -1 \ x_1 + y_1]^T$  που διέρχονται από το  $\mathbf{e}_1$  και έχουν κλίση 0, 1 και -1, αντίστοιχα (Εξ. 3.34).
- Βρίσκονται τα σημεία τομής  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  και  $\mathbf{G}$  της  $\mathbf{g}$  με τις ευθείες  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$  και  $\mathbf{l}_3$ , αντίστοιχα, από το εξωτερικό γινόμενο των ομογενών τους αναπαραστάσεων (Εξ. 2.9).
- Υπολογίζονται οι γωνίες  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  των ευθειών  $\mathbf{l}_1'$ ,  $\mathbf{l}_2'$  και  $\mathbf{l}_1'$ ,  $\mathbf{l}_3'$ , αντίστοιχα (Εξ. 4.1).
- Ορίζεται ευθεία  $\mathbf{l}_{AM}$  δια του  $\mathbf{A}$  με κλίση  $s$  που προκύπτει ως άθροισμα της γωνίας κλίσης της  $\mathbf{l}_2$  και της γωνίας  $\alpha_2$ . Αν  $s_2 = -(a_2/b_2)$  η κλίση της ευθείας  $\mathbf{l}_2 = [a_2 \ b_2 \ c_2]^T$ , τότε η κλίση της  $\mathbf{l}_{AM}$  είναι:

$$s = \frac{s_2 + \tan(\alpha_2)}{1 - s_2 \tan(\alpha_2)} \quad (4.4)$$

και η  $\mathbf{l}_{AM}$  εκφράζεται ως:

$$\mathbf{l}_{AM} = [s \ -1 \ y_A - sx_A]^T \quad (4.5)$$

όπου  $x_A$ ,  $y_A$  οι μη ομογενείς συντεταγμένες του σημείου  $\mathbf{A}$ . Η  $\mathbf{l}_{AM}$  σχηματίζει έτσι με την  $\mathbf{l}_1$  γωνία  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ . Μέσω της ευθείας  $\mathbf{l}_3$  και της γωνίας  $\beta_2$  ορίζεται με ανάλογο τρόπο η ευθεία  $\mathbf{l}_{AN}$ .

- Από τα εξωτερικά γινόμενα των ευθειών  $\mathbf{l}_{AM}$ ,  $\mathbf{l}_2$  και  $\mathbf{l}_{AN}$ ,  $\mathbf{l}_3$  προσδιορίζονται τα σημεία  $\mathbf{M}$  και  $\mathbf{N}$ , αντίστοιχα.
- Προσδιορίζεται ο κύκλος  $c_a$  από τα σημεία  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  και  $\mathbf{M}$ , και ο  $c_b$  από τα  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{G}$  και  $\mathbf{N}$ .
- Βρίσκεται το σημείο  $\mathbf{e}_2'$  ως η τομή των κύκλων  $c_a$  και  $c_b$  (το δεύτερο σημείο τομής τους είναι το  $\mathbf{A}$ ).
- Τέλος, και αφού προσδιοριστεί η ευθεία  $\mathbf{e}_2'\mathbf{A}$ , μπορεί να υπολογιστεί και η γωνία  $\kappa$  (ή  $\kappa + \pi$ ) που αυτή σχηματίζει με την  $\mathbf{l}_1'$  (Εξ. 4.1).

### 4.3.3 Παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα

Η δυνατότητα να έρθουν οι δέσμες επιπολικών ευθειών σε προοπτική θέση με κατάλληλη στροφή ( $\kappa$ ) και μετάθεση ( $d_x, d_y$ ) της δεύτερης εικόνας στο επίπεδο της πρώτης, και μάλιστα με άξονα προοπτικότητας οποιαδήποτε ευθεία  $\mathbf{g}$  μη διερχόμενη από τον πόλο  $\mathbf{e}_1^3$ , επιτρέπει να αναδιατυπωθεί το φωτογραμμετρικό πρόβλημα του προσδιορισμού της 2D επιπολικής γεωμετρίας ως εξής. Έστω  $\mathbf{g}$  τυχαία ευθεία της πρώτης εικόνας και  $\mathbf{x} = [x \ y \ 1]^T$ ,  $\mathbf{x}' = [x' \ y' \ 1]^T$  ζεύγος ομόλογων εικονοσημείων. Με θεώρηση των εικόνων σε κοινό σύστημα επιπέδων συντεταγμένων, αναζητούνται οι θέσεις  $\mathbf{e}_1 = [x_1 \ y_1 \ 1]^T$  και  $\mathbf{e}_2 = [x_2 \ y_2 \ 1]^T$  των δύο πόλων καθώς και ο 2D ισομετρικός μετασχηματισμός (στροφή και μετάθεση):

$$\mathbf{H}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa) & -\sin(\kappa) & d_x \\ \sin(\kappa) & \cos(\kappa) & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ώστε η ευθεία  $\mathbf{e}_1\mathbf{x}$  και η ευθεία  $\mathbf{e}_2\mathbf{x}'$ , μετασχηματιζόμενη με τον  $\mathbf{H}$ , να τέμνονται επί της  $\mathbf{g}$ . Αυτό ισοδυναμεί με την απαίτηση το σημείο  $\mathbf{x}$  να ανήκει στην επιπολική ευθεία  $\mathbf{l}$  του  $\mathbf{x}'$ , η οποία ορίζεται από τον πόλο  $\mathbf{e}_1$  και το σημείο τομής της ευθείας  $\mathbf{e}_2\mathbf{x}'$  (αφού αυτή στραφεί και μετατεθεί μέσω του  $\mathbf{H}$ ) με την  $\mathbf{g}$ .

Αναλυτικότερα, η ευθεία  $\mathbf{e}_2\mathbf{x}'$  προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο των σημείων  $\mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{x}'$  (Εξ. 2.10):

$$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{x}' \quad (4.7)$$

Εν συνεχεία η  $\mathbf{l}'$  στρέφεται και μετατίθεται, μέσω του  $\mathbf{H}$  (Εξ. 2.30), παίρνοντας την μορφή:

$$\mathbf{l}'_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{l}' = \mathbf{H}^{-T} [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{x}' \quad (4.8)$$

Η  $\mathbf{l}'_{\mathbf{H}}$  τέμνει την  $\mathbf{g}$  σε σημείο  $\mathbf{A}$  (Εξ. 2.9):

$$\mathbf{A} = [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{l}'_{\mathbf{H}} = [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{H}^{-T} [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{x}' \quad (4.9)$$

και η επιπολική του  $\mathbf{x}'$  προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο του  $\mathbf{A}$  με το  $\mathbf{e}_1$  (Εξ. 2.10):

$$\mathbf{l} = [\mathbf{e}_1]_{\times} \mathbf{A} = [\mathbf{e}_1]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{H}^{-T} [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{x}' \quad (4.10)$$

Το σημείο  $\mathbf{x}$  οφείλει να ανήκει στην  $\mathbf{l}$  και συνεπώς να ικανοποιεί την (Εξ. 2.8):

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T [\mathbf{e}_1]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{H}^{-T} [\mathbf{e}_2]_{\times} \mathbf{x}' = 0 \quad (4.11)$$

Οι Εξ. (4.10) και (4.11) είναι ισοδύναμες με τις (3.28), (3.29) που ορίζουν, αντίστοιχα, την επιπολική ευθεία εικονοσημείου μέσω του επιπολικού πίνακα και την δέσμευση που οφείλουν να ικανοποιούν τα ομόλογα σημεία<sup>4</sup>. Έτσι, η προσέγγιση αυτή καταλήγει σε ορισμό του επιπολικού πίνακα συναρτήσει της θέσης των δύο πόλων και των παραμέτρων στροφής και μετάθεσης της δεύτερης εικόνας που απαιτούνται ώστε να τέμνονται οι ομόλογες επιπολικές ευθείες επί ευθείας  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{F}^T = [\mathbf{e}_1]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{H}^{-T} [\mathbf{e}_2]_{\times} \quad (4.12)$$

<sup>3</sup> Στην περίπτωση αυτή οι τομές όλων των επιπολικών ευθειών με την  $\mathbf{g}$  ταυτίζονται με το σημείο  $\mathbf{e}_1$ .

<sup>4</sup> Με την διαφορά ότι έχουν αντιστραφεί οι ρόλοι των δύο εικόνων. Αυτό εξηγεί γιατί στην Εξ. (4.12) εμφανίζεται ο ανάστροφος του επιπολικού πίνακα.



Εναλλακτικά, το πρόβλημα υπολογισμού της 2D επιτολικής γεωμετρίας μπορεί να διατυπωθεί και ως εκείνο της αναζήτησης της θέσης των δύο πόλων, του άξονα προοπτικότητας  $\mathbf{g}$  που αντιστοιχεί στις θέσεις αυτές και της γωνίας στροφής  $\kappa$  της δεύτερης εικόνας περί τον πόλο  $\mathbf{e}_2$ . Δηλαδή, αντί δύο παραμέτρων μετάθεσης  $d_x$  και  $d_y$  (που εν προκειμένω είναι μηδενικές) υπολογίζονται οι δύο ανεξάρτητες παράμετροι της ευθείας  $\mathbf{g}$ .

Και στις δύο περιπτώσεις, η παραμετροποίηση του επιτολικού πίνακα που εισάγεται εδώ περιλαμβάνει 7 ανεξάρτητες παραμέτρους, όσες δηλαδή και οι βαθμοί ελευθερίας του. Και με αυτή την έννοια παρουσιάζει ομοιότητα με εκείνη των Luong et al. (1993) και Luong & Faugeras (1996), οι οποίοι αναλύουν τον επιτολικό πίνακα στις θέσεις των πόλων και τα στοιχεία ομογραφίας του  $P^1$  μεταξύ των επιτολικών ευθειών (βλ. ενότητα 3.2.3.1). Ωστόσο η παρούσα παραμετροποίηση – και παρά την χρήση ομογενών συντεταγμένων που απλώς διευκολύνουν την διατύπωση της – είναι στην ουσία της ευκλείδεια, καθώς στηρίζεται σε έννοιες όπως η στροφή και η μετάθεση. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την άμεση σύνδεση του επιτολικού πίνακα με την ευθεία τομής των επιπέδων των εικόνων, επιτρέπει καλύτερη κατανόηση της γεωμετρίας που είναι εγγεγραμμένη στο μαθηματικό μοντέλο του επιτολικού πίνακα.

Η διατυπωθείσα παραμετροποίηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αλγορίθμους μη γραμμικού υπολογισμού του επιτολικού πίνακα από  $\geq 7$  ομολογίες σημείων (βλ. ενότητα 3.2.4.3). Οι αναγκαίες αρχικές τιμές των παραμέτρων στροφής και μετάθεσης της δεύτερης εικόνας υπολογίζονται, μετά από μια πρώτη γραμμική επίλυση του επιτολικού πίνακα, με τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην ενότητα 4.3.2.1. Έπειτα εκτιμώνται οι βέλτιστες τιμές τους με ελαχιστοτετραγωνική συνόρθωση, με την ελαχιστοποίηση είτε του αλγεβρικού “κλεισίματος” της Εξ. (4.11) είτε των αποστάσεων στις δύο εικόνες των ομολογών εικονοσημείων από τις αντίστοιχες επιτολικές τους ευθείες που ορίζονται βάσει της Εξ. (4.10).

Η Εξ. (4.12) απλοποιείται περαιτέρω αν ως ευθεία τομής των επιτολικών ευθειών επιλεγεί ο άξονας  $y$  του συστήματος συντεταγμένων ( $\mathbf{g} = [1 \ 0 \ 0]^T$ ). Τα στοιχεία του επιτολικού πίνακα παίρνουν τότε τις εξής τιμές:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= d_x \sin(\kappa) + (y_1 - d_y) \cos(\kappa) - y_2 \\
 f_{12} &= -x_1 \cos(\kappa) \\
 f_{13} &= x_1 (y_2 + d_y \cos(\kappa) - d_x \sin(\kappa)) \\
 f_{21} &= d_x \cos(\kappa) - (y_1 - d_y) \sin(\kappa) + x_2 \\
 f_{22} &= x_1 \sin(\kappa) \\
 f_{23} &= -x_1 (x_2 + d_x \cos(\kappa) + d_y \sin(\kappa)) \\
 f_{31} &= (d_y x_2 - x_2 y_1 - d_x y_2) \cos(\kappa) - [d_x x_2 + y_2 (d_y - y_1)] \sin(\kappa) \\
 f_{32} &= x_1 (x_2 \cos(\kappa) - y_2 \sin(\kappa)) \\
 f_{33} &= x_1 [(d_x y_2 - d_y x_2) \cos(\kappa) + (d_x x_2 + d_y y_2) \sin(\kappa)]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Οι Εξ. (4.13) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και αντίστροφα, δηλαδή για την εξαγωγή των παραμέτρων  $\kappa$ ,  $d_x$  και  $d_y$  από τον επιτολικό πίνακα. Κατ' αρχάς, η γωνία  $\kappa$  προσδιορίζεται από τον λόγο των στοιχείων  $f_{22}$  και  $f_{12}$ :

$$\frac{f_{22}}{f_{12}} = -\tan(\kappa) \quad (4.14)$$

Κατόπιν, αφού πρώτα υπολογιστεί η θέση  $\mathbf{e}_2$  του πόλου της δεύτερης εικόνας (Εξ. 3.33 ή 3.37), προσδιορίζονται οι τιμές των  $d_x$  και  $d_y$  με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει από τους λόγους<sup>5</sup>  $f_{13} / f_{12}$  και  $f_{23} / f_{12}$ :

$$\begin{aligned} d_x &= \frac{f_{23}}{f_{12}} \cos^2(\kappa) + y_2 \sin(\kappa) - x_2 \cos(\kappa) + \frac{f_{13}}{f_{12}} \cos(\kappa) \sin(\kappa) \\ d_y &= -\frac{f_{13}}{f_{12}} \cos^2(\kappa) - x_2 \sin(\kappa) - y_2 \cos(\kappa) + \frac{f_{23}}{f_{12}} \cos(\kappa) \sin(\kappa) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Από την Εξ. (4.14) προκύπτουν δύο γωνιακές τιμές  $\kappa$  και  $\kappa + \pi$ . Οι παράμετροι μετάθεσης που υπολογίζονται από αυτές είναι διαφορετικές αλλά ο επιπολικός πίνακας που αντιστοιχεί στις δύο γεωμετρίες είναι ο ίδιος. Στην ουσία οι δύο ισομετρικοί μετασχηματισμοί διαφέρουν κατά γωνία  $\pi$  περί την νέα θέση  $\mathbf{e}_2'$  του πόλου της δεύτερης εικόνας, η οποία δεν επηρεάζει την τομή των ομόλογων επιπολικών ευθειών επί της ευθείας  $\mathbf{g}$ .

#### 4.4 Επιπολικός κύκλος

Κάθε ευθεία  $\mathbf{g}$  του  $\varepsilon_1$  μπορεί λοιπόν να θεωρείται ως η πιθανή ευθεία τομής των επιπέδων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  των εικόνων στερεοζεύγους, αφού με κατάλληλη μετάθεση και στροφή της δεύτερης δέσμης επιτυγχάνεται η τομή των ομόλογων επιπολικών ευθειών επί αυτής. Ωστόσο, για την περιγραφή του συνόλου των γεωμετριών λήψης που αντιστοιχούν σε δεδομένο επιπολικό πίνακα δεν είναι απαραίτητο να εξεταστούν όλες οι ευθείες του  $\varepsilon_1$ . Παράλληλη μετάθεση του άξονα προοπτικότητας  $\mathbf{g}$  των επιπολικών δεσμών έχει ως αποτέλεσμα την μετάθεση της δεύτερης δέσμης επί της ευθείας που συνδέει τους δύο πόλους. Στον 3D χώρο η μεταβολή αυτή αντιστοιχεί σε μετακίνηση της δεύτερης εικόνας στην διεύθυνση της βάσης, πράγμα που δεν διαταράσσει τον σχετικό προσανατολισμό του στερεοζεύγους. Έτσι, όταν στην συνέχεια τα επίπεδα  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στραφούν περί την ευθεία τομής τους (βλ. ενότητα 4.6), παράλληλες ευθείες  $\mathbf{g}$  δεν θα περιγράφουν παρά ισοδύναμες “οικογένειες” 3D γεωμετριών λήψης. Συνεπώς, αρκεί να εξεταστεί μόνο το υποσύνολο των ευθειών που διέρχονται από τυχαίο σημείο  $\mathbf{K}$ . Η ευθεία  $\mathbf{g}$  έχει πλέον έναν βαθμό ελευθερίας και ορίζεται από μια παράμετρο, την κλίση της, ή, εναλλακτικά, την γωνία  $\delta$  που η  $\mathbf{g}$  σχηματίζει με την ευθεία  $\mathbf{e}_1\mathbf{K}$ .

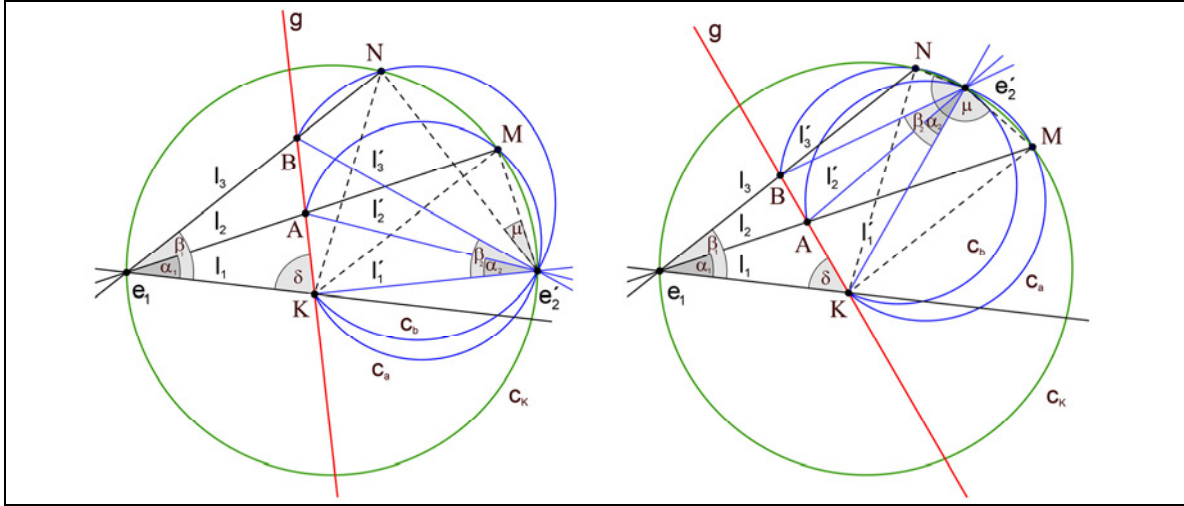
##### 4.4.1 Γενική περίπτωση

Στην γενική περίπτωση όπου η ευθεία τομής των επιπέδων των εικόνων αλλά και οι πόλοι δεν βρίσκονται στο άπειρο, αποδεικνύεται εδώ ότι η δέσμευση της ευθείας  $\mathbf{g}$  να διέρχεται από σταθερό σημείο  $\mathbf{K}$  περιορίζει τις δυνατές θέσεις της κορυφής της δεύτερης δέσμης επιπολικών ευθειών επί κύκλου  $c_K$  διερχόμενου από τον πόλο  $\mathbf{e}_1$  (Σχ. 4.5).

Έστω  $\mathbf{I}_1$  η ευθεία  $\mathbf{e}_1\mathbf{K}$  και  $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$  επιπολικές ευθείες που σχηματίζουν με αυτήν γωνίες  $\alpha_1$  και  $\beta_1$ , αντίστοιχα (Σχ. 4.5, αριστερά). Μέσω του επιπολικού πίνακα προσδιορίζονται οι ομό-

<sup>5</sup> Χρησιμοποιούνται οι λόγοι και όχι απευθείας τα  $f_{13}$  και  $f_{23}$  για να αναρριθεί η αβεβαιότητα κλίμακας των στοιχείων του  $\mathbf{F}$  που υπάρχει από την επίλυσή του μέσω ομόλογων σημείων (βλ. ενότητα 3.2.4.1).

λογες επιπολικές τους ευθείες  $l_1'$ ,  $l_2'$  και  $l_3'$ , και από αυτές οι γωνίες  $\alpha_2$  και  $\beta_2$  των  $l_1'$ ,  $l_2'$  και  $l_1'$ ,  $l_3'$ , αντίστοιχα. Η ευθεία  $g$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $K$ , ορίζεται μονοσήμαντα από την γωνία  $\delta$  που σχηματίζει με την  $l_1$  και τέμνει τις  $l_2$ ,  $l_3$  στα αντίστοιχα σημεία  $A$ ,  $B$ . Η θέση  $e_2'$  της κορυφής της δεύτερης δέσμης ώστε οι ομόλογες επιπολικές ευθείες να τέμνονται επί της  $g$  προκύπτει, όπως έχει εξηγηθεί (βλ. ενότητα 4.3.2), από την τομή δύο κυκλικών τόξων  $c_a$  και  $c_b$ , τα οποία αποτελούν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που βαίνουν στα ευθύγραμμα τμήματα  $KA$  και  $KB$  υπό γωνίες  $\alpha_2$  και  $\beta_2$ , αντίστοιχα. Τα σημεία  $M$  και  $N$  αποτελούν τις τομές των τόξων αυτών με τις ευθείες  $l_2$  και  $l_3$ .



Σχήμα 4.5. Επιπολικός κύκλος.

Το σημείο  $A$  ανήκει στο κυκλικό τόξο  $c_a$  και βαίνει στην χορδή  $KM$  υπό γωνία  $\alpha_1 + \delta$  (βλ. τρίγωνο  $e_1AK$ ). Το  $e_2'$  ανήκει επίσης στο  $c_a$  και άρα βαίνει στην  $KM$  υπό την παραπληρωματική γωνία της  $\alpha_1 + \delta$  (Σχ. 4.5, αριστερά). Αναλόγως όμως της σχετικής θέσης των σημείων  $e_2'$  και  $A$  ως προς χορδή  $KM$ , το  $e_2'$  είναι δυνατόν να βαίνει στην  $KM$  υπό την ίδια γωνία  $\alpha_1 + \delta$  (Σχ. 4.5, δεξιά). Όσον αφορά το κυκλικό τόξο  $c_b$ , αντίστοιχα, το  $B$  βαίνει στην χορδή  $KN$  υπό γωνία  $\beta_1 + \delta$  (βλ. τρίγωνο  $e_1BK$ ), ενώ το  $e_2'$  βαίνει στην  $KN$  υπό την παραπληρωματική γωνία της  $\beta_1 + \delta$  (Σχ. 4.5, αριστερά) ή την ίδια γωνία  $\beta_1 + \delta$  (Σχ. 4.5, δεξιά). Από τις σχέσεις αυτές γωνιών μπορεί πλέον να υπολογιστεί η γωνία  $\mu$  υπό την οποία το  $e_2'$  βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $MN$  (Σχ. 4.5, αριστερά):

$$\mu = \hat{M}e_2'K - \hat{N}e_2'K = \hat{K}BN - \hat{K}AM = \beta_1 - \alpha_1 \quad (4.16)$$

ή, στην περίπτωση όπου το  $e_2'$  βρίσκεται μεταξύ των σημείων  $M$  και  $N$  (Σχ. 4.5, δεξιά):

$$\mu = \hat{M}e_2'K + \hat{N}e_2'K = \hat{K}AM + \pi - \hat{K}BN = \pi - \beta_1 + \alpha_1 \quad (4.17)$$

Έτσι για κάθε ευθεία  $g$  δια του σημείου  $K$ , δηλαδή ανεξαρτήτως γωνίας  $\delta$ , η θέση του δεύτερου πόλου βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $MN$  υπό σταθερή γωνία  $\beta_1 - \alpha_1$  (ή την παραπληρωματική της). Ο δεύτερος πόλος ανήκει, συνεπώς, σε κύκλο  $c_K$  που διέρχεται από τα σημεία  $M$ ,  $N$  και τον πόλο  $e_1$ , δεδομένου ότι ο τελευταίος επίσης βαίνει στο  $MN$  υπό γωνία  $\mu$  (Σχ. 4.5). Ο  $c_K$  θα ονομαστεί εδώ *επιπολικός κύκλος* του στερεοζεύγους και συνιστά τον γεωμετρικό τόπο των δυνατών θέσεων στις οποίες μπορεί να τοποθετηθεί ο πόλος της δεύτερης εικόνας προκειμένου οι ομόλογες επιπολικές ευθείες να τέμνονται επί ευθείας  $g$  διερχόμενης από σημείο  $K$ . Σε κάθε θέση του δεύτερου πόλου επί του επιπολικού κύκλου αντιστοιχεί βέβαια μια συγκεκριμένη στροφή της δέσμης περί τον πόλο ώστε να επιτευχθεί

η προοπτική θέση των δεσμών (για την σχέση της θέσης του δεύτερου πόλου με την αντίστοιχη γωνία στροφής βλ. ειδικότερα ενότητα 4.5).

#### 4.4.2 Ειδικές περιπτώσεις

Στο σημείο αυτό εξετάζονται, σε σχέση με τον επιπολικό κύκλο, τρεις ειδικές περιπτώσεις εικόνων: οι δύο δέσμες των επιπολικών ευθειών είναι ίδιες (οι γωνίες  $\alpha_1, \alpha_2$  είναι ίσες), οι επιπολικές ευθείες της πρώτης εικόνας είναι παράλληλες (ο πόλος  $\mathbf{e}_1$  είναι σημείο του απείρου) και, τέλος, οι επιπολικές ευθείες είναι παράλληλες και στις δύο εικόνες.

Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε τρεις δυνατές γεωμετρίες λήψης. Είτε οι πόλοι ισαπέχουν από την ευθεία τομής των επιπέδων των εικόνων είτε οι δύο εικόνες είναι παράλληλες αλλά μη συνεπίπεδες είτε, τέλος, τα επίπεδά τους συμπίπτουν αλλά οι εικόνες έχουν διαφορετική σταθερά μηχανής. Και στις τρεις περιπτώσεις οι δέσμες, εφόσον είναι ίδιες και συνεπώς μπορούν να έρθουν σε σύμπτωση στο επίπεδο, τέμνονται επί οποιασδήποτε ευθείας  $\mathbf{g}$ . Έτσι, ο επιπολικός κύκλος εκφυλίζεται στον πόλο  $\mathbf{e}_1$ .

Η δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί σε γεωμετρία λήψης όπου η πρώτη εικόνα είναι παράλληλη στην βάση του στερεοζεύγους. Στην προηγούμενη απόδειξη οι ευθείες  $I_1, I_2$  και  $I_3$  είναι, τότε, παράλληλες. Οι γωνίες  $\mathbf{KAM}$  και  $\mathbf{KBN}$  είναι ίσες με την γωνία  $\delta$  (ως εντός εναλλάξ), κατά συνέπεια η γωνία  $\mu$  υπό την οποία το  $\mathbf{e}_2'$  βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{MN}$  είναι μηδενική ή ίση με  $\pi$  (Εξ. 4.16 και 4.17). Έτσι, ο επιπολικός κύκλος εκφυλίζεται στην ευθεία  $\mathbf{MN}$ .

Στην τρίτη περίπτωση η βάση είναι παράλληλη και στα δύο (στραμμένα περί την βάση, άρα μη παράλληλα) επίπεδα των εικόνων, επομένως παράλληλες στην βάση είναι τόσο η ευθεία τομής των επιπέδων των εικόνων όσο και οι επιπολικές ευθείες. Οι δύο πόλοι ορίζονται εδώ μονοσήμαντα (στα σημεία φυγής της διεύθυνσης των επιπολικών ευθειών), ενώ δυνατή δια σημείου  $\mathbf{K}$  είναι μόνο μια ευθεία  $\mathbf{g}$  (παράλληλη στις επιπολικές ευθείες).

#### 4.4.3 Κατασκευή επιπολικών ευθειών μέσω του επιπολικού κύκλου

Στην απόδειξη της ενότητας 4.4.1 η επιλογή των επιπολικών ευθειών  $I_2$  και  $I_3$  είναι ελεύθερη. Διαφορετικές επιπολικές ευθείες ορίζουν διαφορετικά σημεία  $\mathbf{M}$  και  $\mathbf{N}$ , του ίδιου όμως επιπολικού κύκλου. Έτσι, όλα τα σημεία του επιπολικού κύκλου ικανοποιούν την ιδιότητα των  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  να βαίνουν στο ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{e}_1\mathbf{K}$  υπό την γωνία που σχηματίζει η επιπολική τους ευθεία με εκείνη του σημείου  $\mathbf{K}$ . Η ιδιότητα αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί για να δοθεί διαφορετική γεωμετρική ερμηνεία στους 7 βαθμούς ελευθερίας της 2D επιπολικής γεωμετρίας: τέσσερις παράμετροι απαιτούνται για να οριστούν οι δύο πόλοι, δύο για τον επιπολικό κύκλο που αντιστοιχεί σε σημείο  $\mathbf{K}$  της πρώτης εικόνας υπό την δέσμευση πως αυτός διέρχεται από τον πόλο  $\mathbf{e}_1$  και μια (πχ. η κλίση της) για να οριστεί στην δεύτερη εικόνα η επιπολική ευθεία του σημείου  $\mathbf{K}$ . Βάσει αυτών των παραμέτρων μπορεί να κατασκευάσει κανείς γεωμετρικά την επιπολική ευθεία  $I'$  εικονοσημείου  $\mathbf{x}$  της πρώτης εικόνας, φέροντας δια του πόλου  $\mathbf{e}_2$  ευθεία που σχηματίζει με την επιπολική του  $\mathbf{K}$  γωνία ίση με εκείνη υπό την οποία το σημείο τομής της ευθείας  $\mathbf{e}_1\mathbf{x}$  με τον επιπολικό κύκλο βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{e}_1\mathbf{K}$ .

#### 4.4.4 Γεωμετρική κατασκευή του επιτολικού κύκλου

Ο επιτολικός κύκλος εξαρτάται μόνο από τον επιτολικό πίνακα του ζεύγους και την θέση του σημείου  $K$ , μπορεί δε να κατασκευαστεί γεωμετρικά μέσω των σημείων  $M$ ,  $N$  και  $e_1$ . Η θέση του  $e_1$  υπολογίζεται απευθείας από τον επιτολικό πίνακα. Για τα σημεία  $M$  και  $N$  δεν είναι αναγκαίο να ορίζεται συγκεκριμένη ευθεία  $g$  ούτε να υπολογίζονται τα κυκλικά τόξα  $c_a$  και  $c_b$ . Τα σημεία αυτά μπορούν να προσδιορίζονται ως τομές των  $I_2$  και  $I_3$  με ευθείες δια του  $K$  που σχηματίζουν με την  $I_1$  γωνίες  $\alpha_1 + \alpha_2$  και  $\beta_1 + \beta_2$ , αντίστοιχα. Κατ' αυτόν τον τρόπο ικανοποιούνται οι γεωμετρικές ιδιότητες των εν λόγω σημείων ανεξάρτητα από την γωνία  $\delta$  της ευθείας  $g$ , δηλαδή το  $M$  να βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $KA$  υπό γωνία  $\alpha_2$  και το  $N$  στο  $KB$  υπό  $\beta_2$ . Αναλυτικά, τα σημεία  $M$  και  $N$  προσδιορίζονται μέσω του αλγορίθμου που έχει περιγραφεί στην ενότητα 4.3.2.1 αν στην θέση της ευθείας  $I_1$  χρησιμοποιηθεί η ευθεία  $e_1K$ . Διαφορετικά σημεία  $K$  ορίζουν άλλον επιτολικό κύκλο, από τον οποίο ωστόσο προκύπτουν στην συνέχεια κοινές 3D γεωμετρίες λήψης.

Η διαδικασία κατασκευής του επιτολικού κύκλου μπορεί, επίσης, να αντιστραφεί. Αντί να επιλεγεί τυχαία το σημείο  $K$ , μπορεί να οριστεί κύκλος  $c_K$  διερχόμενος από τον πόλο  $e_1$  και έπειτα να προσδιοριστεί το σημείο  $K$  που του αντιστοιχεί. Γεωμετρικά αυτό επιτυγχάνεται με επιλογή δύο σημείων  $e_2'$  και  $e_2''$  του επιτολικού κύκλου και εύρεση των αντίστοιχων ευθειών τομής  $g'$  και  $g''$  των επιτολικών δεσμών, βάσει της μεθόδου που περιγράφηκε στην ενότητα 4.3.1. Αναλυτικά, οι ευθείες  $g'$  και  $g''$  υπολογίζονται μέσω του αλγορίθμου της ενότητας 4.3.1.1. Το  $K$  προκύπτει ως σημείο τομής των  $g'$  και  $g''$ .

#### 4.4.5 Εξίσωση υπολογισμού του επιτολικού κύκλου

Η περιγραφείσα διαδικασία κατασκευής του επιτολικού κύκλου  $c_K$  για δεδομένο σημείο  $K$ , ή αντίστροφα του σημείου  $K$  για δεδομένο επιτολικό κύκλο  $c_K$ , από τον επιτολικό πίνακα επιτρέπει να διατυπωθούν οι ακόλουθες αναλυτικές σχέσεις. Έστω στερεοζεύγος εικόνων άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού για το οποίο έχει υπολογιστεί ο επιτολικός πίνακας  $F$ , και απ' αυτόν έχουν κατόπιν προσδιοριστεί οι θέσεις των δύο πόλων  $e_1 = [x_1 \ y_1 \ 1]^T$  και  $e_2 = [x_2 \ y_2 \ 1]^T$ . Το κέντρο  $C = [x_c \ y_c \ 1]^T$  του επιτολικού κύκλου που αντιστοιχεί σε σημείο  $K = [x_K \ y_K \ 1]^T$  υπολογίζεται άμεσα από την σχέση:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 - x_K}{2} + \frac{(x_1 + x_K)(f_{11}^2 + f_{21}^2) + (y_1 + y_K)(f_{21}f_{22} + f_{11}f_{12})}{2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})} \\ y_c &= \frac{y_1 - y_K}{2} + \frac{(y_1 + y_K)(f_{12}^2 + f_{22}^2) + (x_1 + x_K)(f_{21}f_{22} + f_{11}f_{12})}{2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})} \end{aligned} \quad (4.18)$$

η δε ακτίνα του  $R_c$  προκύπτει από την απόσταση του κέντρου του  $C$  από τον πόλο  $e_1$ . Αντίστροφα, το σημείο  $K$  υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x_K &= \frac{2(f_{21}f_{22} + f_{11}f_{12})(y_1 - y_c) - (f_{12}^2 + f_{22}^2)(x_1 - 2x_c) + (f_{11}^2 + f_{21}^2)x_1 - 2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})x_c}{(f_{11} - f_{22})^2 + (f_{12} + f_{21})^2} \\ y_K &= \frac{2(f_{21}f_{22} + f_{11}f_{12})(x_1 - x_c) - (f_{11}^2 + f_{21}^2)(y_1 - 2y_c) + (f_{12}^2 + f_{22}^2)y_1 - 2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})y_c}{(f_{11} - f_{22})^2 + (f_{12} + f_{21})^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Εάν  $\mathbf{A}$  είναι ο άνω αριστερά  $2 \times 2$  υποπίνακας του επιπολικού πίνακα  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

και:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (4.21)$$

οι Εξ. (4.18) και (4.19) μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + (\mathbf{B} - \mathbf{I}) \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \right] \quad (4.22)$$

και:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = 2(\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} - (\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

όπου  $\mathbf{I}$  μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων  $2 \times 2$ .

Με επιλογή του σημείου  $\mathbf{K}$  στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων  $[0 \ 0 \ 1]^T$ , η Εξ. (4.18) απλοποιείται περαιτέρω:

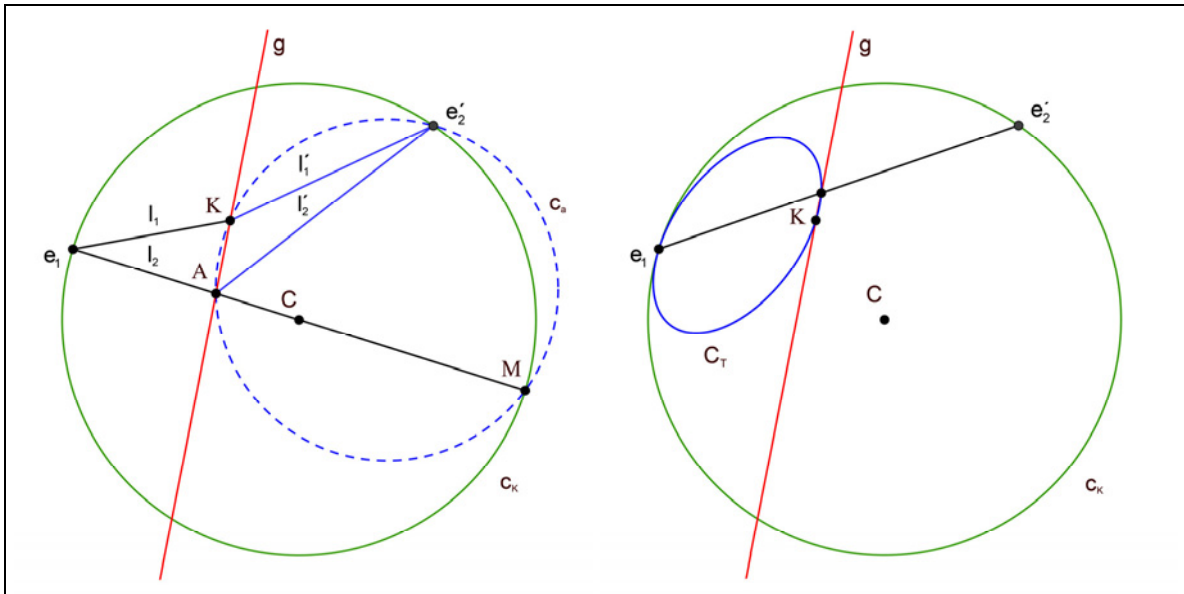
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{f_{13}(f_{11} + f_{22}) + f_{23}(f_{21} - f_{12})}{2(f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22})} \\ y_c &= \frac{f_{13}(f_{12} - f_{21}) + f_{23}(f_{11} + f_{22})}{2(f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22})} \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.5 Ευθεία προοπτικότητας και θέση στον επιπολικό κύκλο

Τα σημεία του επιπολικού κύκλου και οι ευθείες δια του  $\mathbf{K}$  βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Σε δεδομένη ευθεία  $\mathbf{g}$  αντιστοιχεί μοναδικό σημείο  $\mathbf{e}_2'$  του επιπολικού κύκλου, στο οποίο τοποθετούμενη η δεύτερη δέσμη των επιπολικών ευθειών και στρεφόμενη κατά κατάλληλη γωνία  $\kappa$  θα τέμνει την πρώτη δέσμη επί της  $\mathbf{g}$ . Το σημείο αυτό αλλά και η γωνία  $\kappa$  μπορούν να προσδιορίζονται με τον αλγόριθμο της ενότητας 4.3.2.1. Αντίστροφα, σε κάθε σημείο  $\mathbf{e}_2'$  αντιστοιχεί μοναδική ευθεία  $\mathbf{g}$ , η οποία είναι δυνατόν να υπολογίζεται μέσω του αλγορίθμου της ενότητας 4.3.1.1.

Χάρη στην ιδιότητα των σημείων του επιπολικού κύκλου να βαίνουν στο ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{e}_1\mathbf{K}$  υπό την γωνία που σχηματίζει η επιπολική τους ευθεία με εκείνη του  $\mathbf{K}$  (βλ. ενότητα 4.4.3), η θέση της δεύτερης δέσμης που αντιστοιχεί σε δεδομένη ευθεία  $\mathbf{g}$  είναι επίσης δυνατόν να προσδιορίζεται με την εξής γεωμετρική κατασκευή. Η ευθεία  $\mathbf{g}$  τέμνει την διάμετρο  $\mathbf{e}_1\mathbf{C}$  του επιπολικού κύκλου (ή γενικότερα οποιαδήποτε χορδή του) που διέρχεται από τον πόλο  $\mathbf{e}_1$  στο σημείο  $\mathbf{A}$  (Σχ.4.6, αριστερά). Η δεύτερη δέσμη οφείλει να βαίνει στο ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{AK}$  υπό την γωνία που σχηματίζουν οι ομόλογες επιπολικές ευθείες  $\mathbf{l}_2'$  και  $\mathbf{l}_1'$  των  $\mathbf{e}_1\mathbf{C}$  και  $\mathbf{e}_1\mathbf{K}$ , αντίστοιχα, η οποία ισούται με την γωνία  $\mathbf{AMK}$ , όπου  $\mathbf{M}$  η τομή της  $\mathbf{e}_1\mathbf{C}$  με τον επιπολικό κύκλο. Οι θέσεις που ικανοποιούν αυτή την απαίτηση είναι τα σημεία

του κυκλικού τόξου  $c_a$  που ορίζεται από τα σημεία  $A$ ,  $K$  και  $M$ . Έτσι, η θέση  $e_2'$  προκύπτει ως η τομή του  $c_a$  με τον επιπολικό κύκλο  $c_K$ . Με ανάλογο τρόπο επιλύεται και το αντίστροφο πρόβλημα, η κατασκευή δηλαδή της ευθείας  $g$  που αντιστοιχεί σε σημείο  $e_2'$  του επιπολικού κύκλου. Το τόξο  $c_a$  προσδιορίζεται από τα σημεία  $e_2'$ ,  $K$  και  $M$ , ενώ το σημείο  $A$  από την τομή του  $c_a$  με την ευθεία  $e_1C$ . Τα σημεία  $A$  και  $K$  ορίζουν, τέλος, την ευθεία  $g$ .



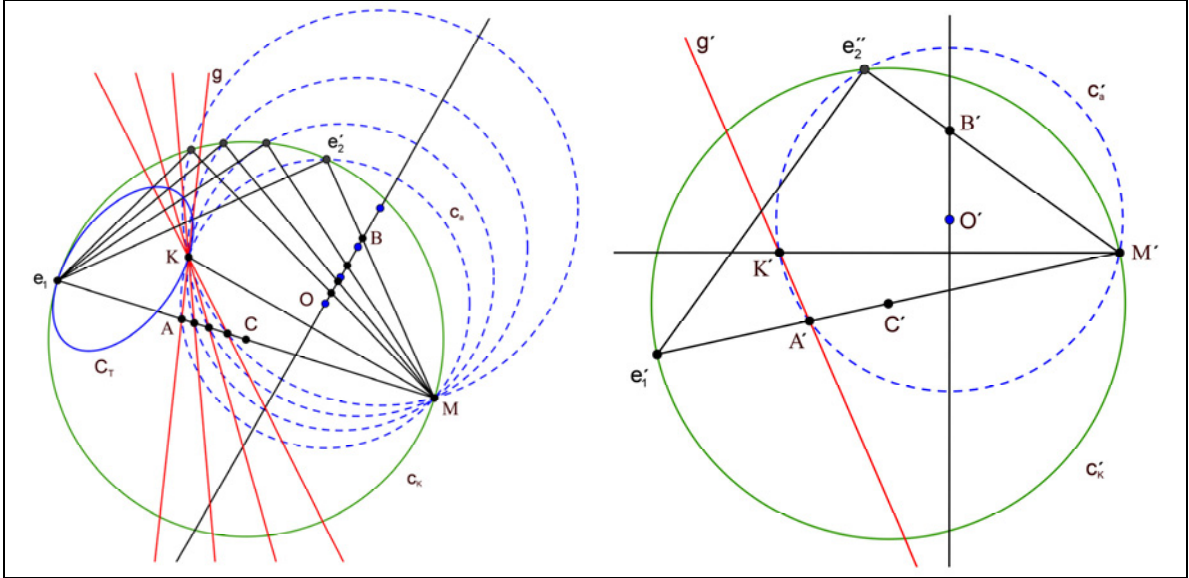
Σχήμα 4.6. Ευθεία προοπτικότητας και θέση στον επιπολικό κύκλο.

#### 4.5.1 Προβολική αντιστοιχία στον επιπολικό κύκλο

Βάσει των προηγηθέντων, κύκλοι  $c_a$  διερχόμενοι από τα σημεία  $K$  και  $M$  ορίζουν ζεύγη σημείων  $e_2'$  και ευθειών  $g$  που βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Συνδεδεμένα με τον πόλο  $e_1$ , τα σημεία  $e_2'$  ορίζουν επίπεδη δέσμη ευθειών με κέντρο το  $e_1$ . Θα αποδειχτεί ότι οι δέσμες ευθειών  $e_1e_2'$  (δια του  $e_1$ ) και  $g$  (δια του  $K$ ) συνδέονται μέσω προβολικού μετασχηματισμού και επομένως, δυνάμει του θεωρήματος του Steiner (βλ. ενότητα 2.5.1.1), τα σημεία τομής τους κείνται επί κωνικής  $C_T$  διερχόμενης από τα σημεία  $e_1$  και  $K$  (Σχ. 4.6, δεξιά). Το γεγονός αυτό επιτρέπει τόσο την γεωμετρική κατασκευή των ζευγών  $(e_2', g)$  μέσω της κωνικής όσο και τον αναλυτικό τους υπολογισμό μέσω ομογραφίας του  $P^1$ . Επιτρέπει, επιπλέον, την εύρεση μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας (βλ. ενότητα 2.5.4) που συνδέει γραμμικά τα σημεία του επιπολικού κύκλου με τις αντίστοιχες ευθείες  $g$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner, οι δέσμες ευθειών  $e_1e_2'$  και  $Me_2'$  (Σχ. 4.7, αριστερά) είναι προβολικές γιατί τόσο τα κέντρα τους ( $e_1$  και  $M$ ) όσο και τα σημεία τομής τους ( $e_2'$ ) ανήκουν στον επιπολικό κύκλο, δηλαδή ανήκουν σε κωνική τομή. Δεδομένου πως δύο γεωμετρικοί σχηματισμοί ευρισκόμενοι σε προβολική αντιστοιχία προς τρίτον είναι και μεταξύ τους προβολικοί, προκειμένου να αποδειχθεί η προβολικότητα ανάμεσα στις δέσμες των ευθειών  $e_1e_2'$  και  $g$  αρκεί να αποδειχθεί εκείνη μεταξύ των  $Me_2'$  και  $g$ . Η αντιστοιχία των σημείων  $e_2'$  του επιπολικού κύκλου, και κατ' επέκταση των ευθειών  $Me_2'$ , με τις ευθείες  $g$  δια του  $K$  ορίζεται μέσω των κύκλων  $c_a$ , οι οποίοι διέρχονται από τα δύο σταθερά σημεία  $K$  και  $M$ . Συνιστούν δηλαδή ομοαξονική δέσμη κύκλων με κέντρα  $O$  επί της μεσοκαθέτου του

ευθύγραμμου τμήματος  $KM$ . Στην συνέχεια θα δειχθεί ότι οι διπλοί λόγοι των σημείων τομής  $B$  των ευθειών  $Me_2'$  με την μεσοκάθετο του  $KM$  και των σημείων τομής  $A$  των ευθειών  $g$  με την  $e_1M$  ισούνται με τον διπλό λόγο των κέντρων  $O$  των κύκλων  $c_a$ , άρα είναι μεταξύ τους ίσοι. Η ισότητα αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη σχετικά με την προβολική αντιστοιχία των ευθειών  $e_1e_2'$  και  $g$ .



Σχήμα 4.7. Προβολική αντιστοιχισή ευθειών  $g$  και  $e_1e_2'$  στον επιπολικό κύκλο (αριστερά). Επιπολικός κύκλος έπειτα από στροφή, μετάθεση και αλλαγή κλίμακας στο επίπεδο (δεξιά).

Η ισότητα του διπλού λόγου των σημείων  $A$  και  $B$  που ορίζονται από την ομοαξονική δέσμη των κύκλων  $c_a$  με εκείνον των κέντρων τους  $O$  αποδεικνύεται αναλυτικά, αφού πρώτα μεταβληθεί το σύστημα συντεταγμένων με μετασχηματισμό ομοιότητας  $H_S$  (μεταβολή κλίμακας, μετάθεση, στροφή)<sup>6</sup>, ο οποίος μετασχηματίζει τα σημεία  $K, M$  στα  $K' = [-1 \ 0 \ 1]^T$  και  $M' = [1 \ 0 \ 1]^T$ , αντίστοιχα (Σχ. 4.7, δεξιά). Ο  $H_S$  δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του επιπολικού κύκλου, ενώ τα γεωμετρικά στοιχεία όσο και οι σχέσεις που υπολογίζονται στο νέο σύστημα μπορούν να αναφερθούν κατόπιν στο αρχικό με τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $H_S^{-1}$ .

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων (Σχ. 4.7, δεξιά) ο άξονας  $x$  ταυτίζεται με την ευθεία  $K'M'$ , ο δε  $y$  με την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος  $K'M'$ . Η νέα θέση του κέντρου του επιπολικού κύκλου βρίσκεται από την σχέση  $C' = H_S C = [x'_c \ y'_c \ 1]^T$ . Από τα σημεία  $C'$  και  $M'$  προσδιορίζεται επίσης ο πόλος της πρώτης εικόνας  $e_1' = [2x'_c - 1 \ 2y'_c \ 1]^T$ . Εάν  $d$  είναι η απόσταση του κέντρου  $O'$  του κύκλου  $c_a$  από το μέσον του τμήματος  $K'M'$ , τότε  $O' = [0 \ d \ 1]^T$  και  $R'_O = \sqrt{1 + d^2}$ . Η ευθεία  $C'M'$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$C'M' = C' \times M' \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-x'_c}{y'_c} & -1 \end{bmatrix}^T = [1 \ a \ -1]^T, \text{ με } a = \frac{1-x'_c}{y'_c} \quad (4.25)$$

και το σημείο  $A'$  προκύπτει από την τομή της  $C'M'$  με τον κύκλο  $c_a$ :

<sup>6</sup> Ο μετασχηματισμός  $H_S$  έχει την μορφή της Εξ. (2.49) (βλ. ενότητα 2.5.3.1). Οι παράμετροί του υπολογίζονται από τις συντεταγμένες των σημείων  $K = [x_K \ y_K \ 1]^T$  και  $M = [2x_c - x_1 \ 2y_c - y_1 \ 1]^T$ . Η θέση του  $M$  προκύπτει από το κέντρο  $C = [x_c \ y_c \ 1]^T$  του επιπολικού κύκλου και τον πόλο  $e_1 = [x_1 \ y_1 \ 1]^T$ .



$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \frac{-a^2 + 2da + 1}{a^2 + 1} & \frac{2(d-a)}{a^2 + 1} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.26)$$

Η απόσταση δύο σημείων  $\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2'$  που ορίζονται από κύκλους  $c_{a1}, c_{a2}$  της ομοαξονικής δέσμης είναι ίση με:

$$|\mathbf{A}_1' \mathbf{A}_2'| = 2 \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (4.27)$$

Η Εξ. (4.27) δείχνει ότι η απόσταση δύο σημείων  $\mathbf{A}_1'$  και  $\mathbf{A}_2'$  είναι ανάλογη της απόστασης των  $\mathbf{O}_1'$  και  $\mathbf{O}_2'$ , άρα προκύπτει άμεσα ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων  $\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2', \mathbf{A}_3', \mathbf{A}_4'$  είναι ίσος με εκείνον των αντίστοιχων κέντρων  $\mathbf{O}_1', \mathbf{O}_2', \mathbf{O}_3', \mathbf{O}_4'$  των κύκλων από τους οποίους ορίζονται.

Εξάλλου, το σημείο  $\mathbf{e}_2''$  υπολογίζεται αναλυτικά από την τομή του επιπολικού κύκλου με τον  $c_a$  και έχει συντεταγμένες:

$$\mathbf{e}_2'' = \begin{bmatrix} \frac{2x'_c (d^2 + x'_c - dy'_c)}{x'^2_c + (d - y'_c)^2} - 1 & \frac{2x'_c (d(x'_c - 1) + y'_c)}{x'^2_c + (d - y'_c)^2} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.28)$$

Η ευθεία  $\mathbf{e}_2''\mathbf{M}'$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{e}_2''\mathbf{M}' = \mathbf{e}_2'' \times \mathbf{M}' \sim \begin{bmatrix} x'_c & y'_c - d & -x'_c \end{bmatrix}^T \quad (4.29)$$

Το σημείο  $\mathbf{B}'$  προκύπτει, τέλος, από την τομή της  $\mathbf{e}_2''\mathbf{M}'$  με τον άξονα  $y$  ( $[1 \ 0 \ 0]^T$ ):

$$\mathbf{B}' = \mathbf{e}_2''\mathbf{M}' \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \sim \begin{bmatrix} 0 & \frac{x'_c}{y'_c - d} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.30)$$

Δύο κύκλοι της ομοαξονικής δέσμης ορίζουν σημεία  $\mathbf{B}_1', \mathbf{B}_2'$ , η απόσταση των οποίων είναι ίση με:

$$|\mathbf{B}_1' \mathbf{B}_2'| = \frac{|d_1 - d_2|}{|y_c - d_1| |y_c - d_2|} \quad (4.31)$$

Από την Εξ. (4.31), αν υπολογιστούν οι απαραίτητοι λόγοι, αποδεικνύεται ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων  $\mathbf{B}_1', \mathbf{B}_2', \mathbf{B}_3', \mathbf{B}_4'$  είναι ίσος με εκείνον των αντίστοιχων κέντρων των κύκλων  $\mathbf{O}_1', \mathbf{O}_2', \mathbf{O}_3', \mathbf{O}_4'$ , και συνεπώς ισούται με τον διπλό λόγο των αντίστοιχων σημείων  $\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2', \mathbf{A}_3', \mathbf{A}_4'$ . Άρα οι δέσμες των ευθειών  $\mathbf{e}_2''\mathbf{M}'$  και  $\mathbf{g}'$  βρίσκονται σε προβολική αντιστοιχία. Ο μετασχηματισμός ομοιότητας  $\mathbf{H}_s$ , που προηγήθηκε της απόδειξης, διατηρεί τον διπλό λόγο. Συνεπώς, το συμπέρασμα της προβολικότητας ισχύει και για τις αρχικές δέσμες των ευθειών  $\mathbf{e}_2'\mathbf{M}$  και  $\mathbf{g}$ , αλλά και για εκείνες των  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2'$  και  $\mathbf{g}$ .

Αφού υπολογιστεί η θέση του σημείου  $\mathbf{A}'$  (Εξ. 4.25) είναι πλέον δυνατόν να προσδιοριστεί η ευθεία  $\mathbf{g}'$ :

$$\mathbf{g}' = \mathbf{K}' \times \mathbf{A}' \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{dx'_c - d + y'_c}{x'_c - dy'_c - 1} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.32)$$

Έτσι λοιπόν, από τις Εξ. (4.28) και (4.32) μπορούν να υπολογιστούν άμεσα στο νέο σύστημα συντεταγμένων, συναρτήσει μιας μεταβλητής  $d \in [-\infty, \infty]$ , όλα τα ομόλογα ζεύγη δυ-

νατών θέσεων  $\mathbf{e}_2''$  της δεύτερης δέσμης στον επιπολικό κύκλο και ευθειών τομής των επιπέδων των εικόνων  $\mathbf{g}'$ . Από αυτά μπορούν να υπολογιστούν, με τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $\mathbf{H}_S^{-1}$ , τα ζεύγη  $(\mathbf{e}_2', \mathbf{g})$  στο αρχικό σύστημα.

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{H}_S^{-1} \mathbf{e}_2'' \text{ και } \mathbf{g} = \mathbf{H}_S^T \mathbf{g}' \quad (4.33)$$

#### 4.5.2 Εύρεση ομογραφίας του $P^1$ και μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας

Από την Εξ. (4.28) υπολογίζεται η ευθεία  $\mathbf{l}' = \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_2''$  που συνδέει τους δύο πόλους στον επιπολικό κύκλο:

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_2'' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2'' \sim [d - y'_c \quad x'_c \quad -2dx'_c + d - y'_c]^T \quad (4.34)$$

Αποδείχθηκε προηγουμένως πως η  $\mathbf{l}'$  συνδέεται αμφιμονοσήμαντα με την ευθεία  $\mathbf{g}'$  μέσω προβολικού μετασχηματισμού. Κατά συνέπεια, αν  $\mathbf{s}_{l'}$  και  $\mathbf{s}_{g'}$  οι κλίσεις των δύο ευθειών, υπάρχουν συντελεστές  $h_1, h_2, h_3, h_4$  τέτοιοι ώστε (βλ. ενότητα 3.2.3.1):

$$\mathbf{s}_{g'} = \frac{h_1 \mathbf{s}_{l'} + h_2}{h_3 \mathbf{s}_{l'} + h_4} \quad (4.35)$$

Πράγματι, οι κλίσεις των ευθειών  $\mathbf{l}'$  και  $\mathbf{g}'$  είναι ίσες με:

$$\mathbf{s}_{l'} = \frac{y'_c - d}{x'_c} \text{ και } \mathbf{s}_{g'} = \frac{1 - x'_c + dy'_c}{y'_c + dx'_c - d} \quad (4.36)$$

και η Εξ. (4.35) επαληθεύεται, εάν:

$$\begin{aligned} h_1 &= x'_c y'_c \\ h_2 &= x'_c - 1 - y'^2_c \\ h_3 &= x'_c (x'_c - 1) \\ h_4 &= -x'_c y'_c \end{aligned} \quad (4.37)$$

Βάσει της προσέγγισης των Luong et al. (1993) και Luong & Faugeras (1996), από τα τέσσερα στοιχεία  $h_i$  της ομογραφίας του  $P^1$  και τα κέντρα  $\mathbf{K}'$ ,  $\mathbf{e}_1'$  των δύο δεσμών μπορεί μέσω της Εξ. (3.36) να υπολογιστεί ετερογραφία  $\mathbf{T}'$  που συνδέει άμεσα και γραμμικά τα σημεία  $\mathbf{e}_2''$  του επιπολικού κύκλου με τις αντίστοιχες ευθείες  $\mathbf{g}'$  (βλ. ενότητα 3.2.3.1):

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} x'_c - 1 - y'^2_c & x'_c y'_c & 3x'_c - 2x'^2_c - y'^2_c - 1 \\ x'_c y'_c & x'_c (1 - x'_c) & -x'_c y'_c \\ x'_c - 1 - y'^2_c & x'_c y'_c & 3x'_c - 2x'^2_c - y'^2_c - 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{T}'$ , που αναφέρεται στο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων, μπορεί να αναχθεί μέσω του μετασχηματισμού  $\mathbf{H}_S$  στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}_S^T \mathbf{T}' \mathbf{H}_S \quad (4.39)$$

Εκεί ισχύει πως:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T} \mathbf{e}_2' \quad (4.40)$$

Επίσης, με τρόπο ανάλογο των Εξ. (3.34) ορίζεται μέσω του  $\mathbf{T}$  η σχέση που συνδέει τις ομόλογες ευθείες  $\mathbf{l}' = \mathbf{e}_1' \mathbf{e}_2'$  και  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}[\mathbf{e}_1]_{\times} \mathbf{l} \text{ και } \mathbf{l} = \mathbf{T}^T[\mathbf{K}]_{\times} \mathbf{g} \quad (4.41)$$

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται κατά το θεώρημα του Steiner επί κωνικής τομής  $\mathbf{C}_T$  που διέρχεται από τα σημεία  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{K}$  (Σχ. 4.6, δεξιά). Κατ' αναλογία με την προσέγγιση των Thompson (1968) και Maybank (1993), οι οποίοι προσδιορίζουν από τον επιπολικό πίνακα την κωνική επί της οποίας τέμνονται οι ομόλογες επιπολικές ευθείες (βλ. ενότητα 3.2.3.2), η ομογενής αναπαράσταση της  $\mathbf{C}_T$  περιγράφεται από το συμμετρικό μέρος του πίνακα  $\mathbf{T}$  της ετερογραφίας:

$$\mathbf{C}_T = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \quad (4.42)$$

Έτσι, με επιλογή ευθείας  $\mathbf{g}$  δια του  $\mathbf{K}$  ως άξονα προοπτικότητας των επιπολικών δεσμών των εικόνων, η θέση  $\mathbf{e}_2'$  όπου οφείλει να έρθει ο πόλος της δεύτερης δέσμης κατασκευάζεται γεωμετρικά ως η τομή με τον επιπολικό κύκλο της ευθείας  $\mathbf{l}$  που προκύπτει εάν συνδεθεί με τον πόλο  $\mathbf{e}_1$  η τομή της  $\mathbf{g}$  με την κωνική  $\mathbf{C}_T$ . Αντίστροφα, συνδέοντας το  $\mathbf{K}$  με την τομή των  $\mathbf{l}$  και  $\mathbf{C}_T$  κατασκευάζει κανείς την ευθεία  $\mathbf{g}$  που αντιστοιχεί σε δεδομένη θέση  $\mathbf{e}_2'$ .

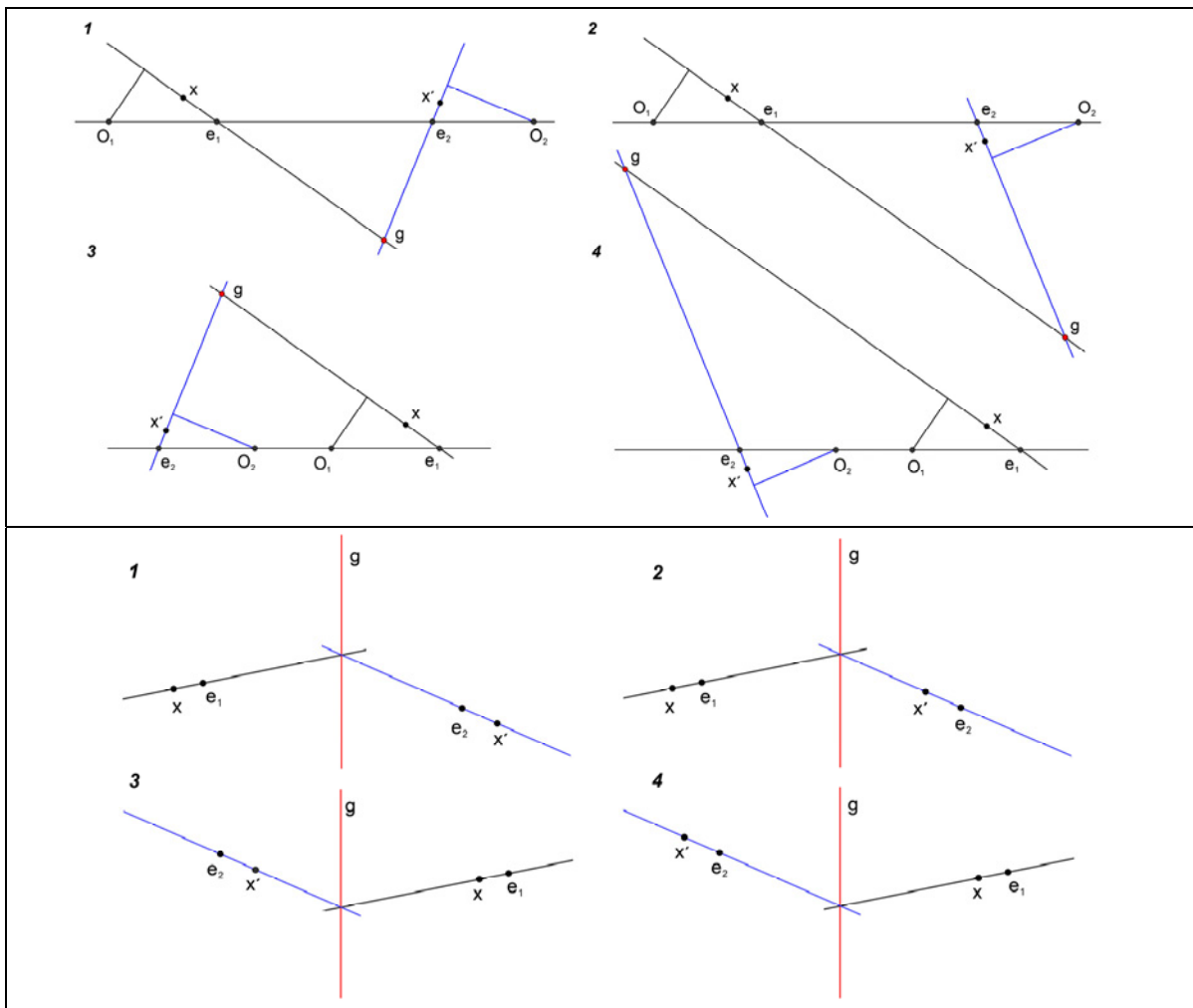
Αξίζει να σημειωθεί πως, εάν το σημείο  $\mathbf{K}$  επιλεγεί στην αφετηρία  $[0 \ 0 \ 1]^T$  του αρχικού συστήματος συντεταγμένων, ο πίνακας  $\mathbf{T}$  που αναπαριστά την μη αντιστρέψιμη ετερογραφία μεταξύ των σημείων  $\mathbf{e}_2'$  του επιπολικού κύκλου και των ευθειών  $\mathbf{g}$  απλοποιείται και μπορεί να υπολογιστεί άμεσα από τα στοιχεία του επιπολικού πίνακα από την σχέση:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} f_{11}^2 - f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21} + f_{21}^2 & f_{11}f_{12} + f_{21}f_{22} & f_{11}f_{13} - f_{22}f_{13} + f_{21}f_{23} + f_{23}f_{12} \\ f_{11}f_{12} + f_{21}f_{22} & f_{12}^2 - f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21} + f_{22}^2 & f_{22}f_{23} - f_{11}f_{23} + f_{21}f_{13} + f_{13}f_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

### 4.5.3 Πολλαπλότητα λύσεων

Για να αποκατασταθεί η προοπτικότητα των επιπολικών ευθειών, μετά από την μετάθεση της δεύτερης δέσμης στην θέση  $\mathbf{e}_2'$  απαιτείται στροφή  $\kappa$  ώστε η επιπολική ευθεία του σημείου  $\mathbf{K}$  να διέρχεται από αυτό. Ωστόσο, δεδομένου ότι στροφή κατά γωνία  $\pi$  της δεύτερης όσο και της πρώτης δέσμης περί τον αντίστοιχο πόλο δεν επηρεάζει την τομή των ομόλογων επιπολικών ευθειών επί της  $\mathbf{g}$ , σε κάθε σημείο του επιπολικού κύκλου αντιστοιχούν στην πραγματικότητα τέσσερις διαφορετικές γεωμετρικές λήψης. Οι επιπολικές ευθείες παραμένουν στο σύνολο τους σταθερές χάρη στην συμμετρία των στροφών αυτών, όμως τα μεμονωμένα ομόλογα σημεία μετατίθενται επί αυτών σε θέσεις αντιδιαμετρικές ως προς τους δύο πόλους. Όταν στην συνέχεια (βλ. ενότητα 4.6) εξετάζονται οι 3D γεωμετρικές λήψης που προκύπτουν από την περιστροφή των επιπέδων των εικόνων περί την ευθεία  $\mathbf{g}$ , οι τέσσερις δυνατές λύσεις πρέπει να λαμβάνονται υπόψη.

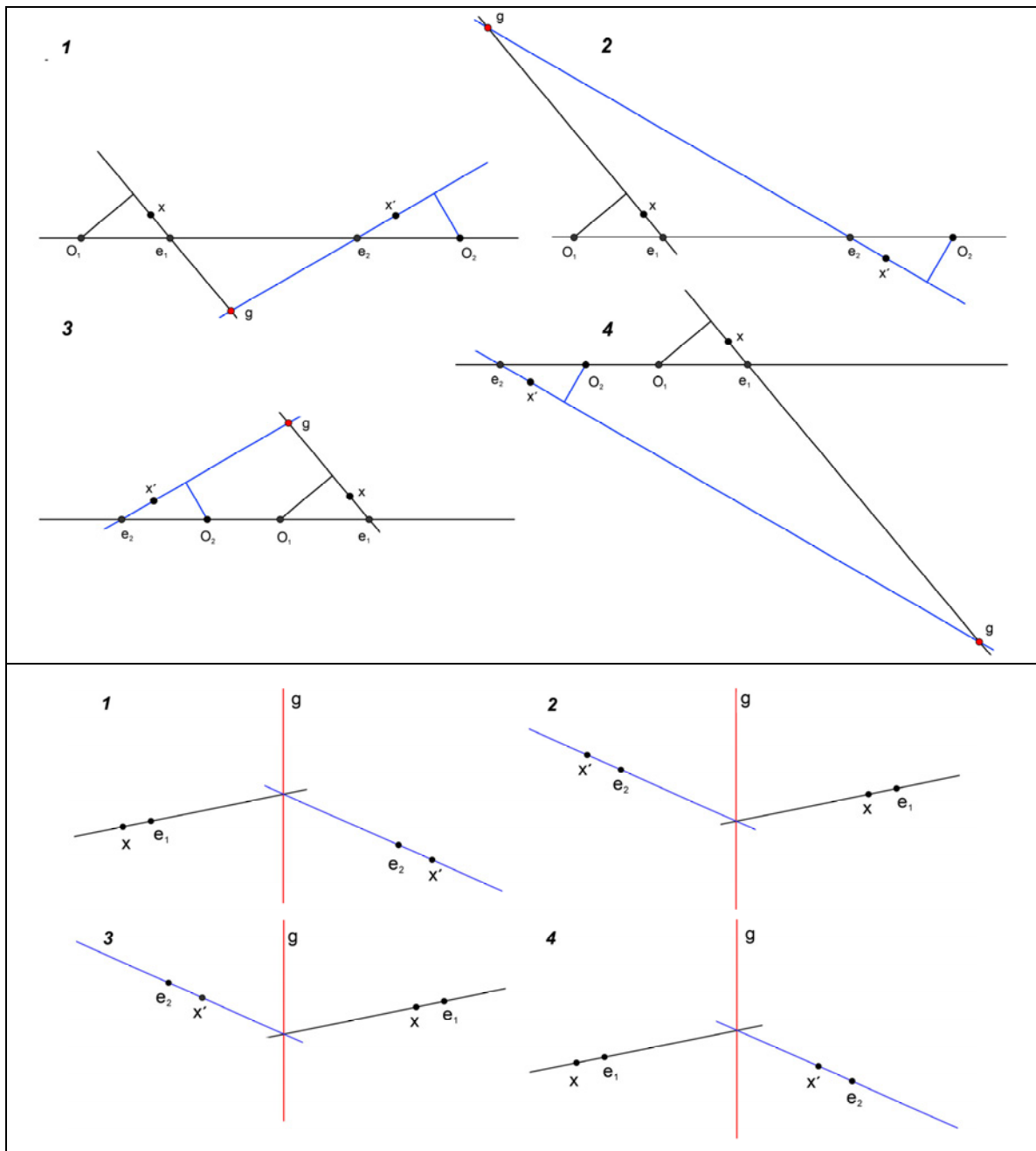
Η επίδραση όμως που έχει η στροφή, στο επίπεδο, των δεσμών κατά  $\pi$  περί τους πόλους ισοδυναμεί στον χώρο των τριών διαστάσεων με την επίδραση που έχουν τόσο η στροφή της δεύτερης εικόνας κατά  $\pi$  περί την βάση του ζεύγους όσο και η αντιμετάθεση των δύο εικόνων (Σχ. 4.8 και 4.9). Ισοδυναμεί, δηλαδή, με τις μεταβολές που δεν επηρεάζουν την συνεπιπεδότητα των οπτικών ακτίνων, ακόμα και σε περίπτωση εικόνων από βαθμονομημένες μηχανές, και αντιπροσωπεύουν διαφορετικές λύσεις του σχετικού προσανατολισμού (βλ. ενότητα 3.1.3.3).



Σχήμα 4.8. Στροφή της δεύτερης εικόνας κατά  $\pi$  περί την βάση και αντιμετάθεση των εικόνων (επάνω) αντιστοιχούν στα επίπεδα των εικόνων σε στροφή των επιπολικών ευθειών κατά  $\pi$  περί τους πόλους (κάτω).

Όπως προκύπτει και από τα δύο παραδείγματα για στερεοζεύγη διαφορετικού σχετικού προσανατολισμού που παρουσιάζονται στα Σχ. 4.8 και 4.9, η αντιστοιχία της κάθε μεταβολής στον 3D χώρο και στα επίπεδα των εικόνων εξαρτάται από τον εκάστοτε σχετικό προσανατολισμό του ζεύγους, ωστόσο οι τέσσερις διαφορετικές γεωμετρίες που προκύπτουν είναι στο σύνολό τους οι ίδιες.

Κατά συνέπεια, η πολλαπλότητα λύσεων στο επίπεδο των εικόνων η οποία προκύπτει από στροφή κατά  $\pi$  των επιπολικών δεσμών περί τους πόλους μπορεί, προς το παρόν, να αγνοηθεί και αντί αυτής σε κάθε 3D γεωμετρία λήψης που προκύπτει στην συνέχεια να ελέγχεται η δυνατότητα αντιμετάθεσης των εικόνων και στροφής κατά  $\pi$  της δεύτερης εικόνας περί την βάση του ζεύγους. Όπως έχει αναφερθεί (βλ. ενότητα 3.1.3.3), από τις τέσσερις πιθανές γεωμετρίες αποδεκτή είναι εκείνη που ανακατασκευάζει τα απεικονιζόμενα σημεία μπροστά από τα δύο προβολικά κέντρα.



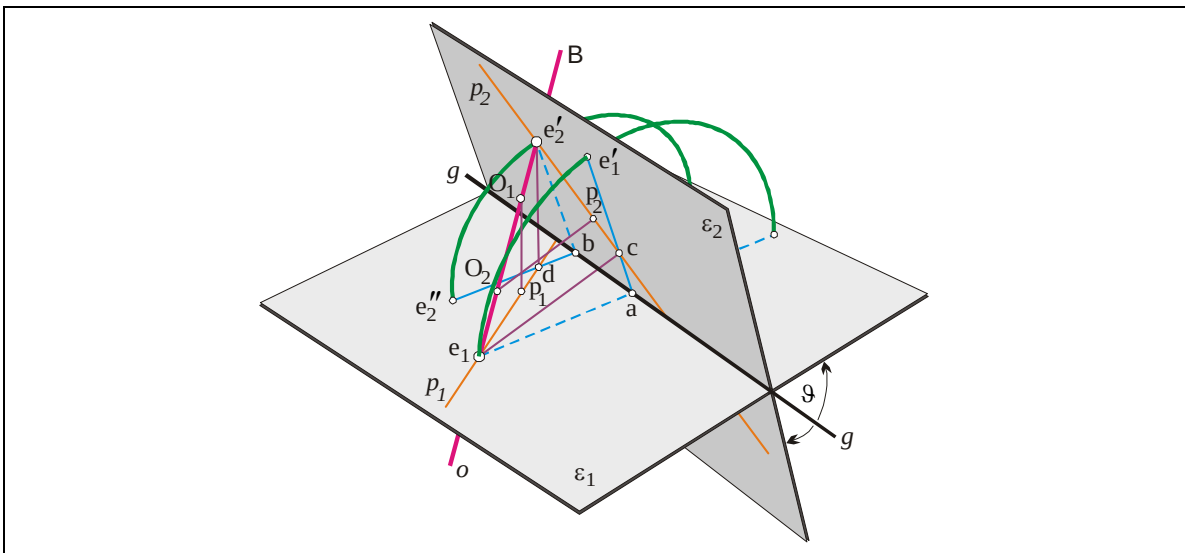
Σχήμα 4.9. Αντιστοιχία πολλαπλότητας λύσεων στον 3D χώρο (επάνω) και στο επίπεδο των εικόνων (κάτω) σε εικόνες σχετικού προσανατολισμού διαφορετικού από εκείνες του Σχ. 4.8.

## 4.6 Στροφή των εικόνων περί τον άξονα προοπτικότητας

### 4.6.1 Σχετική θέση των επιπέδων των εικόνων

Μέχρι στιγμής η γεωμετρία στερεοζεύγους του οποίου έχει υπολογιστεί ο επιπολικός πίνακας αντιμετωπίστηκε στο επίπεδο  $\varepsilon_1$  της πρώτης εικόνας. Εκεί, μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα η διεύθυνση της ευθείας τομής  $g$  των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  και έπειτα, με κατάλληλη στροφή και μετάθεση της δεύτερης εικόνας, να επιτευχθεί η τομή των ομόλογων επιπολικών ευθειών επί αυτής. Η όποια στροφή των επιπέδων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  κατά  $\theta$  περί την ευθεία  $g$  δεν επηρεάζει

πλέον την προοπτικότητα των επιπολικών ευθειών αφού αυτές διατηρούνται τεμνόμενες επί της  $\mathbf{g}$ . Υπό την επίδραση της  $\vartheta$  οι γωνίες των επιπολικών επιπέδων μεταβάλλονται μαζί με τις οπτικές ακτίνες, οι οποίες όμως εξακολουθούν να ορίζουν επιπολικά επίπεδα. Παράλληλα, οι πόλοι των εικόνων κινούνται, διαγράφοντας κύκλους κάθετους στην ευθεία  $\mathbf{g}$  περί την οποία πραγματοποιείται η στροφή (Σχ. 4.10). Κατά συνέπεια, το σύνολο των δυνατών θέσεων του δεύτερου πόλου στον 3D χώρο προκύπτει εάν σε κάθε διαφορετική διεύθυνση της  $\mathbf{g}$  λάβει κανείς υπόψη όλες τις γωνίες των επιπέδων των εικόνων ( $0 < \vartheta < 2\pi$ ,  $\vartheta \neq \pi$ ), πράγμα που ισοδυναμεί με περιστροφή όλων των σημείων του επιπολικού κύκλου περί την ευθεία  $\mathbf{g}$  που τους αντιστοιχεί και κάθετα σε αυτήν. Σε κάθε περίπτωση η ευθεία  $o$  της βάσης του στερεοζεύγους ορίζεται από τους πόλους  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ <sup>7</sup>, και για δεδομένη  $\mathbf{g}$ , αν το επίπεδο  $\varepsilon_1$  θεωρηθεί σταθερό, κινείται στην επιφάνεια πλάγιου κώνου με κορυφή το  $\mathbf{e}_1$  και βάση τον κύκλο τον οποίο διαγράφει το  $\mathbf{e}_2'$ . Όλα τα σημεία της βάσης είναι δυνατά προβολικά κέντρα των εικόνων. Η επιλογή δύο σημείων της ορίζει την θέση των σημείων λήψης στον 3D χώρο και, με ορθή προβολή τους στα επίπεδα  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  των εικόνων, τον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων.



Σχήμα 4.10. Στροφή των εικόνων περί την ευθεία τομής  $\mathbf{g}$  των επιπέδων τους.

Πέραν λοιπόν των 7 παραμέτρων του επιπολικού πίνακα απαιτούνται 2 επιπλέον παράμετροι, η κλίση της ευθείας  $\mathbf{g}$  – ή, πράγμα ισοδύναμο, η θέση του δεύτερου πόλου επί του επιπολικού κύκλου – και η γωνία  $\vartheta$  των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , για να προσδιοριστεί η σχετική θέση των επιπέδων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  των εικόνων (δηλαδή η σχετική θέση των δεσμών των επιπολικών ευθειών στον χώρο). Οι δύο αυτές παράμετροι είναι ανεξάρτητες του επιπολικού πίνακα και, συνδυαζόμενες, περιγράφουν το σύνολο των γεωμετριών λήψης των συμβατών με δεδομένο επιπολικό πίνακα. Μέσω αυτών προσδιορίζεται, πλέον, και η ευθεία της βάσης του ζεύγους. Τέλος, 2 επιπλέον παράμετροι ορίζουν τα προβολικά κέντρα των εικόνων επί της βάσης, και κατά συνέπεια το πρωτεύον σημείο και την σταθερά της μηχανής τους. Με αυτές τις συνολικά 11 παραμέτρους ολοκληρώνεται ο προσδιορισμός του σχετικού – με την τυπική φωτογραμμετρική έννοια – και του εσωτερικού προσανατολισμού ζεύγους εικόνων.

<sup>7</sup> Με  $\mathbf{e}_2$  αναφέρεται η θέση του πόλου της δεύτερης εικόνας στο επίπεδό της (όπως προκύπτει από τον επιπολικό πίνακα), ενώ με  $\mathbf{e}_2'$  η νέα του θέση στον επιπολικό κύκλο, έπειτα από κατάλληλη στροφή και μετάθεση της δέσμης των επιπολικών ευθειών ώστε να τέμνεται με εκείνη της πρώτης εικόνας επί της ευθείας  $\mathbf{g}$ .

### 4.6.2 Εσωτερικός προσανατολισμός

Για δεδομένη ευθεία  $g$  και γωνία  $\vartheta$  των επιπέδων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , τα σημεία λήψης δεσμεύονται επί της ευθείας  $o$  της βάσης που ορίζεται από τους πόλους (Σχ. 4.10). Κάθε αυθαίρετη επιλογή σημείων επί της  $o$  ορίζει την θέση των προβολικών κέντρων στον χώρο όσο και, με την προβολή τους στα επίπεδα των εικόνων, τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού. Ο γεωμετρικός τόπος του πρωτεύοντος σημείου στα επίπεδα  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  προκύπτει από την ορθή προβολή της βάσης σε αυτά, δηλαδή είναι ευθεία δια του αντίστοιχου πόλου. Για κάθε σημείο της η σταθερά της μηχανής υπολογίζεται ως η απόστασή του από την ευθεία της βάσης. Δεδομένου ότι οι πόλοι είναι σημεία της βάσης, η ευθεία  $l_{p1}$  του πρωτεύοντος σημείου στο  $\varepsilon_1$  μπορεί να κατασκευαστεί γεωμετρικά από την ορθή προβολή  $d$  του  $e_2'$  και το σημείο  $e_1$ , ενώ η αντίστοιχη ευθεία  $l_{p2}$  στο  $\varepsilon_2$  από την προβολή  $c$  του  $e_1$  και το σημείο  $e_2'$ . Στο Σχ. 4.10 τα ευθύγραμμα τμήματα  $e_1a$  και  $e_2'b$  είναι οι ορθές προβολές των κύκλων επί των οποίων κινούνται οι δύο πόλοι και είναι κάθετα στην  $g$ . Οι γωνίες  $e_1ac$  και  $e_2'bd$  είναι ίσες με την γωνία  $\vartheta$  των επιπέδων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , με συνέπεια τα ορθογώνια τρίγωνα  $e_1ca$  και  $e_2'db$  να είναι όμοια. Συνεπώς ισχύει πως:

$$\frac{|ac|}{|e_1a|} = \frac{|bd|}{|e_2'b|} = \cos(\vartheta) \quad (4.44)$$

Επειδή  $e_1a = e_1'a$  και  $e_2'bd = e_2''bd$  (ακτίνες ίδιων κύκλων) ισχύει επίσης η ισότητα:

$$\frac{|ac|}{|e_1'a|} = \frac{|bd|}{|e_2''b|} = \cos(\vartheta) \quad (4.45)$$

Κατά συνέπεια, μεταβολή της γωνίας  $\vartheta$  επηρεάζει και στις δύο εικόνες την διεύθυνση των ευθειών  $l_{p1}, l_{p2}$  του γεωμετρικού τόπου του πρωτεύοντος σημείου. Η επιλογή δύο σημείων  $p_1, p_2$  των ευθειών αυτών ως πρωτευόντων σημείων των δύο εικόνων ορίζει τα αντίστοιχα προβολικά κέντρα  $O_1, O_2$  επί της βάσης όσο και τις αντίστοιχες τιμές  $c_1, c_2$  της σταθεράς της μηχανής. Τα τρίγωνα  $e_2'de_1$  και  $O_1p_1e_1$  είναι όμοια, οπότε ισχύει η ισότητα των λόγων:

$$\frac{|e_2'd|}{|e_1d|} = \frac{|O_1p_1|}{|e_1p_1|} = \frac{c_1}{|e_1p_1|} \quad (4.46)$$

Από το τρίγωνο  $e_2'db$  ισχύει επίσης πως:

$$\tan(\vartheta) = \frac{|e_2'd|}{|db|} = \frac{\sqrt{|e_2'b|^2 - |db|^2}}{|db|} \quad (4.47)$$

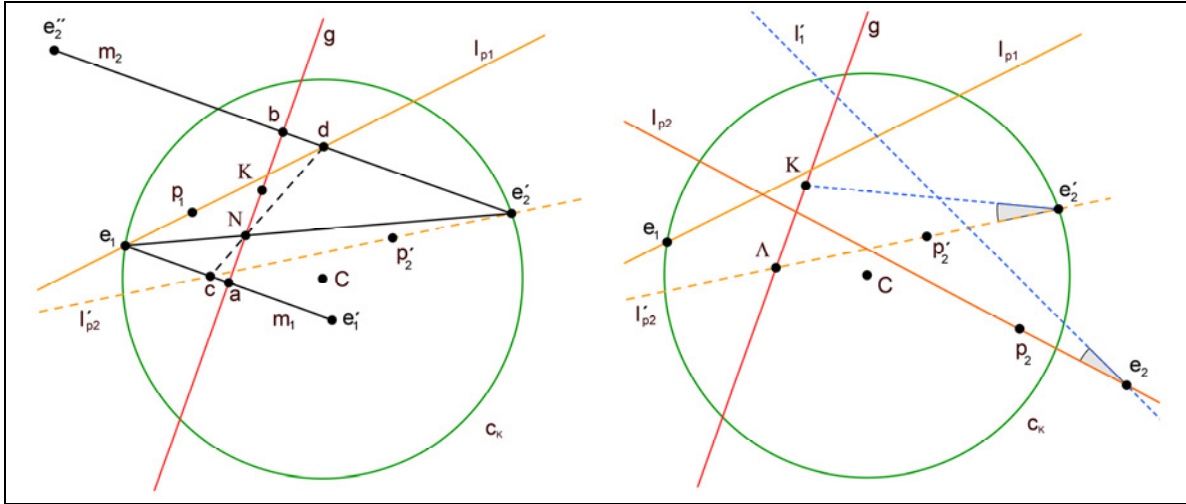
Από τις Εξ. (4.46) και (4.47) είναι δυνατόν να υπολογιστεί η σταθερά της μηχανής  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{|e_1p_1||bd|}{|e_1d|} \tan(\vartheta) = \frac{|e_1p_1|\sqrt{|e_2'b|^2 - |db|^2}}{|e_1d|} \quad (4.48)$$

Με ανάλογο τρόπο, από τα τρίγωνα  $e_1ce_2'$ ,  $O_2p_2e_2'$  και  $e_1ac$  υπολογίζεται η σταθερά της μηχανής  $c_2$ :

$$c_2 = \frac{|e_2p_2||ac|}{|e_2'c|} \tan(\vartheta) = \frac{|e_2p_2|\sqrt{|e_1a|^2 - |ac|^2}}{|e_2'c|} \quad (4.49)$$

Εάν θεωρηθεί κατάκλιση του  $\varepsilon_2$  στο  $\varepsilon_1$  περί την ευθεία  $\mathbf{g}$  (που αντιστοιχεί σε γωνία  $\vartheta = \pi$ ), η Εξ. (4.45) επιτρέπει να κατασκευάζονται γεωμετρικά όσο και αναλυτικά οι ευθείες  $l_{p1}$ ,  $l_{p2}$  του πρωτεύοντος σημείου στα επίπεδα των εικόνων. Σε αυτά, οι προβολές  $\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2''$  και  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1'$  των κύκλων επί των οποίων κινούνται οι δύο πόλοι υπό την επίδραση μεταβολών της  $\vartheta$  είναι ευθύγραμμα τμήματα διερχόμενα από τα σημεία  $\mathbf{e}_2'$ ,  $\mathbf{e}_1$  και κάθετα στην  $\mathbf{g}$  (Σχ. 4.11, αριστερά).



Σχήμα 4.11. Κατάκλιση του επιπέδου  $\varepsilon_2$  στο  $\varepsilon_1$  περί την ευθεία τομής τους (αριστερά). Κατασκευή ευθείας πρωτεύοντος σημείου 2<sup>ης</sup> εικόνας (δεξιά).

Αναλυτικά, η κάθετη από το  $\mathbf{e}_2' = [x_2' \ y_2' \ 1]^T$  στην  $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ g_3]^T$  έχει ομογενείς συντεταγμένες  $[-g_2 \ g_1 \ g_2 x_2' - g_1 y_2']^T$  που μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως:

$$\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2'' = \mathbf{m}_2 = [\mathbf{e}_2']_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} \quad (4.50)$$

όπου:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1' = \mathbf{m}_1 = [\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} \quad (4.51)$$

Τα σημεία  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  είναι οι τομές των ευθειών  $\mathbf{m}_1$  και  $\mathbf{m}_2$  με την  $\mathbf{g}$ , οπότε:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{m}_1 = [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} \quad (4.52)$$

και:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{m}_2 = [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}_2']_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} \quad (4.53)$$

Η ευθεία  $l_{p1}$  που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη γωνία  $\vartheta$  των  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  οφείλει να τέμνει το  $\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2''$  σε σημείο  $\mathbf{d}$  το οποίο ικανοποιεί την Εξ. (4.44), δηλαδή απέχει από το  $\mathbf{b}$  απόσταση ίση με  $|\mathbf{e}_2'\mathbf{b}| \cos(\vartheta)$ . Η δέσμευση αυτή ορίζει μονοσήμαντα το  $\mathbf{d}$ , άρα και την ευθεία  $l_{p1}$ . Ανάλογα, με επιλογή σημείου  $\mathbf{c}$  του  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1'$  σε απόσταση  $|\mathbf{e}_1\mathbf{a}| \cos(\vartheta)$  από το  $\mathbf{a}$  προσδιορίζεται η ευθεία  $l_{p2'}$  του πρωτεύοντος σημείου της δεύτερης εικόνας. Αναλυτικά προκύπτει πως το ση-



μείο  $\mathbf{d}$  έχει συντεταγμένες:

$$\mathbf{d} = (1 - \cos(\vartheta))\mathbf{b} + \cos(\vartheta)\mathbf{e}'_2 \quad (4.54)$$

Η Εξ. (4.54) ισχύει μόνον εφόσον η τρίτη ομογενής συντεταγμένη των σημείων  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{e}'_2$  είναι ίση με την μονάδα. Από την Εξ. (4.53) προκύπτει πως  $\mathbf{b}_3 = \mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g}$ , οπότε η Εξ. (4.54) μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\mathbf{d} = (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g})^{-1} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} + \cos(\vartheta)\mathbf{e}'_2 \quad (4.55)$$

Αντίστοιχα, το σημείο  $\mathbf{c}$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{c} = (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g})^{-1} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} + \cos(\vartheta)\mathbf{e}_1 \quad (4.56)$$

Η  $\mathbf{I}_{p1}$  προκύπτει από την σύνδεση των  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{I}_{p1} = [\mathbf{e}_1]_{\times} \mathbf{d} = (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g})^{-1} [\mathbf{e}_1]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} + \cos(\vartheta)[\mathbf{e}_1]_{\times} \mathbf{e}'_2 \quad (4.57)$$

ενώ η  $\mathbf{I}_{p2}'$  από την σύνδεση των  $\mathbf{e}'_2$  και  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{I}_{p2}' = [\mathbf{e}'_2]_{\times} \mathbf{c} = (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g})^{-1} [\mathbf{e}'_2]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} + \cos(\vartheta)[\mathbf{e}'_2]_{\times} \mathbf{e}_1 \quad (4.58)$$

Πρέπει να σημειωθεί βέβαια ότι η  $\mathbf{I}_{p2}'$  αντιπροσωπεύει την νέα θέση της  $\mathbf{I}_{p2}$  μετά από κατάλληλη στροφή και μετάθεση της δεύτερης εικόνας ώστε οι ομόλογες επιτολικές ευθείες να τέμνονται επί της  $\mathbf{g}$ . Η γωνία της όμως με την ευθεία  $\mathbf{e}_2' \mathbf{K}$  είναι ίση με την γωνία που σχηματίζει η  $\mathbf{I}_{p2}$  με την επιτολική ευθεία  $\mathbf{I}_1'$  του σημείου  $\mathbf{K}$  (Σχ. 4.11, δεξιά), γεγονός που επιτρέπει τον προσδιορισμό της  $\mathbf{I}_{p2}$  από την  $\mathbf{I}_{p2}'$ . Η  $\mathbf{I}_{p2}$  μπορεί να προσδιοριστεί επίσης μέσω του επιτολικού πίνακα αφού είναι η επιτολική ευθεία του σημείου  $\mathbf{A}$  όπου η  $\mathbf{I}_{p2}'$  τέμνει την  $\mathbf{g}$ . Αυτό συμβαίνει επειδή η ευθεία  $\mathbf{g}$  είναι ο γεωμετρικός τόπος των τομών των ομόλογων επιτολικών ευθειών. Έτσι, το σημείο  $\mathbf{A}$  προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{g}]_{\times} \mathbf{I}_{p2}' = (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g})^{-1} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} + \cos(\vartheta)[\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} \mathbf{e}_1 \quad (4.59)$$

και η  $\mathbf{I}_{p2}$  από την:

$$\mathbf{I}_{p2} = \mathbf{F} \mathbf{A} = (1 - \cos(\vartheta))(\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{F} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{g} + \cos(\vartheta) \mathbf{F} [\mathbf{g}]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} \mathbf{e}_1 \quad (4.60)$$

Όλα τα σημεία των  $\mathbf{I}_{p1}$  και  $\mathbf{I}_{p2}$  που προκύπτουν από τις Εξ. (4.57) και (4.60) είναι δυνατές θέσεις του πρωτεύοντος σημείου, στο επίπεδο κάθε εικόνας, που αντιστοιχούν σε δεδομένη ευθεία  $\mathbf{g}$  και γωνία  $\vartheta$ . Εάν επιλεγούν δύο σημεία  $\mathbf{p}_1$  και  $\mathbf{p}_2$  επί των  $\mathbf{I}_{p1}$ ,  $\mathbf{I}_{p2}$ , οι τιμές της σταθεράς της μηχανής  $c_1$ ,  $c_2$ , υπολογίζονται από τις Εξ. (4.48) και (4.49) αφού πρώτα υπολογιστούν οι απαραίτητες αποστάσεις<sup>8</sup>. Αλλαγή της γωνίας  $\vartheta$  (με  $\mathbf{g}$  σταθερή) μεταβάλλει ταυτόχρονα στις δύο εικόνες τις διευθύνσεις των  $\mathbf{I}_{p1}$  και  $\mathbf{I}_{p2}$  ανάλογα με το  $\cos(\vartheta)$ . Επισημαίνεται, ωστόσο, ότι τα σύνολα των διαφορετικών ευθειών  $\mathbf{I}_{p1}$ ,  $\mathbf{I}_{p2}$  δεν καλύπτουν πλήρως τα επίπεδα των εικόνων. Οι ευθείες  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2'$  και  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2''$  οροθετούν την περιοχή της πρώτης εικόνας εκτός της οποίας δεν θα ήταν δυνατόν να βρίσκεται το πρωτεύον σημείο της, δεδομένου ότι η  $\mathbf{I}_{p1}$  (δια του  $\mathbf{e}_1$ ) οφείλει να τέμνει το  $\mathbf{e}_2' \mathbf{e}_2''$ . Αντίστοιχα, οι ευθείες  $\mathbf{e}_2' \mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{e}_2' \mathbf{e}_1'$  περιορίζουν τις δυνατές θέσεις του πρωτεύοντος σημείου της δεύτερης εικόνας.

<sup>8</sup> Στην Εξ. (4.48) αντί της απόστασης  $|\mathbf{e}_2' \mathbf{p}_1|$  πρέπει να χρησιμοποιηθεί η  $|\mathbf{e}_2 \mathbf{p}_1|$ .

### 4.6.3 Προβολική αντιστοιχία ευθειών πρωτεύοντος σημείου

Στο Σχ. 4.11 (αριστερά) τα ευθύγραμμα τμήματα  $e_2'e_2''$ ,  $e_1e_1'$  σχηματίζουν ισοσκελές τραπέζιο  $e_1e_1'e_2'e_2''$ , με διαγώνιο την ευθεία  $e_1e_2'$  και μεσοκάθετο την  $g$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $N$ . Θα αποδειχθεί πως η ευθεία  $cd$  διέρχεται επίσης από το  $N$ . Τα ορθογώνια τρίγωνα  $e_2'bN$  και  $e_1aN$  είναι όμοια, οπότε ισχύει η ισότητα των λόγων  $e_1a/e_2'b$  και  $bN/aN$ . Από αυτήν και την Εξ. (4.44) προκύπτει επίσης η ισότητα των λόγων  $ac/bd$  και  $aN/bN$ , και άρα η ομοιότητα των τριγώνων  $bNd$ ,  $aNc$  και η ισότητα των γωνιών τους. Τα ευθύγραμμα τμήματα  $bN$  και  $Nc$  είναι συνεπώς συνευθειακά, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Οι ευθείες  $l_{p1}$  και  $l_{p2}'$ , οι οποίες συνιστούν τον γεωμετρικό τόπο του πρωτεύοντος σημείου των εικόνων, ορίζονται αντίστοιχα από τα σημεία  $e_1$ ,  $d$  και  $e_2'$ ,  $c$ . Για δεδομένη ευθεία  $g$ , τα σημεία  $e_1$ ,  $e_2'$  είναι σταθερά, ενώ τα  $d$ ,  $c$  μεταβάλλονται υπό την επίδραση μεταβολών της γωνίας  $\theta$ . Όμως οι διπλοί τους λόγοι παραμένουν ίσοι, αφού πρόκειται για τομές της ίδιας δέσμης ευθειών  $cd$  δια του σημείου  $N$  (ή, πράγμα ισοδύναμο, εξαιτίας της Εξ. 4.44). Έτσι, οι ευθείες  $l_{p1}$ ,  $l_{p2}'$  βρίσκονται σε προβολική αντιστοιχία, όπως άλλωστε και οι  $l_{p1}$ ,  $l_{p2}$  αφού οι  $l_{p2}'$  και  $l_{p2}$  διαφέρουν μόνο κατά στροφή και μετάθεση. Κατά συνέπεια, υπάρχει μη αντιστρέψιμη ετερογραφία  $S_g$  (διαφορετική για κάθε ευθεία  $g$ ) που συνδέει γραμμικά το πρωτεύον σημείο  $p_1$  της πρώτης εικόνας με την ευθεία  $l_{p2}$  της δεύτερης, ή αντίστροφα το  $p_2$  με την  $l_{p1}$ .

Πράγματι, όσον αφορά την πρώτη περίπτωση, το  $p_1$  ορίζει με το  $e_1$  την ευθεία  $l_{p1}$ :

$$l_{p1} = [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.61)$$

που τέμνει την  $m_2$  (Εξ. 4.50) στο σημείο  $d$ :

$$d = [m_2]_{\times} l_{p1} = [m_2]_{\times} [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.62)$$

Το σημείο  $N$  είναι η τομή της  $e_1e_2'$  με την  $g$ :

$$N = [g]_{\times} [e_1]_{\times} e_2' \quad (4.63)$$

Από αυτό και το  $d$  προκύπτει η ευθεία  $dc$ :

$$l_{dc} = [N]_{\times} d = [N]_{\times} [m_2]_{\times} [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.64)$$

που τέμνει την  $m_1$  (Εξ. 4.51) στο σημείο  $c$ :

$$c = [m_1]_{\times} l_{dc} = [m_1]_{\times} [N]_{\times} [m_2]_{\times} [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.65)$$

Η ευθεία  $l_{p2}'$  προκύπτει από την σύνδεση του  $c$  με το  $e_2'$ :

$$l_{p2}' = [e_2']_{\times} c = [e_2']_{\times} [m_1]_{\times} [N]_{\times} [m_2]_{\times} [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.66)$$

Η  $l_{p2}'$  τέμνει την  $g$  στο σημείο  $\Lambda$ :

$$\Lambda = [g]_{\times} l_{p2}' = [g]_{\times} [e_2']_{\times} [m_1]_{\times} [N]_{\times} [m_2]_{\times} [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.67)$$

Η  $l_{p2}$  είναι, τέλος, η επιπολική ευθεία του σημείου  $\Lambda$ :

$$l_{p2} = F\Lambda = F[g]_{\times} l_{p2}' = F[g]_{\times} [e_2']_{\times} [m_1]_{\times} [N]_{\times} [m_2]_{\times} [e_1]_{\times} p_1 \quad (4.68)$$

Η Εξ. (4.68) περιγράφει μη αντιστρέψιμη ετερογραφία που συνδέει γραμμικά την θέση του πρωτεύοντος σημείου  $p_1$  με την ευθεία  $l_{p2}$ . Η ετερογραφία αυτή αναπαριστάται από τον πί-

νακα  $S_g$ :

$$S_g = F[g]_x [e'_2]_x [m_1]_x [N]_x [m_2]_x [e_1]_x \quad (4.69)$$

που εξαρτάται από την ευθεία  $g$  και έχει όμοιες ιδιότητες με τον επιπολικό πίνακα. Ο ανάστροφος πίνακας  $S_g^T$  περιγράφει την ετερογραφία μεταξύ του  $p_2$  και της  $l_{p1}$ .

#### 4.7 Μερική γνώση του εσωτερικού προσανατολισμού

Μετά από την μελέτη της γεωμετρίας του στερεοζεύγους στην γενική περίπτωση των μη βαθμονομημένων μηχανών, στην παρούσα ενότητα εξετάζεται πώς δεσμεύονται οι βαθμοί ελευθερίας του στερεοζεύγους όταν είναι γνωστά ορισμένα μόνο στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων. Γνώση αποκλειστικά των τιμών  $c_1$ ,  $c_2$  της σταθεράς των μηχανών των δύο εικόνων δεν δεσμεύει ούτε την διεύθυνση<sup>9</sup> της ευθείας τομής των επιπέδων  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  των εικόνων ούτε την μεταξύ τους γωνία. Σε κάθε περίπτωση είναι πράγματι δυνατόν να επιλεγούν δύο σημεία  $p_1$  και  $p_2$  επί των ευθειών  $l_{p1}$ ,  $l_{p2}$  του πρωτεύοντος σημείου σε κατάλληλη απόσταση από τον αντίστοιχο πόλο ώστε να ικανοποιούν τις Εξ. (4.48) και (4.49). Δεσμεύονται, όμως, κατ' αυτόν τον τρόπο επί της ευθείας της βάσης οι θέσεις των προβολικών κέντρων που αντιστοιχούν στην εκάστοτε επιλογή  $g$  και  $\vartheta$ .

Αντιθέτως, γνώση του γεωμετρικού τόπου του πρωτεύοντος σημείου μιας εικόνας, για παράδειγμα του  $p_1$  (δηλαδή γνώση της ευθείας  $l_{p1}$  δια του πόλου  $e_1$ ), δεσμεύει την γωνία  $\vartheta$  των επιπέδων  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  αλλά και την ευθεία  $l_{p2}$  του πρωτεύοντος σημείου  $p_2$ , μέσω του λόγου των αποστάσεων  $bd/e_2'b$  που ορίζει επί του ευθύγραμμου τμήματος  $e_2'e_2''$  (Εξ. 4.44). Οι βαθμοί ελευθερίας του ζεύγους μειώνονται, έτσι, κατά έναν. Η επιλογή διεύθυνσης της ευθείας τομής των επιπέδων  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ( $g$ ) παραμένει αδέσμευτη, αλλά σε κάθε τιμή της αντιστοιχεί πλέον συγκεκριμένη γωνία  $\vartheta$  (ή  $2\pi - \vartheta$ ) και ευθεία  $l_{p2}$  επί της οποίας οφείλει να κείται το πρωτεύον σημείο της δεύτερης εικόνας. Η  $l_{p2}$  μπορεί μάλιστα να υπολογιστεί και γραμμικά από το  $p_1$  μέσω της ετερογραφίας  $S_g$  (Εξ. 4.68). Εάν είναι γνωστή όχι απλώς η ευθεία  $l_{p1}$  δια του  $p_1$  αλλά και η ίδια η θέση του  $p_1$ , τότε οι βαθμοί ελευθερίας του ζεύγους μειώνονται κατά δύο, και μπορεί επιπλέον να υπολογιστεί και η σταθερά της μηχανής  $c_1$ .

Εάν εκτός του  $p_1$  είναι γνωστή και η σταθερά της μηχανής  $c_1$ , τότε δεσμεύεται πλέον και η διεύθυνση της ευθείας  $g$ . Πράγματι, η ευθεία  $g$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της θέσης του δεύτερου πόλου  $e_2' = [x_2' \ y_2' \ 1]^T$  μέσω της ετερογραφίας  $T$  (Εξ. 4.40) ως  $g = Te_2'$ . Η επιλογή του σημείου  $K$ , από το οποίο διέρχεται η  $g$ , στο  $[0 \ 0 \ 1]^T$  απλοποιεί την μορφή του πίνακα  $T$  διευκολύνοντας τον υπολογισμό του από τα στοιχεία του επιπολικού πίνακα (Εξ. 4.43). Μέσω της Εξ. (4.48) – ή, ευκολότερα, του τετραγώνου της (εάν εκφραστούν οι απαραίτητες αποστάσεις συναρτήσει του  $e_2'$ ) – η γνωστή τιμή  $c_1$  της σταθεράς της μηχανής ουσιαστικά θέτει μια δέσμευση στην θέση  $e_2'$ . Αν και το  $p_1$  θεωρηθεί, όπως και το  $K$ , στην αρχή των εικονοσυντεταγμένων<sup>10</sup>, η δέσμευση αυτή καταλήγει σε εξίσωση 4<sup>ου</sup> βαθμού ως

<sup>9</sup> Υπενθυμίζεται ότι η ευθεία  $g$  ορίζεται πλήρως από την διεύθυνσή της, αφού είναι δεσμευμένη να διέρχεται από σημείο  $K$  του  $\varepsilon_1$  (βλ. ενότητα 4.4).

<sup>10</sup> Κάτι τέτοιο δεν επηρεάζει την γενικότητα της επίλυσης αφού το  $p_1$  μπορεί πάντοτε να μετατεθεί, πριν από τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα, στην θέση  $[0 \ 0 \ 1]^T$  με κατάλληλη μετάθεση των εικονοσυντεταγμένων.

προς τα  $x_2', y_2'$ . Η γεωμετρική της ερμηνεία είναι πως το  $\mathbf{e}_2'$  ανήκει σε επίπεδη καμπύλη αντίστοιχου βαθμού. Το  $\mathbf{e}_2'$  είναι ταυτόχρονα σημείο του επιπολικού κύκλου, άρα μπορεί να προσδιοριστεί από την τομή του με την καμπύλη 4<sup>ου</sup> βαθμού. Η λύση δεν είναι μοναδική. Οι δυνατές θέσεις – πραγματικές ή μιγαδικές – του σημείου  $\mathbf{e}_2'$  είναι 8, καθώς σύμφωνα με το θεώρημα του Bezout<sup>11</sup>, το πλήθος των τομών δύο επίπεδων καμπυλών είναι ίσο με το γινόμενο των βαθμών τους. Από τις λύσεις του  $\mathbf{e}_2'$  και το  $\mathbf{p}_1$  μπορούν κατόπιν να υπολογιστούν η ευθεία  $\mathbf{g}$  και η γωνία  $\theta$ . Έτσι, στην περίπτωση ζεύγους εικόνων, μιας γνωστού και μιας άγνωστου εσωτερικού προσανατολισμού, είναι δυνατόν να προσδιοριστούν, μέσω του επιπολικού τους πίνακα, η σχετική θέση των επιπέδων τους και η διεύθυνση της βάσης τους, ενώ ταυτόχρονα δεσμεύεται το πρωτεύον σημείο της δεύτερης εικόνας σε ευθεία δια του πόλου της. Βέβαια, η αβεβαιότητα των δυνατών 3D ανακατασκευών των απεικονιζόμενων αντικειμένων παραμένει προβολική, αφού το προβολικό κέντρο της δεύτερης εικόνας είναι ελεύθερο να κινείται επί της ευθείας της βάσης (χωρίς αντίστοιχη μετακίνηση του επιπέδου  $\varepsilon_2$ ), γεγονός που μεταβάλλει τις οπτικές ακτίνες επί των επιπολικών τους επιπέδων. Ωστόσο, ένα ευκλείδειο μέγεθος που είναι δυνατόν να υπολογιστεί εν προκειμένω είναι οι γωνίες της δέσμης των επιπολικών επιπέδων τα οποία ορίζονται μονοσήμαντα από την βάση και τις επιπολικές ευθείες<sup>12</sup>.

Τελευταία εξετάζεται η υπόθεση ότι είναι δεδομένες οι θέσεις  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  του πρωτεύοντος σημείου και στις δύο εικόνες, η οποία έχει και αμεσότερο ενδιαφέρον αφού συχνά μπορεί να θεωρηθεί ότι το πρωτεύον σημείο βρίσκεται στο κέντρο των εικόνων. Ως γνωστόν, σε αυτή την περίπτωση προσδιορίζονται οι τιμές της σταθεράς της μηχανής και ο σχετικός προσανατολισμός (ενότητα 3.4.2). Στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Από τα  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  προσδιορίζονται οι ευθείες  $\mathbf{l}_{p1}, \mathbf{l}_{p2}$ , δια των αντίστοιχων πόλων. Σε κάθε θέση  $\mathbf{e}_2'$  του δεύτερου πόλου στον επιπολικό κύκλο αντιστοιχεί μοναδική ευθεία  $\mathbf{g}$ , αλλά και μοναδική  $\mathbf{cd}$  που κατασκευάζεται από τις τομές των ευθειών  $\mathbf{l}_{p1}, \mathbf{l}_{p2}$  του πρωτεύοντος σημείου με τα ευθύγραμμα τμήματα  $\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1'$  (Σχ. 4.11, αριστερά). Η  $\mathbf{cd}$  εν γένει δεν θα διέρχεται, ως όφειλε, από το σημείο  $\mathbf{N}$  που ορίζεται από την τομή των  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2'$  και  $\mathbf{g}$  (βλ. ενότητα 4.6.3). Η γεωμετρική αυτή δέσμευση επιτρέπει να προσδιοριστεί η θέση  $\mathbf{e}_2'$  του επιπολικού κύκλου που την ικανοποιεί. Ισοδύναμα, μέσω του  $\mathbf{e}_2' = [x_2' \ y_2' \ 1]^T$  υπολογίζεται η ετερογραφία  $\mathbf{S}_g$  (Εξ. 4.69), και από αυτήν η ευθεία  $\mathbf{l}_{p2} = \mathbf{S}_g\mathbf{p}_1$  (Εξ. 4.68) που οφείλει να διέρχεται από το  $\mathbf{p}_2$ . Πρέπει δηλαδή να ισχύει η ισότητα:

$$\mathbf{p}_2^T \mathbf{S}_g \mathbf{p}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}_2^T \mathbf{F} [\mathbf{g}]_x [\mathbf{e}_2']_x [\mathbf{m}_1]_x [\mathbf{N}]_x [\mathbf{m}_2]_x [\mathbf{e}_1]_x \mathbf{p}_1 = 0 \quad (4.70)$$

η οποία μπορεί να γραφεί αποκλειστικά συναρτήσει του  $\mathbf{e}_2'$  ως:

$$\mathbf{p}_2^T \mathbf{F} [\mathbf{Te}_2']_x [\mathbf{e}_2']_x [\mathbf{e}_1]_x [\mathbf{Te}_2']_x [\mathbf{Te}_2']_x [\mathbf{e}_1]_x \mathbf{e}_2' [\mathbf{e}_2']_x [\mathbf{Te}_2']_x [\mathbf{e}_1]_x \mathbf{p}_1 = 0 \quad (4.71)$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θεωρείται  $\mathbf{K} = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$  χωρίς να χάνεται η γενικότητα της επίλυσης. Η Εξ. (4.71) απλοποιείται έτσι στην:

$$\mathbf{f}_{31} \mathbf{D}_{13} + \mathbf{f}_{32} \mathbf{D}_{23} + \mathbf{f}_{33} \mathbf{D}_{33} = 0 \quad (4.72)$$

όπου:

<sup>11</sup> Bézout E., 1776. Théorie générale des équations algébriques (από <http://en.wikipedia.org>).

<sup>12</sup> Οι γωνίες των δεσμών των επιπολικών επιπέδων αποτελούν την βάση για την διατύπωση γεωμετρικών δεσμεύσεων μεταξύ των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού και της 2D επιπολικής γεωμετρίας, οι οποίες παρουσιάζονται στο επόμενο Κεφάλαιο 5.

$$\mathbf{D} = [\mathbf{T}\mathbf{e}'_2]_{\times} [\mathbf{e}'_2]_{\times} [[\mathbf{e}_1]_{\times} \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{T}\mathbf{e}'_2]_{\times} [[\mathbf{T}\mathbf{e}'_2]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \mathbf{e}'_2]_{\times} [[\mathbf{e}'_2]_{\times} \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{T}\mathbf{e}'_2]_{\times} [\mathbf{e}_1]_{\times} \quad (4.73)$$

Η Εξ. (4.72) είναι 7<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τα  $x_2'$ ,  $y_2'$  και αναπαριστά επίπεδη καμπύλη ίδιου βαθμού. Από την τομή της με τον επιτολικό κύκλο προκύπτουν 14 δυνατές (πραγματικές ή μιγαδικές) θέσεις του  $\mathbf{e}_2'$ . Από τις πραγματικές μόνο λύσεις υπολογίζονται εν συνεχεία η ευθεία  $\mathbf{g}$ , η γωνία  $\vartheta$  αλλά και οι τιμές  $c_1$ ,  $c_2$  της σταθεράς των μηχανών, πράγμα που ολοκληρώνει έτσι την μερική βαθμονόμηση των εικόνων.

Η εδώ προτεινόμενη λύση συνιστά εναλλακτικό αλγόριθμο υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής από τον επιτολικό πίνακα, αντίστοιχο εκείνων που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.4.2. Συγκρινόμενη μαζί τους είναι πιο σύνθετη, αλλά λόγω της προσέγγισής της καθιστά σαφέστερη την γεωμετρία που επιτρέπει τελικά την δέσμευση των βαθμών ελευθερίας των εικόνων και την μερική τους βαθμονόμηση (η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί και ταυτόχρονα με την τυπική επίλυση του σχετικού προσανατολισμού με την συνθήκη συνεπιπεδότητας). Ακόμα, στο επόμενο Κεφάλαιο προτείνεται διαφορετική ευκλείδεια γεωμετρική ερμηνεία των δεσμεύσεων που επιβάλλει η 2D επιτολική γεωμετρία στα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού, η οποία οδηγεί σε διατύπωση απλούστερων αλγορίθμων υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής από τον επιτολικό πίνακα, ενώ αποδεικνύεται ότι οι δυνατές πραγματικές λύσεις είναι λιγότερες.

Θα πρέπει να σημειωθεί, βέβαια, ότι εάν οι οπτικοί άξονες των εικόνων είναι συνεπίπεδοι – γεγονός που διαπιστώνεται από τον επιτολικό πίνακα καθώς τα σημεία  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  θα ανήκουν σε ομόλογες επιτολικές ευθείες και άρα θα ικανοποιούν την Εξ. (3.29):  $\mathbf{p}_1^T \mathbf{F} \mathbf{p}_2 = 0$  – το κοινό τους επίπεδο, στο οποίο ανήκει και η βάση, θα είναι κάθετο στα  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και στην ευθεία τομής τους  $\mathbf{g}$ . Κατά συνέπεια οι κύκλοι επί των οποίων κινούνται οι πόλοι με μεταβολή της γωνίας  $\vartheta$  θα είναι συνεπίπεδοι, και οι ευθείες  $\mathbf{l}_{p1}$ ,  $\mathbf{l}_{p2}$  θα ταυτίζονται με τα ευθύγραμμα τμήματα  $\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2''$  και  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1'$  (Σχ. 4.10). Σε αυτή την περίπτωση δεν ορίζονται ούτε οι λόγοι της Εξ. (4.46) ούτε η ευθεία  $\mathbf{cd}$ , και επομένως δεν μπορεί να δεσμευτεί η θέση  $\mathbf{e}_2'$  του δεύτερου πόλου στον επιτολικό κύκλο ούτε η γωνία  $\vartheta$ , με συνέπεια να είναι αδύνατος ο υπολογισμός των δύο τιμών της σταθεράς της μηχανής. Αυτό είναι σε συμφωνία με τους Newsam et al. (1996), που απέδειξαν ότι η συνεπιπεδότητα των οπτικών αξόνων αντιπροσωπεύει κρίσιμη γεωμετρία στον υπολογισμό των τιμών  $c_1$ ,  $c_2$  από τον επιτολικό πίνακα.

## 4.8 Εικόνες από την ίδια μηχανή λήψης

Οι βαθμοί ελευθερίας του στερεοζεύγους δεσμεύονται ακόμα και όταν μοναδική διαθέσιμη a priori πληροφορία είναι ότι οι δύο εικόνες έχουν (εν μέρει ή πλήρως) κοινό, πλην άγνωστο, εσωτερικό προσανατολισμό.

### 4.8.1 Δέσμευση κοινής σταθεράς της μηχανής

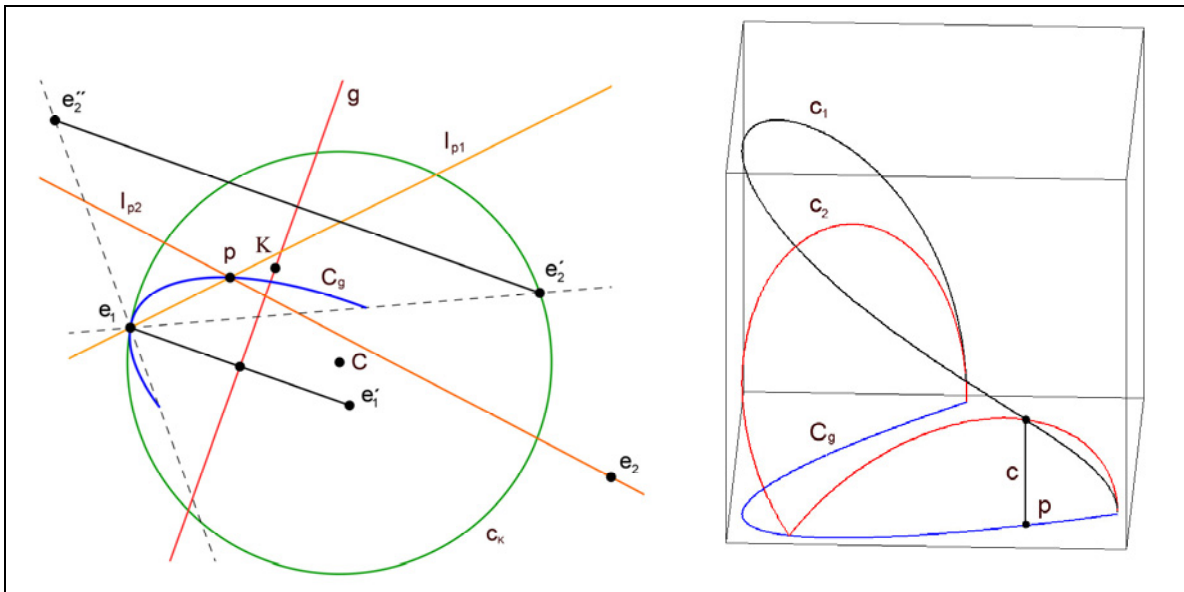
Η δέσμευση ότι οι δύο εικόνες έχουν την ίδια σταθερά μηχανής δεσμεύει, από μόνη της, έναν βαθμό ελευθερίας του στερεοζεύγους. Η επιλογή διεύθυνσης της ευθείας  $\mathbf{g}$  και γωνίας  $\vartheta$  των επιπέδων  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  των εικόνων ορίζει την ευθεία της βάσης του ζεύγους και, μέσω της ορθής προβολής της στα  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , ευθύγραμμους γεωμετρικούς τόπους  $\mathbf{l}_{p1}$ ,  $\mathbf{l}_{p2}$  της θέσης του

πρωτεύοντος σημείου. Σε κάθε σημείο των ευθειών  $I_{p1}$  και  $I_{p2}$  αντιστοιχεί διαφορετική τιμή της σταθεράς της μηχανής (οι οποίες υπολογίζονται μέσω των Εξ. 4.48 και 4.49). Σε αντίθεση, έτσι, με την γενική περίπτωση όπου σε κάθε επιλογή πρωτεύοντος αντιστοιχεί απειρία θέσεων στην άλλη εικόνα, εδώ η επιλογή θέσης πρωτεύοντος σημείου  $p_1$  (ή, αντίστοιχα,  $p_2$ ) επί της  $I_{p1}$  (αντίστοιχα επί της  $I_{p2}$ ) δεσμεύει πλήρως την θέση του  $p_2$  (αντίστοιχα του  $p_1$ ) επί της  $I_{p2}$  (αντίστοιχα επί της  $I_{p1}$ ) στο σημείο όπου ισχύει  $c_1 = c_2$ .

#### 4.8.2 Δέσμευση κοινού πρωτεύοντος σημείου

Εν συνεχεία εξετάζεται η δέσμευση κοινού πρωτεύοντος σημείου, που επίσης επιτρέπει α-δέσμευτη δυνατότητα επιλογής της ευθείας τομής  $g$  και της γωνίας  $\vartheta$  των επιπέδων των εικόνων. Περιορίζονται όμως τότε, όπως θα φανεί στα επόμενα, οι δυνατές θέσεις για το πρωτεύον σημείο και, συνεπώς, η θέση των προβολικών κέντρων στην ευθεία της βάσης. Για δεδομένη επιλογή  $g$  και  $\vartheta$ , το πρωτεύον σημείο είναι δεσμευμένο να ανήκει, στο επίπεδο κάθε εικόνας, σε ευθεία ( $I_{p1}$ ,  $I_{p2}$ ) δια του πόλου της που αποτελεί την ορθή προβολή της βάσης (Εξ. 4.57 και 4.60). Αν θεωρηθεί κοινό σύστημα συντεταγμένων (υπέρθεση των εικόνων), μοναδικό σημείο που ανήκει και στις δύο ευθείες είναι η τομή τους  $p = [x_0 \ y_0 1]^T$  (Σχ. 4.12, αριστερά):

$$p = [I_{p1}]_x I_{p2} \quad (4.74)$$



Σχήμα 4.12. Ο γεωμετρικός τύπος του κοινού πρωτεύοντος σημείου που αντιστοιχεί σε ευθεία  $g$  είναι τμήμα κωνικής τομής (αριστερά). Σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί διαφορετική τιμή σταθεράς της μηχανής (δεξιά).

Έτσι, σε κάθε συνδυασμό ( $g$ ,  $\vartheta$ ) αντιστοιχεί μοναδικό κοινό πρωτεύον σημείο  $p$ . Από αυτό υπολογίζονται μετά, μέσω των Εξ. (4.48) και (4.49), οι τιμές  $c_1$ ,  $c_2$  της σταθεράς της μηχανής, οι οποίες στην γενική περίπτωση θα διαφέρουν. Για δεδομένη διεύθυνση της ευθείας  $g$ , η διεύθυνση των ευθειών  $I_{p1}$ ,  $I_{p2}$  μεταβάλλεται με αλλαγή της γωνίας  $\vartheta$ , συνεπώς μεταβάλλεται και η θέση του σημείου τομής τους  $p$ . Ωστόσο οι δύο ευθείες βρίσκονται σε προβολική αντιστοιχία (βλ. ενότητα 4.6.3), άρα τα σημεία τομής τους ανήκουν σε κωνική τομή  $C_g$  που διέρχεται από τους πόλους  $e_1$  και  $e_2$ . Η ομογενής αναπαράστασή της υπολογίζεται

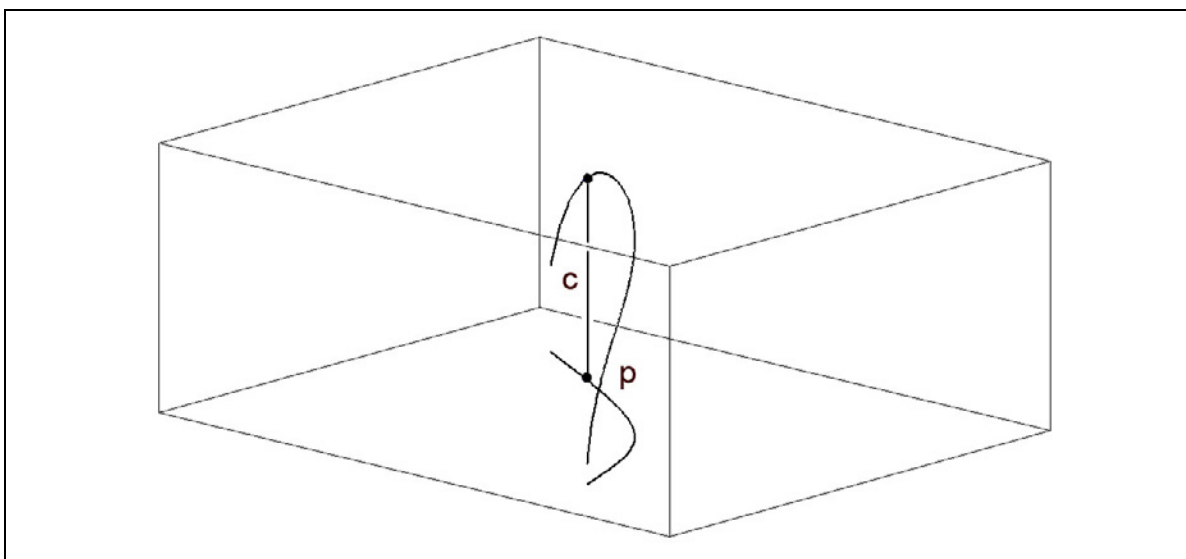
από τον πίνακα της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας  $\mathbf{S}_g$  (Εξ. 4.69) κατά τρόπο ανάλογο του υπολογισμού της κωνικής  $\mathbf{C}_T$ , επί της οποίας τέμνονται οι ευθείες  $\mathbf{g}$  και  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2'$  (Εξ. 4.42).

$$\mathbf{C}_g = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_g + \mathbf{S}_g^T) \quad (4.75)$$

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.6.2, η ευθεία  $l_{p1}$  οφείλει να τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα  $\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2''$ , οπότε όλες οι θέσεις του  $\mathbf{p}$  που αντιστοιχούν σε ευθεία  $\mathbf{g}$  ανήκουν στο τμήμα της κωνικής  $\mathbf{C}_g$  που οροθετείται από τις ευθείες  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2'$  και  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2''$  (Σχ. 4.12, αριστερά). Σε διαφορετική διεύθυνση της ευθείας  $\mathbf{g}$  αντιστοιχεί άλλη κωνική  $\mathbf{C}_g$ , και έτσι το σύνολο των δυνατών θέσεων του κοινού πρωτεύοντος σημείου  $\mathbf{p}$  είναι τμήμα οικογένειας κωνικών με κοινά σημεία τους πόλους  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ .

### 4.8.3 Δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού

Η γωνία  $\Theta$  των επιπέδων  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  των εικόνων, αλλά και ο εσωτερικός προσανατολισμός τους, δεσμεύονται περαιτέρω εάν είναι γνωστό ότι και η σταθερά της μηχανής είναι κοινή. Σε κάθε σημείο  $\mathbf{p}$  της κωνικής  $\mathbf{C}_g$  αντιστοιχούν δύο τιμές  $c_1$  και  $c_2$  της σταθεράς της μηχανής. Στο Σχ. 4.12 (δεξιά) φαίνονται σε υπέρθεση οι διαφορετικοί εσωτερικοί προσανατολισμοί των εικόνων που προκύπτουν από τις τιμές αυτές και αντιστοιχούν σε μια θέση της ευθείας  $\mathbf{g}$ . Δείχνονται δηλαδή οι θέσεις των προβολικών κέντρων σε κοινό 3D σύστημα εικονοσυντεταγμένων (με μαύρο χρώμα της πρώτης εικόνας, με κόκκινο της δεύτερης). Τα προβολικά αυτά κέντρα ανήκουν σε δύο διαφορετικές 3D καμπύλες που έχουν κοινή ορθή προβολή στο επίπεδο των εικόνων, την καμπύλη  $\mathbf{C}_g$ . Η τομή τους είναι, συνεπώς, η μοναδική θέση όπου η σταθερά της μηχανής είναι κοινή για τις δύο εικόνες. Σε κάθε διεύθυνση της ευθείας  $\mathbf{g}$  αντιστοιχεί, έτσι, συγκεκριμένη θέση  $\mathbf{p}$  του πρωτεύοντος σημείου και σταθερές μηχανής  $c_1 = c_2$ . Ο γεωμετρικός τόπος του κοινού εσωτερικού προσανατολισμού μπορεί να προκύψει αν θεωρηθούν όλες οι ευθείες  $\mathbf{g}$  δια σημείου  $\mathbf{K}$  ή, πράγμα ισοδύναμο, όλες οι θέσεις  $\mathbf{e}_2'$  του δευτέρου πόλου στον επιπολικό κύκλο (Σχ. 4.13).



Σχήμα 4.13. Γεωμετρικός τόπος κοινού εσωτερικού προσανατολισμού.

Τα στοιχεία του εσωτερικού προσανατολισμού που αντιστοιχούν σε μια θέση της  $\mathbf{g}$  υπο-

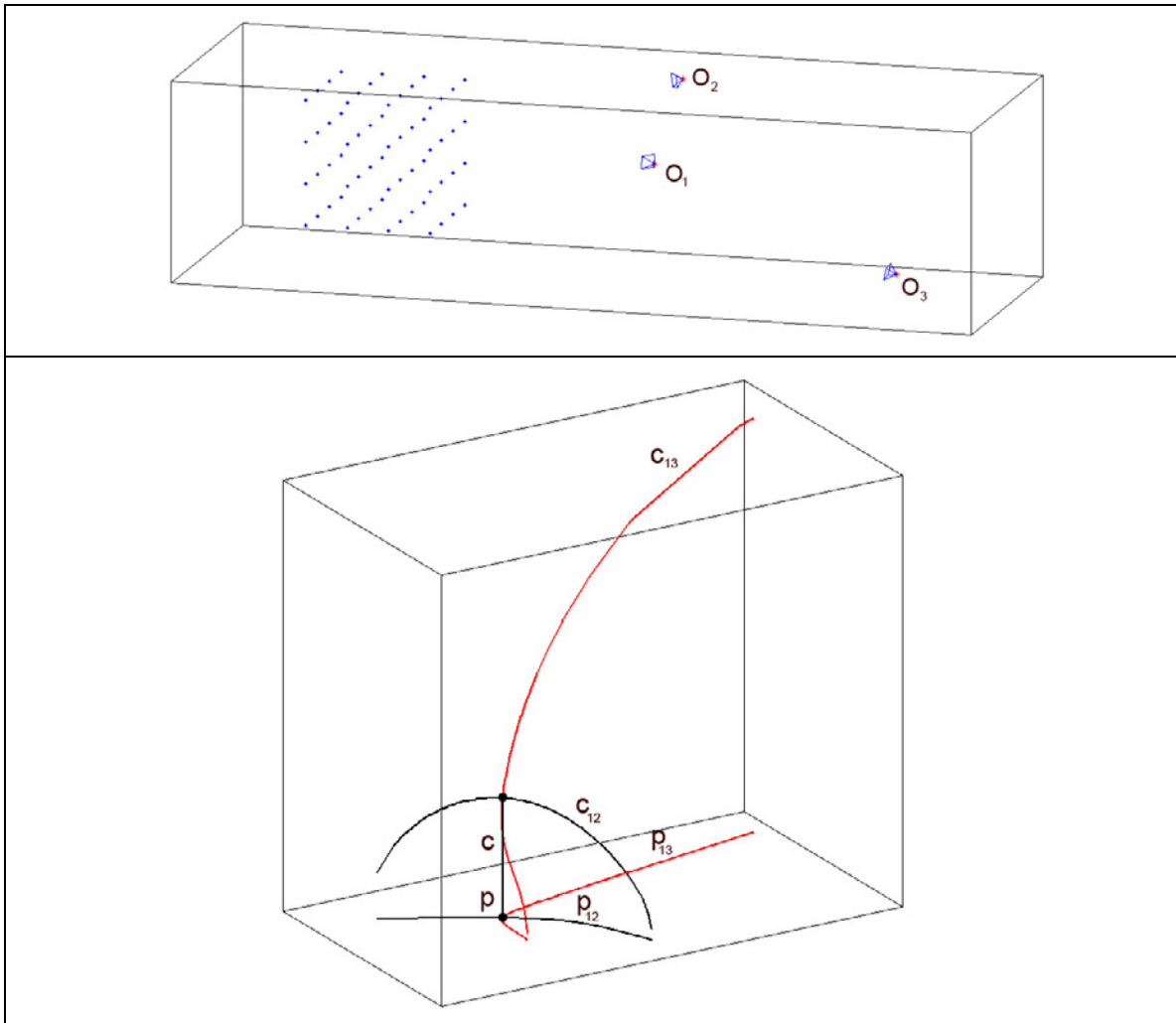
λογίζονται αναλυτικά ως εξής. Η Εξ. (4.74), εάν οι ευθείες  $I_{p1}$ ,  $I_{p2}$  αντικατασταθούν από τις Εξ. (4.57) και (4.60), συνιστά παραμετρική έκφραση της θέσης του πρωτεύοντος σημείου  $p(\vartheta)$  επί της  $C_g$  συναρτήσει της γωνίας  $\vartheta$ . Το ίδιο συμβαίνει και για τις Εξ. (4.48) και (4.49), από τις οποίες υπολογίζονται οι  $c_1(\vartheta)$  και  $c_2(\vartheta)$ . Η ισότητα  $c_1 = c_2$  θέτει μια αλγεβρική δέσμευση στην γωνία  $\vartheta$ . Συγκεκριμένα, εάν επιλεγεί  $K = [0 \ 0 \ 1]^T$  η ισότητα των τετραγώνων των Εξ. (4.48) και (4.49) καταλήγει σε πολυώνυμο 4<sup>ου</sup> βαθμού ως προς το  $\cos(\vartheta)$ . Από τις 4 λύσεις του, αποδεκτές είναι μόνον οι πραγματικές που βρίσκονται στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Μέσω αυτών προσδιορίζονται η τιμή της γωνίας  $\vartheta$ , η θέση του πρωτεύοντος σημείου και η κοινή σταθερά της μηχανής. Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι συναρτήσεις της θέσης  $e_2' = [x_2' \ y_2' \ 1]^T$  του δεύτερου πόλου στον επιτολικό κύκλο, η οποία συνεπώς έχει μόνο έναν βαθμό ελευθερίας. Ο γεωμετρικός τόπος κοινού εσωτερικού προσανατολισμού προκύπτει έτσι από το σύνολο των λύσεων των πολυωνύμων που αντιστοιχούν στις διαφορετικές θέσεις του  $e_2'$ , και έχει και αυτός έναν βαθμό ελευθερίας. Είναι δηλαδή μια 3D καμπύλη (Σχ. 4.13). Σε αντίστοιχο συμπέρασμα έχουν καταλήξει και οι Ronda & Valdés (2007), οι οποίοι εκφράζουν την δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού ως δέσμευση επί της θέσης της εικόνας της απόλυτης κωνικής και επιλύουν τις εξισώσεις Kruppa εκμεταλλευόμενοι ένα θεώρημα προβολικής γεωμετρίας του Poncelet.

#### 4.8.4 Αυτοβαθμονόμηση από περισσότερες εικόνες

Η δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού, συνδυαζόμενη με την αποκατάσταση της 2D επιτολικής γεωμετρίας, αφήνει λοιπόν έναν μόνο βαθμό ελευθερίας στις δυνατές γεωμετρικές λήψεις ενός στερεοζεύγους. Το γεγονός αυτό εξηγεί την δυνατότητα για πλήρη αυτοβαθμονόμηση αποκλειστικά από ομολογίες σημείων σε τρεις (ή περισσότερες) εικόνες προερχόμενες από την ίδια μηχανή λήψης. Κάθε ζεύγος εικόνων ορίζει, δια του επιτολικού πίνακα, γεωμετρικό τόπο στον χώρο των εικόνων, επί του οποίου οφείλει να βρίσκεται το προβολικό της κέντρο (Σχ. 4.13). Στο κοινό σύστημα συντεταγμένων των εικόνων, η τομή των τόπων αυτών αντιπροσωπεύει την λύση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού. Στο Σχ. (4.14, κάτω) εμφανίζονται οι γεωμετρικοί τόποι του εσωτερικού προσανατολισμού που υπολογίστηκαν από προσομοιωμένα δεδομένα και αντιστοιχούν σε δύο ζεύγη εικόνων ( $O_1, O_2$ ) και ( $O_1, O_3$ ) από την ίδια μηχανή (Σχ. 4.14, άνω). Η τομή τους βρίσκεται, πράγματι, σε απόσταση  $c$  από το κοινό πρωτεύον σημείο  $p$  των τριών εικόνων.

Στόχος αυτής της προσέγγισης δεν είναι να διατυπωθεί εναλλακτικός αλγόριθμος αυτοβαθμονόμησης, καθώς στην περίπτωση περισσότερων εικόνων οι εξισώσεις που έχουν αναπτυχθεί εδώ για το στερεοζεύγος καταλήγουν να είναι εξαιρετικά σύνθετες. Εκείνο, αντιθέτως, που επιχειρείται είναι να εξηγηθούν γεωμετρικά με ευκλείδειο τρόπο οι δεσμεύσεις τις οποίες θέτει ο επιτολικός πίνακας στις παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού και οι οποίες, μέχρι στιγμής, στην βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών έχουν ερμηνευθεί είτε αμιγώς αλγεβρικά είτε, στον προβολικό χώρο, ως δεσμεύσεις στην θέση της απόλυτης κωνικής. Δεδομένου ότι είναι δυνατή, η αυτοβαθμονόμηση μπορεί αλγοριθμικά να πραγματοποιηθεί με την μέθοδο της δέσμης, χωρίς καμία *a priori* γεωμετρική πληροφορία (πχ. φωτοσταθερά σημεία) για τον απεικονιζόμενο 3D χώρο.





Σχήμα 4.14. Τομή γεωμετρικών τόπων κοινού εσωτερικού προσανατολισμού (κάτω) για δύο στερεο-ζεύγη προσομοιωμένων δεδομένων (άνω).

# 5

## Επιπολική Γεωμετρία και Εσωτερικός Προσανατολισμός

### 5.1 Γενικά

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μέσω του επιπολικού πίνακα ορίζονται μονοσήμαντα οι πόλοι και οι δέσμες των επιπολικών ευθειών στα επίπεδα των δύο εικόνων. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τα στοιχεία του σχετικού ή του εσωτερικού προσανατολισμού τους: υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί τους συμβατοί με τον επιπολικό πίνακα. Ωστόσο η απειρία αυτή είναι εν μέρει δεσμευμένη. Για να οριστεί η σχετική γεωμετρία δύο εικόνων προερχόμενων από μη βαθμονομημένες μηχανές απλής κεντρικής προβολής απαιτούνται 11 παράμετροι ( $b_y, b_z, \omega, \varphi, \kappa$  και  $x_{01}, y_{01}, c_1, x_{02}, y_{02}, c_2$ ), ενώ ο επιπολικός πίνακας δεσμεύει 7 βαθμούς ελευθερίας. Σε σχέση λοιπόν με τους 5 βαθμούς ελευθερίας του τυπικού σχετικού προσανατολισμού – όπου οι 6 παράμετροι του εσωτερικού προσανατολισμού θεωρούνται γνωστές – οι 2 αυτοί πρόσθετοι δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας του επιπολικού πίνακα μη βαθμονομημένου ζεύγους μπορούν ακριβώς να ερμηνευθούν ως δεσμεύσεις στον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων. Στην πρόσφατη βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών οι εν λόγω 2 δεσμεύσεις έχουν εκφραστεί γεωμετρικά, στο πλαίσιο της προβολικής γεωμετρίας, μέσω των “εξισώσεων Kyrpa” (Maybank & Faugeras, 1992), βάσει των οποίων έχουν διατυπωθεί κλειστοί αλγόριθμοι υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής με δεδομένη θέση του πρωτεύοντος σημείου (βλ. ενότητα 3.4.2). Ακόμα, στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της διατριβής οι υπολειπόμενοι 4 (= 11–7) βαθμοί ελευθερίας ζεύγους εικόνων γνωστής 2D επιπολικής γεωμετρίας εκφράστηκαν συναρτήσει 4 γεωμετρικών παραμέτρων, ανεξάρτητων από τον επιπολικό πίνακα. Η επιλογή τους είναι δηλαδή ελεύθερη και οι συνδυασμοί τους περιγράφουν το σύνολο των δυνατών γεωμετριών λήψης. Εκεί εξετάστηκε, επίσης, το πώς αυτές δεσμεύουν τόσο τον εσωτερικό όσο και τον σχετικό προσανατολισμό των εικόνων. Μελετήθηκαν, τέλος, οι δεσμεύσεις που προκύπτουν από την υπόθεση ότι ορισμένες παράμετροι του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων είναι γνωστές ή απλώς κοινές στις

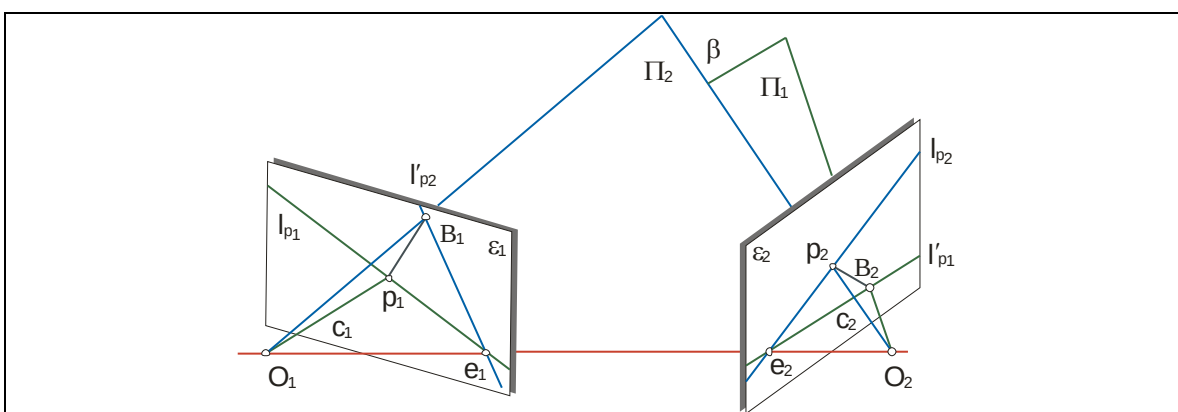
δύο εικόνες. Με κατάκλιση του επιπέδου της μιας εικόνας σε εκείνο της άλλης (περί την ευθεία τομής τους) κατέστη δυνατόν να διατυπωθούν οι αναγκαίες αναλυτικές σχέσεις στις δύο διαστάσεις.

Στο παρόν κεφάλαιο, αντίθετα, οι δεσμεύσεις που ο επιπολικός πίνακας επιβάλλει στον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων διατυπώνονται απευθείας στον 3D ευκλείδειο χώρο. Υπολογίζεται έτσι ανεξάρτητα σε κάθε εικόνα – μέσω της θέσης των πόλων, των προβολικών κέντρων και των επιπολικών ευθειών του πρωτεύοντος σημείου – η διέδρη γωνία που σχηματίζεται από τα επιπολικά επίπεδα των οπτικών αξόνων. Η ισότητα των τιμών της γωνίας αυτής από τις δύο εικόνες εισάγει μια γεωμετρική, και ταυτόχρονα αλγεβρική, δέσμευση στα στοιχεία του εσωτερικού τους προσανατολισμού. Μια δεύτερη ανεξάρτητη δέσμευση προκύπτει, με ανάλογο τρόπο, από την ισότητα των τιμών της διέδρης γωνίας των επιπολικών επιπέδων που αντιστοιχούν σε δύο τυχαίες επιπολικές ευθείες. Βάσει αυτών διατυπώνονται κλειστοί αλγόριθμοι για την μερική βαθμονόμηση των μηχανών λήψης από τον επιπολικό πίνακα. Ειδικότερα, εδώ αντιμετωπίζεται η (συνηθέστερη) περίπτωση εικόνων με γνωστά πρωτεύοντα σημεία και άγνωστες σταθερές μηχανής. Αναπτύσσονται τρεις αλγόριθμοι για τον υπολογισμό της τιμής της σταθεράς της μηχανής όταν αυτή είναι κοινή στις δύο εικόνες και ένας αλγόριθμος για την περίπτωση όπου οι δύο σταθερές της μηχανής διαφέρουν. Τέλος, προτείνεται γεωμετρικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό των παραμέτρων στροφής και μετάθεσης του ζεύγους από τον επιπολικό πίνακα και τον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων.

## 5.2 Γεωμετρικές δεσμεύσεις στον εσωτερικό προσανατολισμό

### 5.2.1 Διέδρη γωνία των επιπολικών επιπέδων των οπτικών αξόνων

Στην γενική περίπτωση της μη συνεπιπεδότητάς τους, οι οπτικοί άξονες των εικόνων ορίζουν με την ευθεία της βάσης δύο επιπολικά επίπεδα, τα  $\Pi_1$  και  $\Pi_2$  (Σχ. 5.1).



Σχήμα 5.1. Επιπολικά επίπεδα των οπτικών αξόνων.

Το  $\Pi_1$  τέμνει τα επίπεδα  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  των εικόνων στις επιπολικές ευθείες  $l_{p1}$  και  $l_{p1}'$ , ενώ το  $\Pi_2$  τα τέμνει αντίστοιχα στις  $l_{p2}'$  και  $l_{p2}$ . Οι ευθείες αυτές είναι οι επιπολικές ευθείες των θέσεων  $p_1, p_2$  του πρωτεύοντος σημείου και μπορούν να υπολογιστούν από τον επιπολικό πίνακα του στερεοζεύγους (Εξ. 3.28). Στο επίπεδο  $\varepsilon_1$  μπορεί επίσης να κατασκευαστεί σημείο  $B_1$

ως τομή της ευθείας  $I_{p2}'$  με ευθεία κάθετη στην  $I_{p1}$  από το σημείο  $p_1$ . Αντίστοιχα, στο  $\varepsilon_2$  ορίζεται σημείο  $B_2$  στην τομή της  $I_{p1}'$  με την κάθετο στην  $I_{p2}$  από το  $p_2$ . Τα ορθογώνια τρίγωνα  $B_1p_1e_1$  και  $B_2p_2e_2$  ορίζουν με τα προβολικά κέντρα  $O_1, O_2$  των εικόνων δύο τρισσορθογώνια τετράεδρα, τα  $O_1B_1p_1e_1$  και  $O_2B_2p_2e_2$ . Οι διέδρες γωνίες περί τις ακμές τους  $O_1e_1$  και  $O_2e_2$  που σχηματίζονται από τις μη κάθετες πλευρές (δηλαδή οι γωνίες που ορίζονται από τα επίπεδα  $O_1e_1p_1, O_1e_1B_1$  και  $O_2e_2p_2, O_2e_2B_2$ , αντίστοιχα) είναι ίσες με την διέδρη γωνία  $\beta$  των επιπέδων  $\Pi_1, \Pi_2$ . Το γεγονός αυτό επιτρέπει να διατυπωθούν δύο σχέσεις υπολογισμού της γωνίας  $\beta$  (μία από κάθε τρισσορθογώνιο τετράεδρο) από τον επιπολικό πίνακα, τα  $p_1, p_2$  και τις τιμές  $c_1, c_2$  της σταθεράς της μηχανής των δύο εικόνων. Η ισότητα των τιμών της  $\beta$  που προκύπτουν από αυτές αντιπροσωπεύει, ουσιαστικά, μια δέσμευση μεταξύ των παραμέτρων εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων και του επιπολικού τους πίνακα.

Αναλυτικά, οι ευθείες  $I_{p1}$  και  $I_{p2}$  προσδιορίζονται από την σύνδεση των  $p_1, p_2$  με τους πόλους  $e_1, e_2$  των εικόνων ως:

$$I_{p1} = e_1 \times p_1 = [e_1]_{\times} p_1 \quad (5.1)$$

και

$$I_{p2} = e_2 \times p_2 = [e_2]_{\times} p_2 \quad (5.2)$$

Ακόμα, οι  $I_{p1}'$  και  $I_{p2}'$  ως επιπολικές ευθείες των  $p_1, p_2$  υπολογίζονται μέσω του επιπολικού πίνακα (Εξ. 3.28) από τις σχέσεις:

$$I'_{p1} = Fp_1 \quad (5.3)$$

και

$$I'_{p2} = F^T p_2 \quad (5.4)$$

Για να υπολογιστεί το σημείο  $B_1$  απαιτείται πρώτα να προσδιοριστεί η κάθετος στην  $I_{p1}$  από το πρωτεύον σημείο  $p_1$ , το οποίο γίνεται όπως στην ενότητα 4.6.2 (Εξ. 4.50):

$$I = [p_1]_{\times} \tilde{I}_{p1} = [p_1]_{\times} \tilde{I}[e_1]_{\times} p_1 \quad (5.5)$$

όπου:

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

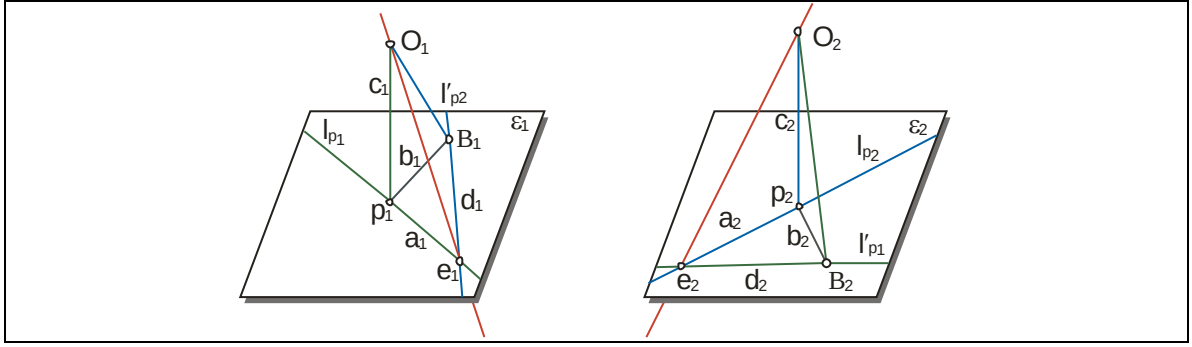
Το  $B_1$  βρίσκεται στην τομή της  $I_{p2}'$  με την  $I$  και άρα υπολογίζεται ως:

$$B_1 = I'_{p2} \times I = [F^T p_2]_{\times} [p_1]_{\times} \tilde{I}[e_1]_{\times} p_1 \quad (5.6)$$

Ομοίως διατυπώνεται η σχέση προσδιορισμού του σημείου  $B_2$  της δεύτερης εικόνας:

$$B_2 = [Fp_1]_{\times} [p_2]_{\times} \tilde{I}[e_2]_{\times} p_2 \quad (5.7)$$

Από τα σημεία  $B_1, B_2$ , τις θέσεις  $p_1, p_2$  του πρωτεύοντος σημείου και τους πόλους  $e_1, e_2$  ορίζονται οι αποστάσεις  $a_1 = |p_1e_1|$ ,  $b_1 = |p_1B_1|$  και  $d_1 = |B_1e_1|$  στο επίπεδο  $\varepsilon_1$  (Σχ. 5.2, αριστερά), καθώς και οι  $a_2 = |p_2e_2|$ ,  $b_2 = |p_2B_2|$  και  $d_2 = |B_2e_2|$  στο  $\varepsilon_2$  (Σχ. 5.2, δεξιά).



Σχήμα 5.2. Υπολογισμός της διέδρης γωνίας των επιπολικών επιπέδων των οπτικών αξόνων.

Οι 3D ομογενείς συντεταγμένες των κορυφών του τρισσορθογώνιου τετραέδρου  $O_1B_1p_1e_1$  απλοποιούνται εάν επιλεγεί στην πρώτη εικόνα (Σχ. 5.2, αριστερά) τρισσορθογώνιο σύστημα με αφητηρία το  $p_1$  και άξονες τις ευθείες  $p_1e_1$ ,  $p_1B_1$  και  $p_1O_1$ . Τότε ισχύει ότι  $p_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ ,  $B_1 = [0 \ b_1 \ 0 \ 1]^T$ ,  $e_1 = [a_1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  και  $O_1 = [0 \ 0 \ c_1 \ 1]^T$ . Μέσω αυτών προσδιορίζονται οι ομογενείς αναπαραστάσεις των επιπέδων  $\Pi_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  και  $\Pi_2 = [c_1b_1 \ a_1c_1 \ a_1b_1 \ -a_1c_1b_1]^T$  (βλ. ενότητα 2.4.3.2), και από εκείνες το συνημίτονο της διέδρης γωνίας τους  $\beta$ :

$$\cos(\beta) = \frac{a_1c_1}{\sqrt{a_1^2b_1^2 + c_1^2(a_1^2 + b_1^2)}} = \frac{a_1c_1}{\sqrt{a_1^2b_1^2 + c_1^2d_1^2}} \quad (5.8)$$

Τα επίπεδα  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  μπορούν να εκφραστούν και μέσω των αντίστοιχων σημείων της δεύτερης εικόνας (Σχ. 5.2, δεξιά). Προκύπτει με αυτόν τον τρόπο η εξής σχέση για την γωνία  $\beta$ :

$$\cos(\beta) = \frac{a_2c_2}{\sqrt{a_2^2b_2^2 + c_2^2(a_2^2 + b_2^2)}} = \frac{a_2c_2}{\sqrt{a_2^2b_2^2 + c_2^2d_2^2}} \quad (5.9)$$

Όμως οι δύο τιμές των Εξ. (5.8) και (5.9) οφείλουν να είναι ίσες, δηλαδή:

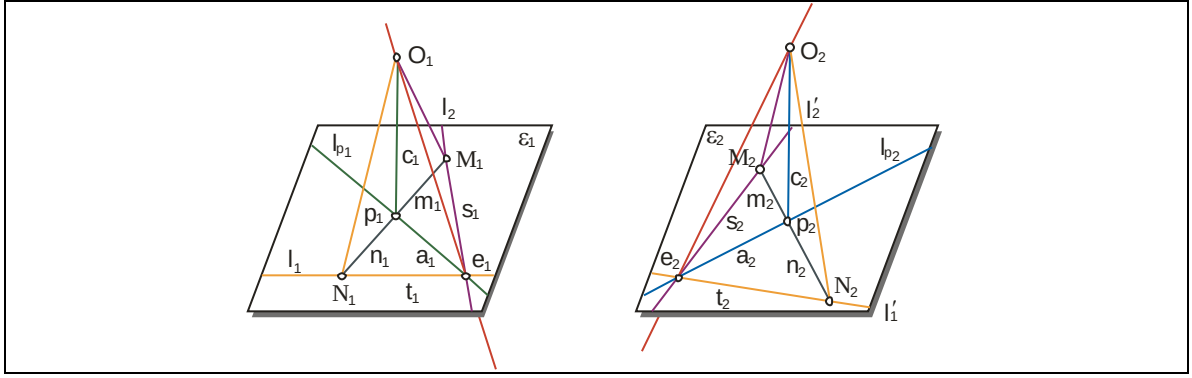
$$\frac{a_1c_1}{\sqrt{a_1^2b_1^2 + c_1^2d_1^2}} = \frac{a_2c_2}{\sqrt{a_2^2b_2^2 + c_2^2d_2^2}} \quad (5.10)$$

Η Εξ. (5.10) εκφράζει την ισότητα δύο διέδρων γωνιών στον ευκλείδειο 3D χώρο, συνδέοντας γεωμετρικά όσο και αλγεβρικά τις παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων στερεοζεύγους με τα στοιχεία του επιπολικού του πίνακα. Η απαίτηση να ικανοποιείται η Εξ. (5.10) μειώνει κατά έναν τους 6 βαθμούς ελευθερίας του εσωτερικού προσανατολισμού των δύο εικόνων.

### 5.2.2 Διέδρη γωνία τυχαίων επιπολικών επιπέδων

Μία δεύτερη ανεξάρτητη δέσμευση διατυπώνεται εάν, αντί της διέδρης γωνίας των επιπολικών επιπέδων των οπτικών αξόνων, υπολογιστεί η γωνία δύο άλλων επιπολικών επιπέδων, πχ. εκείνων που αντιστοιχούν σε δύο τυχαίες επιπολικές ευθείες  $l_1$  και  $l_2$  (Σχ. 5.3). Για να προσδιοριστούν τα επιπολικά επίπεδα  $\Pi_M$ ,  $\Pi_N$  από την πρώτη εικόνα, κατασκευάζονται δύο σημεία του  $\varepsilon_1$ , τα  $M_1$ ,  $N_1$ , στις τομές των ευθειών  $l_1$ ,  $l_2$ , αντίστοιχα, με την κάθετο από το πρωτεύον σημείο  $p_1$  στην ευθεία  $l_{p1}$ . Ομοίως, για να προσδιοριστούν από την δεύτερη εικόνα ορίζονται τα σημεία  $M_2$ ,  $N_2$  του  $\varepsilon_2$  ως τομές των ευθειών  $l'_1$ ,  $l'_2$ , αντίστοιχα, με την κάθετο από το  $p_2$  στην ευθεία  $l_{p2}$ . Σχηματίζονται με αυτόν τον τρόπο δύο τετράεδρα, τα  $O_1N_1M_1e_1$  και  $O_2N_2M_2e_2$ , των οποίων οι διέδρες γωνίες περί τις αντίστοιχες ακμές τους  $O_1e_1$





Σχήμα 5.4. Υπολογισμός της διέδρης γωνίας δύο επιπολικών επιπέδων.

Μέσω των ομογενών αναπαραστάσεων των  $\Pi_M$  και  $\Pi_N$  είναι δυνατός ο υπολογισμός της διέδρης γωνίας τους  $\gamma$ , για την οποία ισχύει:

$$\cos(\gamma) = \frac{c_1^2(a_1^2 + m_1 n_1) + a_1^2 m_1 n_1}{\sqrt{c_1^4 s_1^2 t_1^2 + c_1^2 a_1^2 (m_1^2 t_1^2 + n_1^2 s_1^2) + a_1^4 m_1^2 n_1^2}} \quad (5.15)$$

Μία δεύτερη σχέση για την γωνία  $\gamma$  προκύπτει εάν προσδιοριστούν τα επίπεδα  $\Pi_M$  και  $\Pi_N$  μέσω των αντίστοιχων σημείων της δεύτερης εικόνας (Σχ. 5.4, δεξιά):

$$\cos(\gamma) = \frac{c_2^2(a_2^2 + m_2 n_2) + a_2^2 m_2 n_2}{\sqrt{c_2^4 s_2^2 t_2^2 + c_2^2 a_2^2 (m_2^2 t_2^2 + n_2^2 s_2^2) + a_2^4 m_2^2 n_2^2}} \quad (5.16)$$

Η ισότητα των τιμών από τις Εξ. (5.15) και (5.16) προσφέρει έτσι μια δεύτερη δέσμευση, πέραν εκείνης της Εξ. (5.10), μεταξύ των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων και του επιπολικού τους πίνακα:

$$\frac{c_1^2(a_1^2 + m_1 n_1) + a_1^2 m_1 n_1}{\sqrt{c_1^4 s_1^2 t_1^2 + c_1^2 a_1^2 (m_1^2 t_1^2 + n_1^2 s_1^2) + a_1^4 m_1^2 n_1^2}} = \frac{c_2^2(a_2^2 + m_2 n_2) + a_2^2 m_2 n_2}{\sqrt{c_2^4 s_2^2 t_2^2 + c_2^2 a_2^2 (m_2^2 t_2^2 + n_2^2 s_2^2) + a_2^4 m_2^2 n_2^2}} \quad (5.17)$$

Εναλλακτικά, αντί να επιλεγούν αρχικά δύο τυχαίες επιπολικές ευθείες  $l_1, l_2$  και στην συνέχεια να προσδιοριστούν τα σημεία  $M_1, N_1$  μέσω των Εξ. (5.11) και (5.13) είναι δυνατή η επιλογή των σημείων  $M_1 = [x_0 + y_0 - y_1 - x_0 + x_1 + y_0 \ 1]^T$  και  $N_1 = [x_0 - y_0 + y_1 \ x_0 - x_1 + y_0 \ 1]^T$ . Αυτά ανήκουν εξ ορισμού στην κάθετο από το  $p_1$  στην ευθεία  $l_{p1}$  και επιπλέον οι προσημασμένες αποστάσεις τους από το πρωτεύον σημείο είναι  $m_1 = a_1$  και  $n_1 = -a_1$ . Χάρη στην ιδιότητά τους αυτή, η Εξ. (5.15) απλοποιείται ως εξής:

$$\cos(\gamma) = \frac{-a_1^2}{2c_1^2 + a_1^2} \quad (5.18)$$

Στην περίπτωση αυτή, έτσι, η ισότητα της γωνίας  $\gamma$  επιτρέπει να διατυπωθεί η δέσμευση:

$$\frac{-a_1^2}{2c_1^2 + a_1^2} = \frac{c_2^2(a_2^2 + m_2 n_2) + a_2^2 m_2 n_2}{\sqrt{c_2^4 s_2^2 t_2^2 + c_2^2 a_2^2 (m_2^2 t_2^2 + n_2^2 s_2^2) + a_2^4 m_2^2 n_2^2}} \quad (5.19)$$

Οι αποστάσεις που αναφέρονται στην δεύτερη εικόνα είναι προσημασμένες και υπολογίζονται αφού πρώτα προσδιοριστούν οι επιπολικές ευθείες  $l_1', l_2'$  των σημείων  $M_1, N_1$  μέσω του επιπολικού πίνακα (Εξ. 3.28) και τα σημεία  $M_2, N_2$  μέσω των Εξ. (5.13) και (5.14).

Εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε να υποτεθεί ότι κάθε επιπλέον ζεύγος ομόλογων επιπολικών ευθειών συνεισφέρει μια νέα αλγεβρική δέσμευση αντίστοιχη της Εξ. (5.17). Ωστόσο οι δεσμεύσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες. Κάθε επιλογή παραμέτρων εσωτερικού προσανατολισμού ορίζει ανεξάρτητα σε κάθε εικόνα μια αξονική δέσμη επιπολικών επιπέδων. Τα επιπολικά επίπεδα ορίζονται μέσω των δύο επιπέδων δεσμών ευθειών (των ομόλογων επιπολικών ευθειών) που βρίσκονται σε προβολική αντιστοιχία. Κατά συνέπεια, οι δύο αξονικές δέσμες επιπέδων συνδέονται επίσης προβολικά, και επομένως διατηρούν τον διπλό λόγο. Ως εκ τούτου, εάν εξασφαλιστεί η ισότητα των διέδρων γωνιών τριών ομόλογων επιπολικών επιπέδων η ισότητα αυτή θα ισχύει για κάθε νέα ομολογία. Επομένως, μια μόνο δέσμευση (Εξ. 5.17 ή 5.19) είναι ανεξάρτητη εκείνης της Εξ. (5.10). Εναλλακτικά, βέβαια, ως ανεξάρτητες θα μπορούσαν να θεωρηθούν δύο εξισώσεις της μορφής της Εξ. (5.17) προερχόμενες από 3 ομολογίες επιπολικών ευθειών, οπότε όμως δεν διατηρείται πλέον η ανεξαρτησία της δέσμευσης της Εξ. (5.10).

### 5.2.3 Περίπτωση συνεπίπεδων οπτικών αξόνων

Σε περίπτωση όπου οι οπτικοί άξονες των εικόνων είναι συνεπίπεδοι, οι ευθείες  $l_{p1}$ ,  $l_{p2}$  είναι ομόλογες επιπολικές, ενώ δεν ισχύει η δέσμευση της Εξ. (5.10) καθώς τα επιπολικά επίπεδα των οπτικών αξόνων των εικόνων ταυτίζονται και δεν ορίζεται μεταξύ τους γωνία. Επίσης, μέσω της Εξ. (5.17) ή της (5.19) επιτυγχάνεται όχι μόνο η ισότητα των δύο τιμών της γωνίας  $\gamma$  των επιπέδων  $\Pi_M$  και  $\Pi_N$  που προκύπτουν από τις δύο εικόνες αλλά και των τιμών των γωνιών που αυτά σχηματίζονται με το, κοινό πλέον, επιπολικό επίπεδο των οπτικών αξόνων. Ισχύει, έτσι, η ισότητα των διέδρων γωνιών περί τις ακμές  $O_1e_1$  και  $O_2e_2$  των τρισσορθογώνιων τετραέδρων  $O_1p_1M_1e_1$  και  $O_2p_2M_2e_2$  (Σχ. 5.3) που είναι ίσες με την διέδρη γωνία του επιπολικού επιπέδου των οπτικών αξόνων και του  $\Pi_M$ . Μέσω της ισότητας αυτής διατυπώνεται, με τρόπο όμοιο με εκείνον της ενότητας 5.2.1, η ακόλουθη δέσμευση, η οποία είναι απλούστερη αλγεβρικά από εκείνη της Εξ. (5.17):

$$\frac{a_1c_1}{\sqrt{a_1^2m_1^2 + c_1^2s_1^2}} = \frac{a_2c_2}{\sqrt{a_2^2m_2^2 + c_2^2s_2^2}} \quad (5.20)$$

### 5.3 Μερική βαθμονόμηση μηχανής

Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, στην γενική περίπτωση μη συνεπίπεδων οπτικών αξόνων μπορούν να διατυπωθούν δύο ανεξάρτητες δεσμεύσεις μεταξύ του επιπολικού πίνακα και των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την πρόσφατη βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών (ενότητες 1.2.3 και 3.4), όπου οι δεσμεύσεις αυτές εκφράζονται γεωμετρικά στον προβολικό χώρο μέσω των εξισώσεων Kruppa (Maybank & Faugeras, 1992). Εδώ οι δύο ανεξάρτητες δεσμεύσεις διατυπώθηκαν εκ νέου γεωμετρικά, αλλά στον 3D Ευκλείδειο χώρο, μέσω των Εξ. (5.10) και (5.17) ή (5.19). Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν έμμεσα τις τιμές της σταθεράς της μηχανής με τις θέσεις του πρωτεύοντος σημείου, των πόλων και σημείων που προκύπτουν μέσω του επιπολικού πίνακα.



Για πλήρη αυτοβαθμονόμηση μιας μηχανής λήψης απαιτούνται τουλάχιστον τρεις εικόνες. Οι παράμετροι του κοινού εσωτερικού προσανατολισμού των λήψεων μπορούν να υπολογιστούν από την ταυτόχρονη επίλυση των δεσμεύσεων που προκύπτουν από τον επιπολικό πίνακα κάθε ζεύγους, αφού εκφραστούν οι αποστάσεις που περιλαμβάνονται στις Εξ. (5.10) και (5.19) ως συναρτήσεις της θέσης του πρωτεύοντος σημείου. Στην περίπτωση όμως του στερεοζεύγους δυνατή είναι μόνο η μερική βαθμονόμηση της μηχανής (ή των δύο μηχανών) λήψης. Οι Εξ. (5.10) και (5.19) μπορούν να επιλυθούν για οποιεσδήποτε 2 από τις 6 παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων ( $x_{01}, y_{01}, c_1, x_{02}, y_{02}, c_2$ ) εφόσον είναι γνωστές οι υπόλοιπες 4. Από τις πιθανές επιλύσεις μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής με γνωστή θέση πρωτεύοντος σημείου, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις η τελευταία μπορεί χωρίς μεγάλο σφάλμα να θεωρηθεί κατ' αρχάς ότι συμπίπτει με το κέντρο των εικόνων. Μάλιστα με το ζήτημα αυτό έχουν ασχοληθεί τελευταία αρκετοί ερευνητές στο πεδίο της Όρασης Υπολογιστών (Hartley, 1992, Newsam et al., 1996, Bougnoux, 1998, Sturm, 2001), οι οποίοι έχουν αντιμετωπίσει τις εκδοχές διαφορετικής όσο και κοινής σταθεράς των δύο μηχανών, παρουσιάζοντας αλγόριθμους που δεν απαιτούν αρχικές τιμές (βλ. ενότητα 3.4.2). Στην περίπτωση αυτή, η γνώση της θέσης του πρωτεύοντος σημείου επιτρέπει να υπολογίζονται όλες οι αποστάσεις που συμμετέχουν στις Εξ. (5.10) και (5.19), οι οποίες υψούμενες στο τετράγωνο προσφέρουν δύο σχέσεις, μια γραμμική και μια δευτέρου βαθμού, ως προς τα τετράγωνα των τιμών της σταθεράς της μηχανής ( $c_1^2, c_2^2$ ). Στην συνέχεια διατυπώνονται εναλλακτικοί αλγόριθμοι μερικής αυτοβαθμονόμησης βασιζόμενοι στην επίλυση των σχέσεων αυτών.

### 5.3.1 Εικόνες με διαφορετική σταθερά της μηχανής

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση εικόνων με διαφορετικές σταθερές μηχανής. Από τις γνωστές θέσεις των πρωτευόντων σημείων και τον επιπολικό πίνακα του στερεοζεύγους υπολογίζονται όλες οι αναγκαίες αποστάσεις που περιγράφονται στις ενότητες 5.2.1 και 5.2.2, με συνέπεια οι Εξ. (5.10) και (5.19) να περιλαμβάνουν ως άγνωστες παραμέτρους αποκλειστικά τις τιμές  $c_1, c_2$  της σταθεράς των μηχανών. Για τον υπολογισμό τους από τις δύο εξισώσεις είναι αρχικά δυνατή η επίλυση του τετραγώνου της Εξ. (5.10) ως προς το τετράγωνο  $c_1^2$  της σταθεράς της μηχανής της πρώτης εικόνας:

$$c_1^2 = \frac{a_1^2 a_2^2 b_1^2 c_2^2}{(a_1^2 d_2^2 - a_2^2 d_1^2) c_2^2 + a_1^2 a_2^2 b_2^2} \quad (5.21)$$

Αντικατάσταση της τιμής  $c_1^2$  από την Εξ. (5.21) στο τετράγωνο της Εξ. (5.19) οδηγεί στο ακόλουθο πολυώνυμο 3<sup>ου</sup> βαθμού ως προς το τετράγωνο  $c_2^2 (= w_2)$  της σταθεράς της μηχανής της δεύτερης εικόνας:

$$h_1 w_2^3 + h_1 w_2^2 + h_3 w_2 + h_4 = 0 \quad (5.22)$$

όπου<sup>1</sup>:

$$h_1 = a_1^4 \left[ (a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2)^2 (a_2^2 + m_2 n_2)^2 - (a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2)^2 (a_2^2 + m_2^2)(a_2^2 + n_2^2) \right]$$

<sup>1</sup> Οι όροι  $m_2, n_2$  αναφέρονται σε αποστάσεις προσημασμένες ανάλογα με την σχετική θέση των σημείων  $M_2, N_2$  ως προς την θέση  $p_2$  του πρωτεύοντος σημείου.

$$\begin{aligned}
h_2 &= a_1^4 a_2^4 \left[ 4a_1^2 b_1^2 b_2^2 \left[ a_2^4 + 3m_2^2 n_2^2 + a_2^2 (m_2 + n_2)^2 \right] - (a_2^4 b_1^4 + 3a_1^4 b_2^4) (m_2 - n_2)^2 \right] \\
h_3 &= a_1^6 a_2^6 b_2^2 \left[ 2a_2^2 b_1^2 (m_2 + n_2)^2 - 3 \left[ a_1^2 b_2^2 (m_2 - n_2)^2 - 4b_1^2 m_2^2 n_2^2 \right] \right] \\
h_4 &= -a_1^6 a_2^8 b_2^2 \left[ a_1^2 b_2^2 (m_2 - n_2)^2 - 4b_1^2 m_2^2 n_2^2 \right]
\end{aligned}$$

Από τους συντελεστές του πολυωνύμου της Εξ. (5.22), υπολογίζονται αναλυτικά οι 3 ακόλουθες λύσεις του:

$$\begin{aligned}
w_2 &= -a_2^2 \\
w_2 &= \frac{a_1 a_2^2 b_2 [a_1 b_2 (n_2 - m_2) - 2b_1 m_2 n_2]}{(a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2)(m_2 - n_2) + 2a_1 b_1 b_2 (a_2^2 + m_2 n_2)} \\
w_2 &= \frac{a_1 a_2^2 b_2 [a_1 b_2 (n_2 - m_2) + 2b_1 m_2 n_2]}{(a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2)(m_2 - n_2) - 2a_1 b_1 b_2 (a_2^2 + m_2 n_2)}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Οι λύσεις αυτές αποτελούν στην πραγματικότητα τιμές που ικανοποιούν ταυτόχρονα τα τετράγωνα των Εξ. (5.10) και (5.19). Για να αναφέρονται όμως σε πραγματικές τιμές  $c_2^2$  σταθεράς της μηχανής οφείλουν να είναι θετικές. Απορρίπτεται άρα η πρώτη λύση που είναι αρνητική, ενώ από τις άλλες δύο δεκτή είναι μόνο εκείνη που είναι θετική ενώ ταυτόχρονα ικανοποιεί, εκτός από τα τετράγωνα τους, και τις ίδιες τις Εξ. (5.10) και (5.19). Η σταθερά  $c_2$  της μηχανής υπολογίζεται άμεσα από την τετραγωνική ρίζα της τιμής  $w_2$  και από αυτήν υπολογίζεται κατόπιν, μέσω της Εξ. (5.21), η σταθερά  $c_1$  της μηχανής της πρώτης εικόνας.

Όπως προαναφέρθηκε (βλ. ενότητα 5.2.3), η Εξ. (5.10) δεν ισχύει για συνεπίπεδους οπτικούς άξονες, περίπτωση κατά την οποία είναι δυνατή η διατύπωση μιας μόνο ανεξάρτητης δέσμευσης μεταξύ του επιπολικού πίνακα και των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων. Η συνεπιπεδότητα των οπτικών αξόνων αντιπροσωπεύει, έτσι, κρίσιμη γεωμετρία για τον υπολογισμό δύο διαφορετικών τιμών σταθεράς μηχανής, ιδιότητα την οποία διαπίστωσαν πρώτοι οι Newsam et al. (1996).

### 5.3.2 Εικόνες με κοινή σταθερά μηχανής

Σε περίπτωση όπου είναι γνωστό πως οι δύο εικόνες έχουν κοινή σταθερά μηχανής, ο υπολογισμός της τιμής της είναι δυνατός, ακόμα και για συνεπίπεδους οπτικούς άξονες, με επίλυση είτε της Εξ. (5.19) είτε μιας από τις Εξ. (5.20) ή (5.10)<sup>2</sup>. Διατυπώνονται κατ' αυτόν τον τρόπο 3 διαφορετικές εξισώσεις, μια 3<sup>ου</sup> βαθμού και δύο γραμμικές, ως προς το τετράγωνο της κοινής σταθεράς της μηχανής. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι βαθμοί των εξισώσεων που προτείνονται εδώ είναι ίδιοι με εκείνους των αντίστοιχων σχέσεων (Εξ. 3.70) που έχουν διατυπώσει οι Sturm (2001) και Sturm et al. (2004) βασιζόμενοι στην επίλυση των εξισώσεων Kruppa μέσω της ανάλυσης ιδιοζουσών τιμών (SVD).

#### 5.3.2.1 Γενική περίπτωση

Αναλυτικότερα, εάν είναι γνωστό ότι  $c_1 = c_2 = c$ , τότε από το τετράγωνο της Εξ. (5.19) προ-

<sup>2</sup> Η Εξ. (5.19) αντιμετωπίζει το πρόβλημα γενικά. Αντίθετα, η επίλυση της Εξ. (5.20) ως προς την κοινή σταθερά μηχανής των εικόνων είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση όπου έχει διαπιστωθεί πως οι οπτικοί τους άξονες είναι συνεπίπεδοι, ενώ η επίλυση της Εξ. (5.10) στην περίπτωση μη συνεπιπεδότητας των αξόνων.

κύπτει η εξής εξίσωση ως προς το τετράγωνο  $c^2 (= w)$  της κοινής σταθεράς της μηχανής:

$$w(h_1 w^3 + h_1 w^2 + h_3 w + h_4) = 0 \quad (5.24)$$

όπου:

$$\begin{aligned} h_1 &= 4(a_2^2 + m_2 n_2)^2 \\ h_2 &= 4(a_2^2 + m_2 n_2)[2a_2^2 m_2 n_2 + a_1^2(a_2^2 + m_2 n_2)] \\ h_3 &= a_2^2[-a_1^2(m_2 - n_2)^2 + 4a_2^2 m_2^2 n_2^2 + 8a_1^2 m_2 n_2(a_2^2 + m_2 n_2)] \\ h_4 &= -a_1^2 a_2^4[a_1^2(m_2 - n_2)^2 - 4m_2^2 n_2^2] \end{aligned}$$

Πέραν της προφανούς και μη αποδεκτής λύσης  $w = 0$ , η Εξ. (5.24) έχει το πολύ τρεις διαφορετικές λύσεις, οι οποίες υπολογίζονται αναλυτικά από τους συντελεστές  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  και  $h_4$  του πολυωνύμου 3<sup>ου</sup> βαθμού. Από αυτές δεκτές είναι μόνο οι θετικές πραγματικές και η κοινή σταθερά  $c$  της μηχανής υπολογίζεται από την τετραγωνική τους ρίζα. Η Εξ. (5.19) ισχύει ακόμα και όταν οι οπτικοί άξονες των εικόνων είναι συνεπίπεδοι.

### 5.3.2.2 Μη συνεπίπεδοι οπτικοί άξονες

Για γνωστή θέση του πρωτεύοντος σημείου των εικόνων μπορεί, μέσω του επιπολικού πίνακα, να διαπιστωθεί εάν οι οπτικοί τους άξονες είναι συνεπίπεδοι ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση οι ευθείες  $l_{p1}$  και  $l_{p2}$  που συνδέουν το πρωτεύον σημείο με τους πόλους είναι ομόλογες επιπολικές ευθείες. Κατά συνέπεια οι δύο θέσεις  $p_1$ ,  $p_2$  του πρωτεύοντος σημείου οφείλουν να ικανοποιούν την συνθήκη επιπολικότητας (Εξ. 3.29):

$$p_2^T F p_1 = 0 \quad (5.25)$$

Στην περίπτωση, λοιπόν, όπου από την Εξ. (5.25) διαπιστώνεται ότι οι οπτικοί άξονες των εικόνων δεν είναι συνεπίπεδοι, η Εξ. (5.10) μπορεί, αφού πρώτα υψωθεί στο τετράγωνο, να επιλυθεί ως προς την κοινή τιμή  $c = c_1 = c_2$  της σταθεράς της μηχανής. Προκύπτει έτσι η ακόλουθη σχέση άμεσου υπολογισμού της:

$$c = a_1 a_2 \sqrt{\frac{b_1^2 - b_2^2}{a_1^2 d_2^2 - a_2^2 d_1^2}} \quad (5.26)$$

### 5.3.2.3 Συνεπίπεδοι οπτικοί άξονες

Στην αντίθετη περίπτωση – όταν δηλαδή οι οπτικοί άξονες των εικόνων διαπιστώνεται ότι είναι όντως συνεπίπεδοι – μπορεί αντί της Εξ. (5.10), η οποία πλέον δεν ορίζεται, να επιλυθεί η Εξ. (5.20) ως προς την κοινή τιμή  $c$  της σταθεράς της μηχανής. Προκύπτει έτσι η λύση:

$$c = a_1 a_2 \sqrt{\frac{m_1^2 - m_2^2}{a_1^2 s_2^2 - a_2^2 s_1^2}} \quad (5.27)$$

Πρέπει να σημειωθεί βέβαια ότι, όπως έχουν επισημάνει οι Sturm (2001) και Sturm et al. (2004), ο υπολογισμός της σταθεράς της μηχανής δεν είναι δυνατός σε περιπτώσεις όπου τα προβολικά κέντρα των εικόνων ισαπέχουν από το σημείο τομής των οπτικών αξόνων ή οι οπτικοί άξονες είναι παράλληλοι.

### 5.3.3 Βελτιστοποίηση του υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής

Βασικό πλεονέκτημα των αλγορίθμων που διατυπώθηκαν στις ενότητες 5.3.1 και 5.3.2 – όπως και των αντίστοιχων από το επιστημονικό πεδίο της Όρασης Υπολογιστών (βλ. ενότητα 3.4.2) – είναι το γεγονός ότι δεν απαιτούν αρχικές τιμές. Η σταθερά της μηχανής υπολογίζεται σε δύο βήματα. Αρχικά υπολογίζεται από ομολογίες σημείων ο επιπολικός πίνακας του στερεοζεύγους (μέσω των αλγορίθμων που περιγράφηκαν στην ενότητα 3.2.4), ενώ σε επόμενο διακριτό βήμα υπολογίζεται, βάσει και της γνωστής θέσης του πρωτεύοντος σημείου, η σταθερά της μηχανής. Όπως όμως έχει επισημάνει η σχετική βιβλιογραφία (Hartley & Silpa-Anan, 2002, Hartley & Kaucic, 2002, Kalisperakis et al., 2005), οι κλειστοί αλγόριθμοι είναι ιδιαιτέρως ευαίσθητοι αφενός στην επίδραση τυχαίων σφαλμάτων (θόρυβος) στις μετρήσεις των εικονοσημείων, οι οποίες επηρεάζουν την εκτίμηση της θέσης των πόλων, και αφετέρου στην υπόθεση σχετικά με την συγκεκριμένη θέση του πρωτεύοντος σημείου. Η επίδραση των σφαλμάτων είναι δε εντονότερη όταν οι διατάξεις λήψεως των εικόνων πλησιάζουν τις κρίσιμες γεωμετρίες που αναφέρθηκαν στα προηγθέντα.

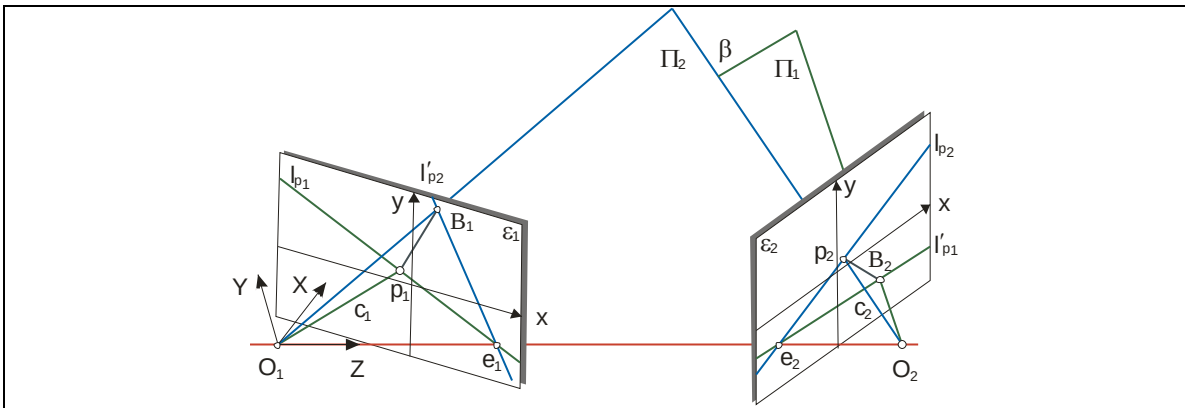
Ένα περαιτέρω πρόβλημα εντοπίζεται στον υπολογισμό κοινής σταθεράς της μηχανής. Η εν λόγω δέσμευση δεν είναι πάντοτε συμβατή με την 2D επιπολική γεωμετρία. Ένα στερεοζεύγος εικόνων απλής κεντρικής προβολής του οποίου έχει υπολογιστεί ο επιπολικός πίνακας έχει στην γενική περίπτωση 4 βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι καλύπτονται εφόσον οριστούν οι θέσεις των πρωτευόντων σημείων. Όμως ακόμα και εάν οι εικόνες πράγματι προέρχονται από την ίδια μηχανή λήψης, ο υπολογισμένος επιπολικός πίνακας δεν αναμένεται να πληροί αυστηρά την δέσμευση κοινής σταθεράς της μηχανής εξαιτίας τυχαίων σφαλμάτων στις μετρήσεις. Έτσι, οι τιμές που υπολογίζονται από τις Εξ. (5.24) και (5.26) ή (5.27) ενδέχεται να διαφέρουν ή, πράγμα ισοδύναμο, εάν χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος της ενότητας 5.3.1 θα προκύψουν διαφορετικές τιμές  $c_1$ ,  $c_2$  σταθεράς της μηχανής. Τίθεται επομένως το ζήτημα προσδιορισμού της βέλτιστης τιμής.

Για βέλτιστη λοιπόν εκτίμηση της σταθεράς της μηχανής (μεταβλητής ή κοινής) ενδείκνυται, μετά από την εφαρμογή των κλειστών αλγορίθμων, η επίλυση της γεωμετρίας του στερεοζεύγους με την μέθοδο της δέσμης (Sturm et al., 2004, Kalisperakis et al., 2005). Μέσω αυτής επιτυγχάνεται σε ένα βήμα η εκτίμηση τόσο της σταθεράς της μηχανής όσο και της σχετικής θέσης των εικόνων στον χώρο, συνεπώς και της θέσης των δύο πόλων. Αυτή η προσέγγιση είναι βέβαια μη γραμμική, όμως οι αναγκαίες αρχικές τιμές είναι διαθέσιμες από τους κλειστούς αλγορίθμους. Τα αποτελέσματά της είναι υψηλότερης ακρίβειας, αφού η 2D επιπολική γεωμετρία του στερεοζεύγους δεν προσδιορίζεται ανεξάρτητα από την 3D γεωμετρία και τον εσωτερικό προσανατολισμό των δύο εικόνων αλλά αναζητείται εκείνος ο συνδυασμός τους που προσαρμόζεται βέλτιστα στις παρατηρηθείσες εικονοσυντεταγμένες των ομόλογων σημείων. Στο 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της διατριβής εξετάζεται πειραματικά τόσο η συμπεριφορά των γραμμικών αλγορίθμων μερικής βαθμονόμησης όσο και η βελτίωση που επιτυγχάνεται με την μη γραμμική συνόρθωση των εξισώσεων συγγραμμικότητας (μέθοδος της δέσμης).

## 5.4 Υπολογισμός παραμέτρων σχετικού προσανατολισμού

Για εικόνες από βαθμονομημένες μηχανές ή εικόνες των οποίων η σταθερά μηχανής έχει υπολογιστεί με τους προαναφερθέντες αλγόριθμους μερικής βαθμονόμησης είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι τυπικές φωτογραμμετρικές παράμετροι του σχετικού προσανατολισμού (διεύθυνση της βάσης του ζεύγους και σχετικές στροφές των δύο εικόνων). Υπολογισμός τους μπορεί να γίνει είτε με μη γραμμική συνόρθωση με την συνθήκη συνεπιπεδότητας (ενότητα 3.1.2) είτε γραμμικά, αφού προσδιοριστεί πρώτα ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας του στερεοζεύγους (ενότητα 3.1.3.3). Υπάρχουν βέβαια 4 διαφορετικές δυνατές λύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε αντιμετάθεση των δύο εικόνων και στροφή της δεύτερης κατά  $\pi$  περί την βάση του στερεοζεύγους, όμως η πολλαπλότητα αυτή αντιμετωπίζεται με επιλογή της γεωμετρίας εκείνης που επιτρέπει την ανακατασκευή των απεικονιζόμενων αντικειμένων μπροστά από τις δύο μηχανές λήψης. Στην παρούσα ενότητα διατυπώνεται εναλλακτικός γεωμετρικός αλγόριθμος για υπολογισμό των 4 λύσεων του σχετικού προσανατολισμού από τον επιπολικό πίνακα και τις παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων.

Η θέση του πρωτεύοντος σημείου ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ) και η σταθερά της μηχανής ( $c_1, c_2$ ) ορίζουν, στο σύστημα κάθε εικόνας, τις θέσεις των προβολικών τους κέντρων. Στην συνέχεια θα δειχθεί πως μέσω αυτών, των πόλων και των σημείων  $B_1, B_2$  καθώς και των μεταξύ τους αποστάσεων, όπως ορίστηκαν στην ενότητα 5.2.1, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των προβολικών κέντρων και οι στροφές στον χώρο των δύο εικόνων σε κατάλληλα επιλεγμένο τρισσορθόγωνιο σύστημα. Από αυτές υπολογίζονται κατόπιν οι παράμετροι του σχετικού τους προσανατολισμού.



Σχήμα 5.5. Γεωμετρικός υπολογισμός των παραμέτρων σχετικού προσανατολισμού

Έστω  $\mathbf{p}_1 = [x_{0_1} \ y_{0_1} \ 1]^T$ ,  $\mathbf{p}_2 = [x_{0_2} \ y_{0_2} \ 1]^T$  το πρωτεύον σημείο κάθε εικόνας και  $\mathbf{e}_1 = [x_1 \ y_1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = [x_2 \ y_2 \ 1]^T$  οι δύο πόλοι. Έστω επίσης τρισσορθόγωνιο σύστημα συντεταγμένων με αφετηρία το προβολικό κέντρο της πρώτης εικόνας, επίπεδο XZ το επιπολικό επίπεδο του οπτικού της άξονα ( $\Pi_1$ ) και άξονα Z την βάση του στερεοζεύγους (Σχ. 5.5). Εξ ορισμού λοιπόν το προβολικό κέντρο της πρώτης εικόνας έχει συντεταγμένες:

$$X_{0_1} = 0, \ Y_{0_1} = 0, \ Z_{0_1} = 0 \quad (5.28)$$

Παράλληλα, το γωνιακό μέρος του εξωτερικού της προσανατολισμού περιγράφεται με 2 στροφές στο νέο 3D σύστημα συντεταγμένων: μια κατά γωνία  $\kappa_1$  περί τον άξονα Z τέτοια

ώστε η επιπολική ευθεία  $l_{p1}$  του  $p_1$ , η οποία είναι το ίχνος του επιπέδου  $\Pi_1$ , να ταυτιστεί με τον άξονα  $X$ , και μια κατά  $\varphi_1$  περί τον  $Y$ , τέτοια ώστε ο πόλος  $e_1$  να ανήκει στην ευθεία της βάσης (άξονας  $Z$ ). Η γωνία  $\kappa_1$  είναι ίση με την γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $l_{p1}$  με τον άξονα  $x$  των εικονοσυντεταγμένων και υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \arccos \left( \frac{x_1 - x_{0_1}}{a_1} \right), \text{ εάν } y_1 > y_{0_1} \\ &\quad \text{ή} \\ \kappa_1 &= -\arccos \left( \frac{x_1 - x_{0_1}}{a_1} \right), \text{ εάν } y_1 < y_{0_1} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Η  $\varphi_1$  είναι ίση με την γωνία της κορυφής  $O_1$  του ορθογωνίου τριγώνου  $p_1 O_1 e_1$  (Σχ. 5.5 και 5.2, αριστερά), και η τιμή της είναι ίση με:

$$\varphi_1 = -\arccos \left( \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + c_1^2}} \right) \quad (5.30)$$

Μέσω των γωνιών αυτών προσδιορίζεται ο πίνακας στροφής  $R_1$  της πρώτης εικόνας ως:

$$R_1 = R(\varphi_1)R(\kappa_1) \quad (5.31)$$

Εναλλακτικά, μπορούν να θεωρηθούν στροφές  $\kappa_1 + \pi$  και  $-\varphi_1$ , που ισοδυναμούν με στροφή της εικόνας κατά  $\pi$  περί την ευθεία της βάσης. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας στροφής της είναι ίσος με:

$$R_1 = R(-\varphi_1)R(\kappa_1 + \pi) \quad (5.32)$$

Το προβολικό κέντρο της δεύτερης εικόνας ανήκει επίσης στον άξονα  $Z$  και μπορεί να θεωρηθεί στην θέση:

$$X_{0_2} = 0, Y_{0_2} = 0, Z_{0_2} = \lambda \quad (5.33)$$

όπου  $\lambda \neq 0$  τυχαία σταθερά, το πρόσημο της οποίας καθορίζει την σχετική θέση των εικόνων (αριστερά – δεξιά, άνω – κάτω ή εμπρός – πίσω), ενώ η τιμή της την απόσταση των δύο προβολικών κέντρων και συνεπώς την κλίμακα της δυνατής 3D ανακατασκευής των απεικονιζόμενων αντικειμένων. Ο πίνακας στροφής της δεύτερης εικόνας υπολογίζεται από 3 στροφές, μια κατά  $\kappa_2$  περί τον άξονα  $Z$  τέτοια ώστε η ευθεία  $l_{p2}$  να ταυτιστεί με τον άξονα  $X$ , μια κατά  $\varphi_2$  περί τον  $Y$  προκειμένου ο πόλος  $e_2$  να ανήκει στην βάση (άξονας  $Z$ ) και, τέλος, μια κατά  $\kappa_2'$  περί τον  $Z$ , ίση με την γωνία  $\beta$  των επιπολικών επιπέδων των οπτικών αξόνων ώστε ο οπτικός άξονας της εικόνας αυτής να ανήκει στο επίπεδο  $\Pi_2$ .

Κατά αντιστοιχία με την πρώτη εικόνα, η γωνία  $\kappa_2$  είναι ίση με την γωνία της επιπολικής ευθείας  $l_{p2}$  και του άξονα  $x$  των εικονοσυντεταγμένων:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \arccos \left( \frac{x_2 - x_{0_2}}{a_2} \right), \text{ εάν } y_2 > y_{0_2} \\ &\quad \text{ή} \\ \text{ή } \kappa_2 &= -\arccos \left( \frac{x_2 - x_{0_2}}{a_2} \right), \text{ εάν } y_2 < y_{0_2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

ενώ η  $\varphi_2$  είναι ίση με την γωνία  $\mathbf{p}_2 \mathbf{O}_2 \mathbf{e}_2$  (Σχ. 5.5 και 5.2, δεξιά):

$$\varphi_2 = -\arccos \left( \frac{c_2}{\sqrt{a_1^2 + c_2^2}} \right) \quad (5.35)$$

Τέλος, η  $\kappa_2'$  υπολογίζεται μέσω μιας από τις Εξ. (5.8) ή (5.9):

$$\kappa_2' = \arccos \left( \frac{a_1 c_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + c_1^2 d_1^2}} \right) = \arccos \left( \frac{a_2 c_2}{\sqrt{a_2^2 b_2^2 + c_2^2 d_2^2}} \right) \quad (5.36)$$

Έτσι, ο πίνακας στροφής  $\mathbf{R}_2$  της δεύτερης εικόνας είναι ίσος με:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(\kappa_2') \mathbf{R}(\varphi_2) \mathbf{R}(\kappa_2) \quad (5.37)$$

ή, εάν θεωρηθούν στροφές  $\kappa_2 + \pi$  και  $-\varphi_2$  όπως και στην περίπτωση της πρώτης εικόνας:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}(\kappa_2') \mathbf{R}(-\varphi_2) \mathbf{R}(\kappa_2 + \pi) \quad (5.38)$$

Και στις δύο σχέσεις υπολογισμού του  $\mathbf{R}_2$  μπορεί επίσης αντί της  $\kappa_2'$  να χρησιμοποιηθεί γωνία  $\kappa_2' + \pi$ . Η γεωμετρία που προκύπτει αντιστοιχεί και πάλι σε περιστροφή της δεύτερης εικόνας κατά  $\pi$  περί την ευθεία της βάσης.

Από το σύνολο των δυνατών συνδυασμών των πινάκων στροφής  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  και του προσήμου της σταθεράς  $\lambda$ , 4 μόνο είναι διαφορετικοί και αντιστοιχούν στις 4 λύσεις του σχετικού προσανατολισμού (βλ. ενότητα 3.1.3.3). Οι παράμετροί του, το διάνυσμα δηλαδή της διεύθυνσης της βάσης  $\mathbf{B}$  και ο πίνακας σχετικών στροφών  $\mathbf{R}$ , μπορούν να προσδιοριστούν από τους εξωτερικούς προσανατολισμούς των δύο εικόνων ως εξής:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_1^T \begin{bmatrix} X_{0_2} - X_{0_1} \\ Y_{0_2} - Y_{0_1} \\ Z_{0_2} - Z_{0_1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

και

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1 \quad (5.40)$$

# 6

## Εφαρμογές και Αξιολόγηση

### 6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται, με την εφαρμογή των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν και περιγράφηκαν στα προηγούμενα, να φωτιστούν περαιτέρω τα στοιχεία της 2D και 3D επιπολικής γεωμετρίας του στερεοζεύγους που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή. Όλοι οι αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν στην γλώσσα προγραμματισμού Matlab και δοκιμάστηκαν τόσο σε προσομοιωμένα δεδομένα λήψεων όσο και σε πραγματικά στερεοζεύγη επίγειων εικόνων προερχόμενα από ποικιλία κοινών (ερασιτεχνικών) μηχανών λήψης, με κατά περίπτωση γνωστό ή άγνωστο εσωτερικό προσανατολισμό.

Αναλυτικότερα, στις ενότητες που ακολουθούν εξετάζεται αρχικά ο υπολογισμός του επιπολικού πίνακα μέσω τυπικών αλγορίθμων από την πρόσφατη βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών (βλ. ενότητα 3.2.4) όσο και μέσω της παραμετροποίησης η οποία προτάθηκε στο Κεφάλαιο 4 (ενότητα 4.3.3). Οι απαραίτητες μετρήσεις ομόλογων εικονοσημείων πραγματοποιήθηκαν αυτόματα με χρήση του σημειακού τελεστή SIFT (Lowe, 2004), η λειτουργία του οποίου περιγράφεται συνοπτικά στα επόμενα.

Εν συνεχεία παρατίθενται παραδείγματα της 3D επιπολικής γεωμετρίας και των γεωμετρικών σχέσεων που μελετήθηκαν στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της διατριβής. Δείχνεται ο επιπολικός κύκλος που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένα ζεύγη εικόνων καθώς και η κωνική τομή που συνδέει προβολικά την διεύθυνση της ευθείας τομής των επιπέδων τους με την θέση του πόλου της δεύτερης εικόνας επί του επιπολικού κύκλου. Για συγκεκριμένες επιλογές των τεσσάρων βαθμών ελευθερίας στερεοζεύγους δεδομένου επιπολικού πίνακα (δिएύθυνση της ευθείας τομής των επιπέδων των δύο εικόνων, διέδρη γωνία που αυτά σχηματίζουν, θέσεις των δύο προβολικών κέντρων επί της βάσης του ζεύγους) δείχνονται οι αντίστοιχες παράμετροι του σχετικού και του εσωτερικού προσανατολισμού. Παρουσιάζονται, επίσης,

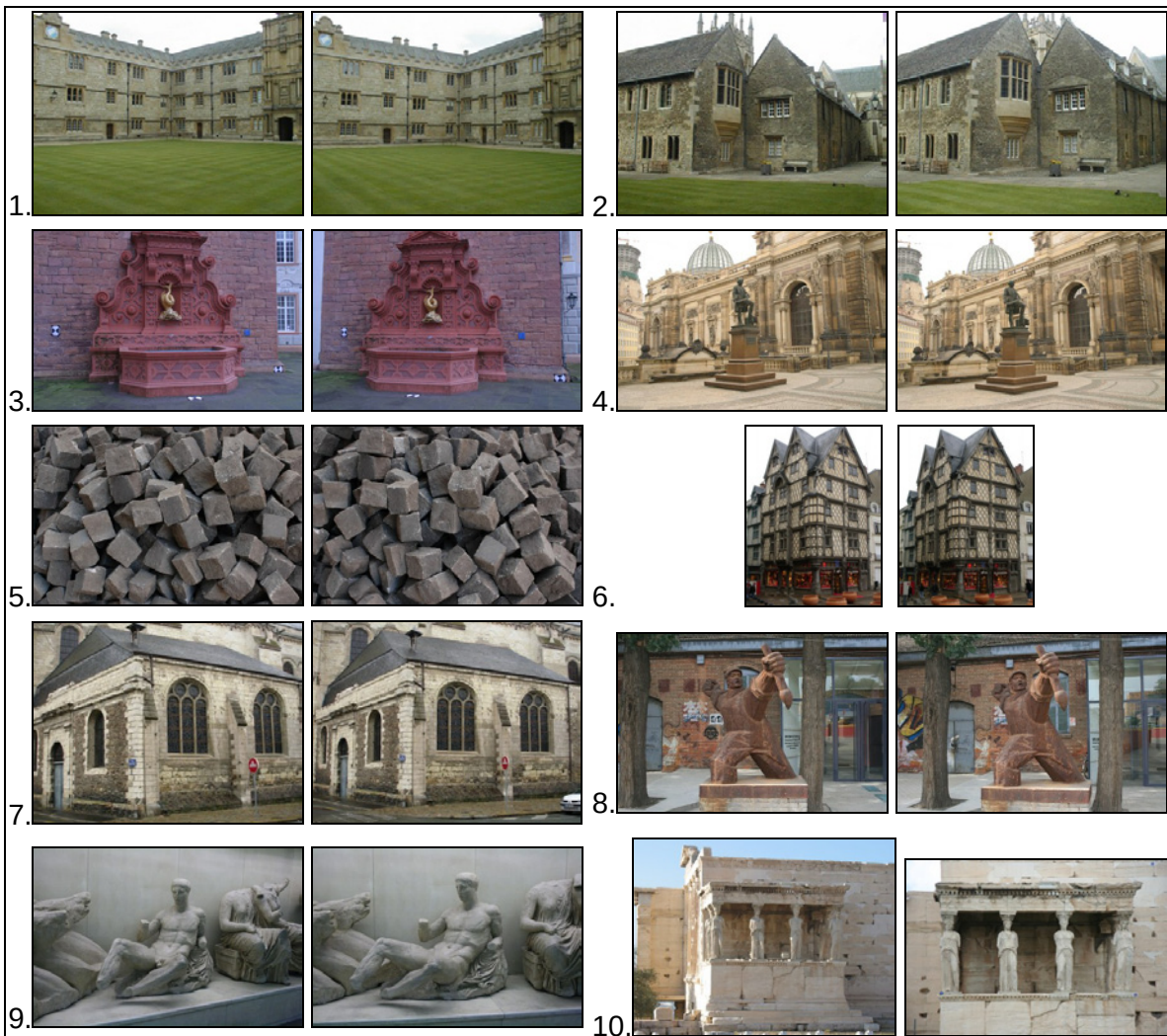


οι γεωμετρικοί τόποι του εσωτερικού προσανατολισμού που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες δεσμεύσεις. Τέλος, εξετάζεται η μερική βαθμονόμηση των μηχανών λήψης, γεγονός που επιτρέπει και την ευκλείδεια ανακατασκευή των απεικονιζόμενων αντικειμένων, και ειδικότερα ο υπολογισμός της σταθεράς μηχανής των εικόνων με πρωτεύον σημείο θεωρούμενο στο κέντρο των εικόνων.

## 6.2 Πειραματικά δεδομένα

### 6.2.1 Πραγματικές εικόνες

Κατά την πειραματική εφαρμογή των αλγορίθμων της διατριβής χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 10 επίγεια στερεοζεύγη, τα οποία απεικονίζουν διαφορετικά αντικείμενα και αντιπροσωπεύουν ποικιλία γεωμετριών λήψης και χαρακτηριστικών υφής (Σχ. 6.1)



Σχήμα 6.1. Στερεοζεύγη των πειραματικών εφαρμογών.

- Τα πέντε πρώτα ζεύγη εικόνων προέρχονται από συλλογές δεδομένων (data sets) που είναι διαθέσιμα στο Διαδίκτυο και έχουν χρησιμοποιηθεί σε επιλύσεις από ερευνητές της Όρασης Υπολογιστών και της Φωτογραμμετρίας. Ειδικότερα:

- Τα δύο πρώτα ζεύγη απεικονίζουν κτίρια του κολεγίου Merton του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης και διατίθενται από την ερευνητική ομάδα Oxford Visual Geometry Group (Werner & Zisserman, 2002).
- Τα δύο επόμενα (3<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup>) προέρχονται από σύνολο δεδομένων της ερευνητικής ομάδας ESAT/PSI Visics του Καθολικού Πανεπιστημίου του Leuven (Strecha et al., 2006, Strecha et al., 2008) και απεικονίζουν, αντίστοιχα, σιντριβάνι στην πόλη Ettlingen της Γερμανίας και γλυπτό του Γερμανού αρχιτέκτονα Gottfried Semper στην Δρέσδη.
- Το 5<sup>ο</sup> ζεύγος εικόνων ανήκει σε σύνολο δεδομένων ομάδας εργασίας της Επιτροπής III της ISPRS (Working Group III/1 “Automatic Calibration and Orientation of Optical Cameras”) που προορίζεται για τον έλεγχο μεθόδων αυτόματου προσανατολισμού, και απεικονίζει έναν σωρό από ομοιογενείς πέτρες ([www.ipf.tuwien.ac.at/car/isprs/test-data/](http://www.ipf.tuwien.ac.at/car/isprs/test-data/)).
- Τα επόμενα τέσσερα ζεύγη έχουν ληφθεί από τον γράφοντα και απεικονίζουν δύο κτίρια στην πόλη Angers της Γαλλίας (6<sup>ο</sup> και 7<sup>ο</sup>), ένα άγαλμα στο καλλιτεχνικό πάρκο “Art Zone 798” του Πεκίνου (8<sup>ο</sup>) και αντίγραφα των αγαλμάτων του Παρθενώνα που εκτίθενται στον σταθμό “Ακρόπολη” του μετρό της Αθήνας (9<sup>ο</sup>).
- Τέλος, το 10<sup>ο</sup> στερεοζεύγος αποτελείται από δύο εικόνες του Ερεχθείου, προερχόμενες από διαφορετικούς χρήστες του διαδικτυακού τόπου ανάρτησης εικόνων “[www.flickr.com](http://www.flickr.com)”.

Στον επόμενο Πίνακα 6.1 παρουσιάζονται οι μηχανές λήψης από τις οποίες προέρχονται τα δεδομένα, οι αντίστοιχες διαστάσεις των ψηφιακών εικόνων<sup>1</sup> καθώς και εκτιμήσεις για την τιμή της σταθεράς της μηχανής τους.

| Πίνακας 6.1. Γενικά στοιχεία για τις εικόνες των πειραματικών δεδομένων |                |                            |                    |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|--------------------|
| στερεοζεύγος                                                            | ψηφιακή μηχανή | διαστάσεις εικόνας (pixel) | εκτίμηση c (pixel) |
| 1                                                                       | Olympus C820-L | 1024×768                   | 1165               |
| 2                                                                       | Olympus C820-L | 1024×768                   | 1165               |
| 3                                                                       | Canon D60      | 1024×683 (3072×2048)       | 920                |
| 4                                                                       | Canon D60      | 1024×683 (3072×2048)       | 920                |
| 5                                                                       | Nikon D70      | 1504×1000                  | 1830               |
| 6                                                                       | Sony DSC-W17   | 768×1024 (2304×3072)       | 1140               |
| 7                                                                       | Sony DSC-W17   | 1024×768 (3072×2304)       | 1140               |
| 8                                                                       | Canon EOS 400D | 1296×864 (3888×2592)       | 1580               |
| 9                                                                       | Canon EOS 400D | 1024×682 (3888×2592)       | 1015               |
| 10                                                                      | άγνωστη        | 1024×768 και 1024×683      | άγνωστο            |

Οι εκτιμήσεις για τις σταθερές των μηχανών προέρχονται από επιλύσεις βαθμονόμησης (στερεοζεύγη 1–5) είτε από την τιμή της εστιακής απόστασης (ή της επιλογής zoom του φακού) που συνοδεύει τα ψηφιακά αρχεία των εικόνων (στερεοζεύγη 6–9). Στην δεύτερη περίπτωση η εκτίμηση δίδεται εδώ ως ενδεικτική για την τάξη μεγέθους της σταθεράς της μηχανής και δεν θεωρείται τιμή αναφοράς για μετέπειτα συγκρίσεις. Τέλος, δεν υπάρχουν πληροφορίες για τον εσωτερικό προσανατολισμό του 10<sup>ου</sup> στερεοζεύγους πέραν της εύλογης υπόθεσης ότι οι δύο εικόνες έχουν διαφορετική σταθερά της μηχανής. Στα επόμενα, εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά, ο εσωτερικός προσανατολισμός όλων των εικόνων θεωρείται άγνωστος.

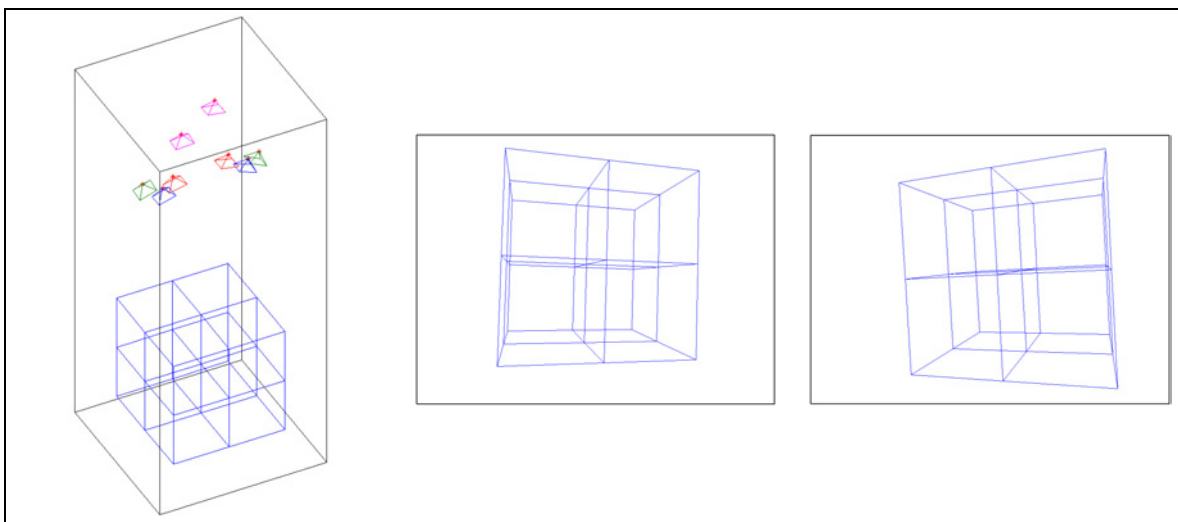
<sup>1</sup> Σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν εικόνες με μικρότερη διάσταση από τις πρωτότυπες. Οι αρχικές διαστάσεις των εικόνων φαίνονται σε παρένθεση στον Πίνακα 6.1.

### 6.2.2 Προσομοιωμένα δεδομένα λήψεων

Επιπλέον, για τον περαιτέρω έλεγχο των αλγορίθμων (κυρίως εκείνων της μερικής βαθμονόμησης) χρησιμοποιήθηκαν και προσομοιωμένα δεδομένα λήψης. Στα επόμενα παρουσιάζονται αποτελέσματα από 4 στερεοζεύγη που προέκυψαν από διαφορετικές προοπτικές απεικονίσεις ενός 3D καννάβου διαστάσεων  $2 \times 2 \times 2 \text{ m}^3$  αποτελούμενου από 27 σημεία (Σχ. 6.2). Η διάσταση των υπολογισμένων εικόνων επιλέχθηκε ως  $1024 \times 768 \text{ pixel}$ , η σταθερά της μηχανής  $c = 900 \text{ pixel}$  και το πρωτεύον σημείο στο κέντρο της εικόνας. Οι εξωτερικοί προσανατολισμοί (Πίνακας 6.2) επιλέχθηκαν ώστε να προκύψουν γεωμετρίες με διαφορετικούς λόγους βάσης προς απόσταση λήψης ( $B/H$ ), οι οποίες ταυτόχρονα απέχουν από τις κρίσιμες γεωμετρίες της μερικής βαθμονόμησης. Εξαίρεση αποτελεί το 4<sup>ο</sup> ζεύγος, όπου οι οπτικοί άξονες είναι σχεδόν συνεπίπεδοι (τα επίπεδά που ο κάθε άξονας ορίζει με την βάση σχηματίζουν διέδρα γωνία  $1.5^\circ$ ) και οι αποστάσεις των προβολικών κέντρων από το “ιδεατό” σημείο τομής των οπτικών αξόνων διαφέρουν μόνο κατά 2%.

| Πίνακας 6.2. Εξωτερικοί προσανατολισμοί των προσομοιώσεων. |                   |                   |                   |                                  |                                   |                                  |
|------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| εικόνα                                                     | $X_0 \text{ (m)}$ | $Y_0 \text{ (m)}$ | $Z_0 \text{ (m)}$ | $\omega \text{ (}^\circ\text{)}$ | $\varphi \text{ (}^\circ\text{)}$ | $\kappa \text{ (}^\circ\text{)}$ |
| 1_1                                                        | 1.2               | 1.8               | 6.0               | 2                                | -13                               | 2                                |
| 1_2                                                        | 2.9               | 2.1               | 5.8               | -1                               | 19                                | -3                               |
| 2_1                                                        | 0.8               | 1.7               | 6.3               | 10                               | -20                               | 1                                |
| 2_2                                                        | 3.2               | 2.3               | 5.7               | -5                               | 25                                | -2                               |
| 3_1                                                        | 1.6               | 1.9               | 6.9               | 6                                | -8                                | -3                               |
| 3_2                                                        | 2.3               | 2.1               | 7.2               | -4                               | 10                                | 2                                |
| 4_1                                                        | 1.5               | 2.0               | 6.0               | 0.75                             | -12                               | 0                                |
| 4_2                                                        | 2.5               | 2.0               | 6.1               | -0.75                            | 12                                | 0                                |

Σημειώνεται επίσης πως για τις ανάγκες της ενότητας 6.6.1, όπου εξετάζεται ο υπολογισμός δύο διακριτών τιμών σταθεράς της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα, υπολογίστηκαν εκ νέου οι εικονοσυντεταγμένες των προσομοιωμένων εικόνων με τιμές σταθεράς της μηχανής  $c_1 = 800 \text{ pixel}$  και  $c_2 = 1000 \text{ pixel}$ .



Σχήμα 6.2. Παράδειγμα προσομοιωμένων δεδομένων. Αριστερά φαίνεται το 3D αντικείμενο και οι θέσεις των εικόνων στον χώρο, και δεξιά οι εικόνες 1\_1 και 1\_2 με κοινή σταθερά μηχανής.

### 6.3 Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων

Προϋπόθεση για τον υπολογισμό του επιτολικού πίνακα (που είναι απαραίτητος για όλους τους μετέπειτα υπολογισμούς που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο) είναι η μέτρηση ομόλογων σημείων στις εικόνες. Η αυτοματοποίηση της διαδικασίας αυτής έχει απασχολήσει, ήδη σχεδόν από την εμφάνιση των ψηφιακών εικόνων, τόσο την φωτογραμμετρική βιβλιογραφία όσο και εκείνη της Όρασης Υπολογιστών (βλ. ενότητα 1.2.2.5). Τελευταία μάλιστα έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος προς την πλήρη αυτοματοποίηση της αντιστοίχισης εικονοσημείων χάρη σε νέους αλγορίθμους (Mikolajczyk & Schmid, 2005) οι οποίοι επιτυγχάνουν ακόμα και σε επίγειες εικόνες μεγάλης βάσης (wide-base), εκεί δηλαδή όπου οι συνθήκες μέθοδοι αυτόματης συνταύτισης συχνά αστοχούν εξαιτίας των μεγάλων διαφορών στην κλίμακα και των έντονων προοπτικών παραμορφώσεων. Αυτοί οι αλγόριθμοι στηρίζονται στον ταυτόχρονο εντοπισμό σημείων ενδιαφέροντος και περιγραφικών χαρακτηριστικών (descriptors) που είναι αναλλοίωτα σε συγκεκριμένες ομάδες γεωμετρικών μετασχηματισμών (πχ. αλλαγή κλίμακας, στροφή, αφινικός μετασχηματισμός). Η εύρεση των ομολογιών ανάμεσα στα εικονοσημεία δύο εικόνων προκύπτει μετά από την σύγκριση των αντίστοιχων περιγραφικών τους χαρακτηριστικών. Εδώ αξιοποιήθηκε ο σημειακός τελεστής SIFT (Scale Invariant Feature Transform) του Lowe (2004), ο οποίος έχει την ιδιότητα να εντοπίζει χαρακτηριστικά σημεία σε μία εικόνα και να τους αποδίδει περιγραφικά χαρακτηριστικά που είναι αναλλοίωτα σε αλλαγή κλίμακας και στροφή, ενώ παράλληλα δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα σε αφινικούς μετασχηματισμούς. Χάρη σε αυτές τις ιδιότητες, τα περιγραφικά χαρακτηριστικά που αποδίδονται σε κοινά σημεία διαφορετικών εικόνων είναι παρόμοια, γεγονός που επιτρέπει την αντιστοίχισή τους. Στην συνέχεια περιγράφεται συνοπτικά η λειτουργία του τελεστή SIFT.

#### 6.3.1 Λειτουργία του σημειακού τελεστή SIFT

Πρώτο βήμα για την εφαρμογή του SIFT σε μία εικόνα είναι η δημιουργία μίας πυραμίδας κλίμακας, η οποία παράγεται με εφαρμογή στην αρχική εικόνα σειράς διαδοχικών φίλτρων εξομάλυνσης Gauss διαφορετικής τυπικής απόκλισης. Οι διαδοχικές φιλτραρισμένες εικόνες αφαιρούνται ανά δύο σχηματίζοντας μία δεύτερη πυραμίδα εικόνων DoG (Difference of Gaussian). Κατόπιν οι τιμές των εικονοψηφίδων κάθε επιπέδου της πυραμίδας DoG συγκρίνονται με εκείνες των 8 γειτονικών τους αλλά και των 9 γειτονικών τους στο προηγούμενο και το επόμενο επίπεδο της πυραμίδας. Ως σημεία ενδιαφέροντος επιλέγονται εκείνα με τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες από όλους τους 26 γείτονες αλλά και από ένα αντίστοιχο προεπιλεγμένο κατώφλι. Από αυτά απορρίπτονται όσα είναι εντοπισμένα κατά μήκος έντονων ακμών. Τέλος, με κατάλληλη παρεμβολή πολυωνύμων 2<sup>ου</sup> βαθμού υπολογίζεται από τα τοπικά τους ακρότατα η θέση των σημείων με υποψηφιδική ακρίβεια.

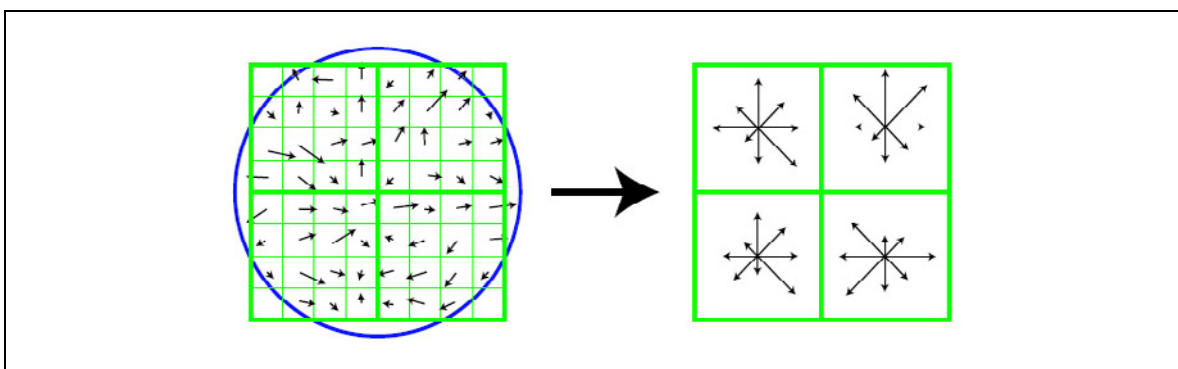
Επόμενο στάδιο του αλγορίθμου SIFT είναι η απόδοση συγκεκριμένου προσανατολισμού σε κάθε σημείο ενδιαφέροντος. Προς τούτο, ορίζεται παράθυρο στο επίπεδο της πυραμίδας των εικόνων Gauss όπου εντοπίστηκε το σημείο, και εκεί υπολογίζονται το μέτρο  $m$  και η διεύθυνση  $\theta$  της μέγιστης κλίσης όλων των εικονοσημείων, αντίστοιχα, ως:

$$m = \sqrt{(I(x+1,y) - I(x-1,y))^2 + (I(x,y+1) - I(x,y-1))^2} \quad (6.1)$$

και

$$\vartheta = \tan^{-1} \left( \frac{I(x+1, y) - I(x-1, y)}{I(x, y+1) - I(x, y-1)} \right) \quad (6.2)$$

όπου  $I(x, y)$  η τιμή της έντασης κάθε εικονοψηφίδας (Σχ. 6.3, αριστερά). Από τις κλίσεις αυτές προκύπτει ιστογράμμα με κατάταξη των διαφορετικών διευθύνσεων, ανάλογα και με το μέτρο τους, σε 8 προεπιλεγμένους προσανατολισμούς. Η κορυφή του ιστογράμματος, η οποία εκφράζει την επικρατέστερη διεύθυνση των τοπικών κλίσεων, επιλέγεται ως προσανατολισμός του σημείου. Εάν εμφανίζονται περισσότερες από μία έντονες κορυφές, τότε ορίζονται δύο σημεία με κοινή θέση αλλά διαφορετικό προσανατολισμό.



Σχήμα 6.3. Υπολογισμός των αναλλοίωτων περιγραφικών χαρακτηριστικών του τελεστή SIFT (από Lowe, 2004). Εδώ δείχνεται ο υπολογισμός των περιγραφικών χαρακτηριστικών σε 4 υποπεριοχές περί το σημείο ενδιαφέροντος, ενώ στην πράξη πραγματοποιείται σε 16.

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται και τα περιγραφικά χαρακτηριστικά των σημείων. Σε κάθε σημείο ενδιαφέροντος ορίζεται νέο παράθυρο, στραμμένο βάσει του προσανατολισμού του, το οποίο χωρίζεται σε υποπεριοχές (συνήθως  $4 \times 4$ ). Εκεί υπολογίζονται το μέτρο  $m$  (αυτή την φορά με διαφορετικό βάρος ανάλογα με την απόσταση από το κέντρο του παραθύρου) και η διεύθυνση  $\vartheta$  των κλίσεων των εικονοσημείων, και σχηματίζονται ιστογράμματα προσανατολισμού (Σχ. 6.3, δεξιά). Στην τυπική περίπτωση, για κάθε σημείο ενδιαφέροντος υπολογίζονται 16 ιστογράμματα, με 8 προσανατολισμούς το καθένα, που αποθηκεύονται σε διάνυσμα διάστασης  $128 \times 1$ , το οποίο κανονικοποιείται ώστε να έχει μοναδιαίο μέτρο. Ο τρόπος υπολογισμού των διανυσμάτων αυτών εγγυάται ότι θα είναι παρόμοια ακόμα και εάν στραφεί η αρχική εικόνα ή μεταβληθεί η κλίμακά της, ενώ επιπλέον, χάρη στην κανονικοποίηση, οι τιμές τους δεν επηρεάζονται από ομοιογενείς αλλαγές στην φωτεινότητα και την αντίθεση.

Η εφαρμογή του τελεστή SIFT στις εικόνες στερεοζεύγους επιτρέπει να εντοπίζεται ένας αριθμός χαρακτηριστικών σημείων συνοδευόμενων από διανύσματα που εκφράζουν, κατά κάποιον τρόπο, την κατανομή των κλίσεων της εικόνας στην περιοχή τους. Ένα αξιόπιστο μέτρο σύγκρισης δύο σημείων είναι ο υπολογισμός της ευκλείδειας απόστασης των διανυσμάτων τους. Κατά συνέπεια, η αντιστοίχιση των ομολογιών ανάμεσα σε δύο εικόνες επιτυγχάνεται με αναζήτηση των σημείων με τα “κοντινότερα” διανύσματα.

### 6.3.2 Αυτόματος προσδιορισμός ομολογιών στα δεδομένα

Για τον αυτόματο εντοπισμό ομολογων σημείων στις εικόνες των 10 στερεομοντέλων των πειραματικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η έκδοση του αλγόριθμου SIFT που διαθέτει ο



Lowe<sup>2</sup>. Πριν από την εφαρμογή του τελεστή μειώθηκαν οι διαστάσεις όσων εικόνων υπερέβαιναν τα 1800 pixels (βλ. Πίνακα 6.1) προκειμένου να περιοριστεί ο αριθμός των εξαγόμενων σημείων σε ~10000 ανά εικόνα. Η διαδικασία αυτή ενδείκνυται καθώς, όπως αναφέρει ο ίδιος ο Lowe στην ιστοσελίδα του αλγορίθμου του, “η αλλαγή ανάλυσης της εικόνας είναι η βέλτιστη μέθοδος ελέγχου του αριθμού των σημείων ενδιαφέροντος, αφού τα σημεία των ανώτερων επιπέδων της πυραμίδας κλίμακας είναι πιο αξιόπιστα”.



Σχήμα 6.4. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (2<sup>ο</sup> στερεοζεύγος). Εξαγωγή σημείων SIFT (πάνω), εύρεση ομολογιών μεταξύ των σημείων SIFT μέσω σύγκρισης των διανυσμάτων τους (μέσον), τελικές ομολογίες σημείων SIFT μετά από την εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC (κάτω).

Με την εφαρμογή του SIFT κατέστη δυνατή η αποκατάσταση ορθών ομολογιών σε μεγάλο ποσοστό, ακόμα και στις πιο δυσμενείς περιπτώσεις όπου οι εικόνες παρουσίαζαν σημαν-

<sup>2</sup> <http://www.cs.ubc.ca/~lowe/keypoints/>



τικές διαφορές στην κλίμακα και την προοπτική, είχαν αποκρύψει ή απεικόνιζαν επαναλαμβανόμενους σχηματισμούς. Επίσης, η κατανομή των σημείων κάλυπτε στις περισσότερες περιπτώσεις σημαντικό ποσοστό του επικαλυπτόμενου τμήματος των εικόνων.

Ο εντοπισμός και αποκλεισμός χονδροειδών σφαλμάτων στις ομολογίες εικονοσημείων έγινε σε επόμενο βήμα με χρήση του αλγορίθμου RANSAC (βλ. ενότητα 3.2.4.5) των Fischer & Bolles (1981). Στα Σχ. 6.4 και 6.5 φαίνονται, ενδεικτικά για τα στερεομοντέλα 2 και 3, τα αποτελέσματα της αυτόματης μέτρησης ομόλογων σημείων. Παρουσιάζονται διαδοχικά το σύνολο των σημείων ενδιαφέροντος που εντοπίστηκαν στις δύο εικόνες, οι ομολογίες που προέκυψαν από την σύγκριση των διανυσμάτων των αναλλοίωτων χαρακτηριστικών και τα τελικά σημεία που διατηρήθηκαν μετά από την εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC. Τα αντίστοιχα σχήματα για όλα τα στερεοζεύγη βρίσκονται στο Παράρτημα Α.



Σχήμα 6.5. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (3<sup>ο</sup> στερεοζεύγος). Εξαγωγή σημείων SIFT (πάνω), εύρεση ομολογιών μεταξύ των σημείων SIFT μέσω σύγκρισης των διανυσμάτων τους (μέσον), τελικές ομολογίες σημείων SIFT μετά από την εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC (κάτω).

Μέσω του RANSAC εντοπίστηκαν με επιτυχία και απομακρύνθηκαν όλες οι εσφαλμένες ο-

μολογίες στις εικόνες. Ωστόσο μία αδυναμία του αλγορίθμου – εγγενής στην αρχή λειτουργίας του, που βασίζεται στην απομάκρυνση σημείων των οποίων οι αποστάσεις από τις επιπολικές τους ευθείες ξεπερνούν ένα προεπιλεγμένο όριο – είναι η ταυτόχρονη αφαίρεση και ορισμένων ορθών ομολογιών. Το πρόβλημα επιδεινώνεται στα άκρα των εικόνων όπου, λόγω της συνήθους παρουσίας ακτινικής διαστροφής σε εικόνες από κοινές μηχανές λήψης, τα σφάλματα προσαρμογής του μαθηματικού μοντέλου του επιπολικού πίνακα αναμένονται μεγαλύτερα. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να περιοριστεί με αύξηση των ορίων κατά τον εντοπισμό των εσφαλμένων ομολογιών, αλλά τότε υπάρχει ο κίνδυνος να παραμείνουν στις μετρήσεις χονδροειδή σφάλματα που θα επηρεάσουν δραστικά την ακρίβεια των υπολογισμών. Σε αρκετές πρακτικές εφαρμογές, βέβαια, η αφαίρεση σημείων από τα άκρα των εικόνων δεν έχει σοβαρές επιπτώσεις στην τελική ακρίβεια ανακατασκευής των αντικειμένων καθώς τα τελευταία συχνά καλύπτουν απλώς ένα τμήμα (συνήθως μάλιστα περί το κέντρο) των εικόνων.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί πως, για να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί, στις περιπτώσεις όπου το πλήθος των τελικών ομολογιών ξεπερνούσε τα 1500 σημεία ο αριθμός τους μειώθηκε, χωρίς όμως να μεταβληθεί η αρχική τους κατανομή. Στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζεται, για το σύνολο των δεδομένων, ο αριθμός των ομολογιών μετά από την εφαρμογή των αλγορίθμων SIFT και RANSAC όπως και το πλήθος των σημείων που τελικά χρησιμοποιήθηκαν στους υπολογισμούς (σε παρένθεση το ποσοστό των χρησιμοποιηθέντων σημείων).

| Πίνακας 6.3. Πλήθος ομολογιών κατά την συνταύτιση εικόνων<br><i># ini: πλήθος αρχικών ομολογιών από εφαρμογή του τελεστή SIFT</i><br><i># RANSAC: πλήθος ομολογιών μετά από εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC</i><br><i># com: πλήθος ομολογιών που χρησιμοποιήθηκαν στους υπολογισμούς</i> |       |          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|----------|------------|
| στερεοζεύγος                                                                                                                                                                                                                                                                             | # ini | # RANSAC | # com      |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2749  | 1946     | 973 (1/2)  |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4043  | 3434     | 1144 (1/3) |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4110  | 3452     | 1151 (1/3) |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4828  | 4549     | 1137 (1/4) |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1357  | 1123     | 1123       |
| 6                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2947  | 1790     | 895 (1/2)  |
| 7                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4601  | 3459     | 1153 (1/3) |
| 8                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 5032  | 3974     | 993 (1/4)  |
| 9                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 770   | 480      | 480        |
| 10                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 720   | 518      | 518        |

## 6.4 2D Επιπολική γεωμετρία

### 6.4.1 Υπολογισμός του επιπολικού πίνακα

Επόμενο βήμα, μετά από την μέτρηση ομόλογων σημείων, ήταν ο υπολογισμός του επιπολικού πίνακα των στερεοζευγών, που αποτελεί προϋπόθεση για την περαιτέρω διερεύνηση της 3D επιπολικής γεωμετρίας αλλά και την εφαρμογή των αλγορίθμων μερικής βαθμονόμησης που αναπτύχθηκαν στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο. Ένας επιπλέον στόχος εδώ ήταν να εξεταστεί η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα η εναλλακτική παραμετροποίηση που διατυπώθηκε στο Κεφάλαιο 4, η οποία στηρίζεται στην αναζήτηση των πόλων των δύο εικόνων στερεοζεύγους και των παραμέτρων μετάθεσης



και στροφής της δεύτερης εικόνας ώστε οι δέσμες των επιπολικών ευθειών να έρθουν σε προοπτική θέση, με ευθεία προοπτικότητας τον άξονα  $y$  των εικονοσυντεταγμένων (βλ. ενότητα 4.3.3). Για τον σκοπό αυτό υλοποιήθηκαν και εφαρμόστηκαν οι τρεις τυπικοί αλγόριθμοι (δύο γραμμικοί και ένας μη γραμμικός) από την βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών που περιγράφηκαν στην ενότητα 3.2.4. Κατά την μη γραμμική επίλυση (βλ. ενότητα 3.2.4.3) χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές παραμετροποιήσεις του επιπολικού πίνακα, η “προβολική” των Luong et al. (1993) και Luong & Faugeras (1996) (βλ. ενότητα 3.2.3.1) και η “προοπτική” της παρούσας διατριβής.

Έτσι, εξετάστηκαν συνολικά οι ακόλουθες τέσσερις επιλύσεις του επιπολικού πίνακα:

- $8p$ : γραμμική επίλυση με τον “αλγόριθμο των 8 σημείων” (βλ. ενότητα 3.2.4.1).
- $8pn$ : γραμμική επίλυση με κανονικοποίηση των εικονοσυντεταγμένων και επιβολή της δέσμευσης μηδενικής ορίζουσας με τον “κανονικοποιημένο αλγόριθμο των 8 σημείων” (βλ. ενότητα 3.2.4.4).
- $proj\_nonlin$ : μη γραμμική επίλυση, κατά την οποία υπολογίζονται οι συντεταγμένες των πόλων στις δύο εικόνες ( $x_1, y_1, x_2, y_2$ ) και οι 3 παράμετροι ( $a, b, c$ ) της 1D ομογραφίας η οποία συνδέει τις κλίσεις  $s$  και  $s'$  των επιπολικών ευθειών  $l$  και  $l'$ , αντίστοιχα, στις δύο εικόνες του στερεοζεύγους, σύμφωνα με την Εξ. 3.35:

$$s' = \frac{as + b}{cs + 1}$$

- $persp\_nonlin$ : μη γραμμική επίλυση, κατά την οποία υπολογίζονται οι συντεταγμένες των πόλων στις δύο εικόνες ( $x_1, y_1, x_2, y_2$ ) και οι 3 παράμετροι της 2D μετάθεσης ( $d_x, d_y$ ) και στροφής ( $\kappa$ ) της δεύτερης εικόνας που απαιτούνται ώστε οι ομόλογες επιπολικές ευθείες να τέμνονται επί του άξονα  $y$  του συστήματος των εικονοσυντεταγμένων.

Στις δύο πρώτες περιπτώσεις η επίλυση έγινε μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών (SVD). Στις δύο τελευταίες χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος μικτών εξισώσεων των ελαχίστων τετραγώνων και ως εξίσωση παρατήρησης επιλέχθηκε η έκφραση της συμμετρικής απόστασης  $d_{sym}$  των ομόλογων σημείων από τις αντίστοιχες επιπολικές ευθείες στις δύο εικόνες, όπως αυτές ορίζονται μέσω του επιπολικού πίνακα (Εξ. 6.3):

$$d_{sym} = \frac{(|d(\mathbf{x}', \mathbf{F}\mathbf{x})| + |d(\mathbf{x}, \mathbf{F}^T \mathbf{x}')|)}{2} \quad (6.3)$$

Οι αναγκαίες προσεγγιστικές τιμές των 7 παραμέτρων υπολογίστηκαν σε κάθε περίπτωση από την εκτίμηση του επιπολικού πίνακα από τις δύο πρώτες γραμμικές προσεγγίσεις.

Ως ενδεικτικό μέτρο για την ακρίβεια των τεσσάρων διαφορετικών επιλύσεων υπολογίστηκαν οι μέσες τετραγωνικές τιμές (RMS) των συμμετρικών αποστάσεων  $d_{sym}$  των σημείων από τις ομόλογες επιπολικές τους ευθείες στις δύο εικόνες:

$$d_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_i^n d_{sym}^2}{n-7}} \quad (6.4)$$

Οι τιμές τους παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.4 και είναι γενικά ισοδύναμες, με εξαίρεση σε

ορισμένες περιπτώσεις εκείνες που προέρχονται από στην πρώτη γραμμική επίλυση.

| Πίνακας 6.4. Ακρίβεια υπολογισμού του επιπολικού πίνακα<br><i>RMS των αποστάσεων των ομόλογων σημείων από τις αντίστοιχες επιπολικές ευθείες (pixel)</i> |                 |                       |                          |                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------|--------------------------|---------------------------|
| στερεοζεύγος                                                                                                                                             | $d_{RMS} (lin)$ | $d_{RMS} (lin\_norm)$ | $d_{RMS} (proj\_nonlin)$ | $d_{RMS} (persp\_nonlin)$ |
| 1                                                                                                                                                        | 0.332           | 0.318                 | 0.317                    | 0.317                     |
| 2                                                                                                                                                        | 0.392           | 0.390                 | 0.388                    | 0.388                     |
| 3                                                                                                                                                        | 0.285           | 0.263                 | 0.263                    | 0.263                     |
| 4                                                                                                                                                        | 0.266           | 0.260                 | 0.259                    | 0.259                     |
| 5                                                                                                                                                        | 0.950           | 0.645                 | 0.636                    | 0.636                     |
| 6                                                                                                                                                        | 0.796           | 0.363                 | 0.359                    | 0.359                     |
| 7                                                                                                                                                        | 0.718           | 0.340                 | 0.302                    | 0.302                     |
| 8                                                                                                                                                        | 0.260           | 0.252                 | 0.247                    | 0.247                     |
| 9                                                                                                                                                        | 0.497           | 0.439                 | 0.437                    | 0.437                     |
| 10                                                                                                                                                       | 0.502           | 0.498                 | 0.494                    | 0.494                     |

Ακόμα, στους Πίνακες 6.5 και 6.6 παρουσιάζονται οι τιμές των 7 παραμέτρων των δύο μη γραμμικών επιλύσεων.

| Πίνακας 6.5. “Προβολική” παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα |          |         |         |               |               |               |               |
|----------------------------------------------------------------|----------|---------|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| στερεοζεύγος                                                   | a        | b       | c       | $x_1$ (pixel) | $y_1$ (pixel) | $x_2$ (pixel) | $y_2$ (pixel) |
| 1                                                              | 0.2319   | -0.0087 | -0.0502 | 3808.55       | -57.62        | 17196.49      | -225.81       |
| 2                                                              | 0.8445   | 0.0255  | -0.0126 | 1053.77       | -46.76        | 1428.43       | 8.48          |
| 3                                                              | -3.4287  | -0.0664 | -0.1796 | 11067.03      | -186.45       | -3126.95      | 16.48         |
| 4                                                              | 0.9442   | 0.0047  | -0.0366 | 5244.13       | 143.34        | 5550.80       | 163.03        |
| 5                                                              | 8.4418   | -0.9501 | 3.0713  | -79992.95     | -5797.91      | -10769.49     | 2958.38       |
| 6                                                              | -29.6993 | 1.1223  | 0.9219  | 257262.75     | 9088.51       | -8839.11      | -634.38       |
| 7                                                              | 1.0504   | -0.0228 | 0.0034  | -955.29       | -204.49       | -848.17       | -165.84       |
| 8                                                              | 0.1958   | -0.0027 | -0.0361 | 8829.54       | -138.48       | 45799.96      | -277.35       |
| 9                                                              | -0.3285  | -0.0021 | -0.0864 | 3507.72       | 32.60         | -11618.65     | 59.22         |
| 10                                                             | 3.1507   | -0.0222 | 0.3572  | -40160.61     | -798.08       | -18440.62     | -782.88       |

| Πίνακας 6.6. “Προοπτική” παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα |              |               |               |               |               |               |               |
|----------------------------------------------------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| στερεοζεύγος                                                   | $\kappa$ (°) | $d_x$ (pixel) | $d_y$ (pixel) | $x_1$ (pixel) | $y_1$ (pixel) | $x_2$ (pixel) | $y_2$ (pixel) |
| 1                                                              | -12.205      | -1099.50      | 268.16        | 3808.55       | -57.62        | 17196.49      | -225.81       |
| 2                                                              | -0.854       | -180.40       | -20.71        | 1053.77       | -46.76        | 1428.43       | 8.48          |
| 3                                                              | 2.999        | -106.60       | 5.64          | 11067.03      | -186.45       | -3126.95      | 16.48         |
| 4                                                              | -2.223       | -6.03         | 6.59          | 5244.13       | 143.34        | 5550.80       | 163.03        |
| 5                                                              | 19.993       | -128.80       | 10.26         | -79992.95     | -5797.91      | -10769.49     | 2958.38       |
| 6                                                              | -1.778       | -100.86       | 4.70          | 257262.75     | 9088.51       | -8839.11      | -634.38       |
| 7                                                              | 0.183        | -61.84        | -18.08        | -955.29       | -204.49       | -848.17       | -165.84       |
| 8                                                              | -10.445      | -1398.69      | 279.41        | 8829.54       | -138.48       | 45799.96      | -277.35       |
| 9                                                              | 14.734       | 1258.08       | 324.92        | 3507.72       | 32.60         | -11618.65     | 59.22         |
| 10                                                             | 6.469        | 5618.79       | 909.49        | -40160.61     | -798.08       | -18440.62     | -782.88       |

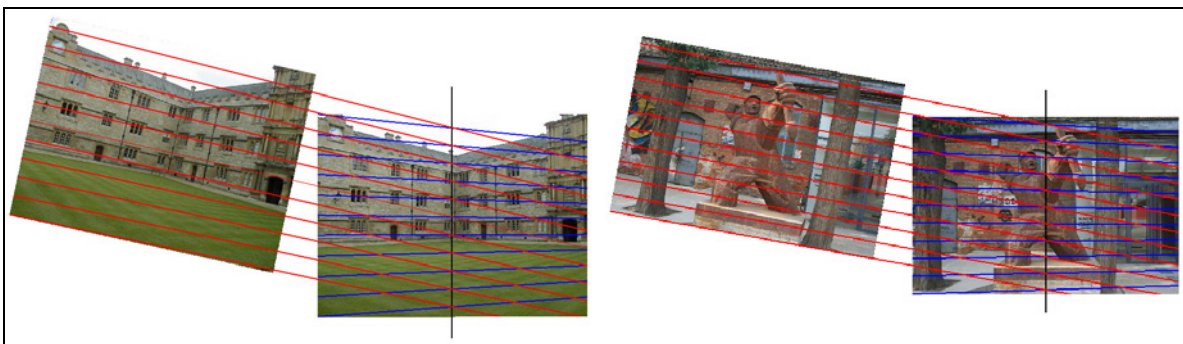
Αν και οι 3 από τους 7 βαθμούς ελευθερίας του επιπολικού πίνακα εκφράζονται μέσω διαφορετικών παραμέτρων, οι δύο μη γραμμικές επιλύσεις είναι πρακτικά πλήρως ισοδύνα-

μες (όπως υποδηλώνει και η ταυτόσημη ακρίβεια υπολογισμού που φαίνεται στις δύο τελευταίες στήλες του Πίνακα 6.4), οδηγώντας σε προσδιορισμό κοινού επιπολικού πίνακα και θέσης των πόλων. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει ότι η “προοπτική” παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα που διατυπώνεται στην διατριβή αποτελεί εναλλακτική προσέγγιση όχι μόνο χρήσιμη για την θεωρητική μελέτη της 2D επιπολικής γεωμετρίας του στερεοζεύγους αλλά και κατάλληλη για τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα.

Το Σχ. 6.6 παρουσιάζει ενδεικτικά ορισμένες επιπολικές ευθείες για το  $1^\circ$  και το  $8^\circ$  στερεοζεύγος οι οποίες ορίστηκαν μέσω του επιπολικού πίνακα από την τρίτη επίλυση. Αντίστοιχα, στο Σχ. 6.7 φαίνονται οι ίδιες ευθείες σε προοπτική θέση (τομή επ’ ευθείας), έπειτα από μετάθεση και στροφή της δεξιάς εικόνας με τις παραμέτρους της τελευταίας επίλυσης.



Σχήμα 6.6. Παράδειγμα ομόλογων επιπολικών ευθειών ( $1^\circ$  και  $8^\circ$  στερεοζεύγος).



Σχήμα 6.7. Ομόλογες επιπολικές ευθείες σε προοπτική θέση ( $1^\circ$  και  $8^\circ$  στερεοζεύγος).

Για λόγους πληρότητας υπολογίστηκαν επίσης οι θέσεις των πόλων που αντιστοιχούν στις

δύο πρώτες γραμμικές επιλύσεις (Πίνακας 6.7).

| Πίνακας 6.7. Θέσεις των πόλων από τις γραμμικές επιλύσεις |               |               |               |               |                 |               |               |               |
|-----------------------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| στερεοζεύγος                                              | <i>lin</i>    |               |               |               | <i>lin_norm</i> |               |               |               |
|                                                           | $x_1$ (pixel) | $y_1$ (pixel) | $x_2$ (pixel) | $y_2$ (pixel) | $x_1$ (pixel)   | $y_1$ (pixel) | $x_2$ (pixel) | $y_2$ (pixel) |
| 1                                                         | 3850.67       | -50.11        | 18043.01      | -197.62       | 3808.73         | -56.01        | 17203.99      | -219.00       |
| 2                                                         | 1071.04       | -51.23        | 1458.33       | 3.55          | 1062.79         | -49.20        | 1445.30       | 5.72          |
| 3                                                         | 8684.42       | -194.05       | -3395.00      | 36.92         | 11086.38        | -186.43       | -3125.37      | 16.37         |
| 4                                                         | 4756.89       | 98.74         | 4995.78       | 112.61        | 5107.38         | 128.70        | 5393.62       | 146.59        |
| 5                                                         | -26423.49     | -1198.18      | -8198.47      | 2486.15       | -77858.01       | -5430.30      | -10695.75     | 2968.92       |
| 6                                                         | 89938.69      | 80.62         | -9466.62      | -344.41       | 272960.89       | 8982.95       | -8825.85      | -612.73       |
| 7                                                         | -954.80       | -257.71       | -845.87       | -209.08       | -962.43         | -216.21       | -853.38       | -175.14       |
| 8                                                         | 9121.12       | -142.98       | 54866.06      | -323.39       | 9069.19         | -143.33       | 53025.48      | -329.41       |
| 9                                                         | 3810.51       | 46.91         | -9442.34      | 20.89         | 3487.09         | 34.01         | -11747.72     | 55.38         |
| 10                                                        | -48632.31     | -929.56       | -19319.72     | -799.65       | -44778.17       | -866.19       | -18885.36     | -790.44       |

Οι θέσεις των πόλων σε αυτές τις επιλύσεις διαφέρουν αρκετά από εκείνες των μη γραμμικών επιλύσεων (έως και αρκετές εκατοντάδες pixel όταν βρίσκονται μακριά από το κέντρο των εικόνων), με εντονότερες τις διαφορές της πρώτης επίλυσης. Η μεγάλη αστάθεια στον προσδιορισμό της θέσης των πόλων είναι γνωστή στην βιβλιογραφία (Luong & Faugeras, 1993 και 1996, Zhang, 1998a), όπου συστηματικοί έλεγχοι με προσομοιωμένα δεδομένα έδειξαν ότι λιγότερο ευαίσθητοι στον θόρυβο των εικονοσυντεταγμένων είναι οι μη γραμμικοί αλγόριθμοι, ενώ λιγότερο ακριβή είναι πάντοτε τα αποτελέσματα της απλής γραμμικής επίλυσης εξαιτίας συστηματικών σφαλμάτων που εισάγονται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων αλλά και της μη δέσμευσης της μηδενικής ορίζουσας του επιπολικού πίνακα. Στις δοκιμές που παρουσιάζονται εδώ, μάλιστα, η διαφοροποίηση της απλής γραμμικής λύσης ως προς τις υπόλοιπες επιλύσεις – όσον αφορά την θέση των πόλων όσο και τις αποστάσεις των σημείων από τις ομόλογες επιπολικές ευθείες (Πίνακας 6.4) – είναι μικρότερη από εκείνη που παρουσιάζεται στην βιβλιογραφία, κυρίως λόγω της χρήσης συστήματος εικονοσυντεταγμένων με αφετηρία το κέντρο των εικόνων (που βρίσκεται κοντά στο κέντρο βάρους των ομόλογων σημείων). Τέλος, η κανονικοποίηση των εικονοσυντεταγμένων και η επιβολή της δέσμευσης μηδενικής ορίζουσας στην δεύτερη επίλυση προσφέρουν σημαντική βελτίωση στον προσδιορισμό του επιπολικού πίνακα, προσεγγίζοντας συχνά τα αποτελέσματα των μη γραμμικών αλγορίθμων. Στα επόμενα παραδείγματα χρησιμοποιούνται οι εκτιμήσεις του επιπολικού πίνακα από την μη γραμμική επίλυση με την “προοπτική” παραμετροποίηση.

## 6.5 3D επιπολική γεωμετρία

Ο επιπολικός πίνακας – αν και προσδιορίζει πλήρως την 2D επιπολική γεωμετρία του στερεοζεύγους (ορίζονται οι επίπεδες δέσμες των επιπολικών ευθειών στα επίπεδα των εικόνων) – δεν δεσμεύει, παρά μόνον εν μέρει, τον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων και την σχετική τους θέση στον χώρο. Οι εικόνες θα μπορούσαν δηλαδή, όπως έχει αναφερθεί, να έχουν ληφθεί με άπειρους συνδυασμούς εσωτερικών και σχετικών προσανατολισμών, οι οποίοι βέβαια αντιστοιχούν σε 3D ανακατασκευές του απεικονιζόμενου χώρου

που διαφέρουν προβολικά από την πραγματικότητα.

### 6.5.1 Επιτολικός κύκλος

Αντικείμενο του Κεφαλαίου 4 της διατριβής ήταν να διατυπωθεί μια πρωτότυπη γεωμετρική μέθοδος για να περιγραφεί αυτή η απειρία δυνατών 3D προοπτικών δεσμών που αντιστοιχούν στον επιτολικό πίνακα ενός ζεύγους εικόνων. Η ευθεία τομής ( $\mathbf{g}$ ) των επιπέδων των δύο εικόνων και η διέδρη γωνία τους ( $\vartheta$ ) δεν δεσμεύονται από τον επιτολικό τους πίνακα και μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα. Η επιλογή της  $\mathbf{g}$  ορίζει την θέση και την στροφή της δεύτερης εικόνας επί του επιπέδου της πρώτης μέσω της δέσμευσης να έρθουν οι δέσμες των επιτολικών ευθειών σε προοπτική θέση, ήτοι να τέμνονται επί της  $\mathbf{g}$ . Στην συνέχεια η γωνία  $\vartheta$  επιτρέπει να προσδιοριστεί η βάση του στερεοζεύγους στον χώρο. Τέλος, μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα δύο σημεία της βάσης ως προβολικά κέντρα των δύο εικόνων και να ολοκληρωθεί με αυτόν τον τρόπο ο προσδιορισμός του εσωτερικού όσο και του σχετικού τους προσανατολισμού. Δεδομένου πως παράλληλες ευθείες  $\mathbf{g}$  αντιστοιχούν σε κοινές γεωμετρικές (αντιστοιχούν σε μετάθεση της δεύτερης εικόνας επί της βάσης), είναι δυνατόν να επιλεγεί τυχαία σημείο  $\mathbf{K}$  στο επίπεδο της πρώτης εικόνας και να θεωρηθούν μόνο οι ευθείες που διέρχονται από αυτό. Σε αυτή την περίπτωση μάλιστα, το σύνολο των θέσεων του πόλου της δεύτερης εικόνας ( $\mathbf{e}_2'$ ) που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές διευθύνσεις της ευθείας  $\mathbf{g}$  ανήκουν στον επιτολικό κύκλο  $\mathbf{C}$ , ο οποίος επίσης διέρχεται από τον πόλο  $\mathbf{e}_1$  της πρώτης εικόνας.

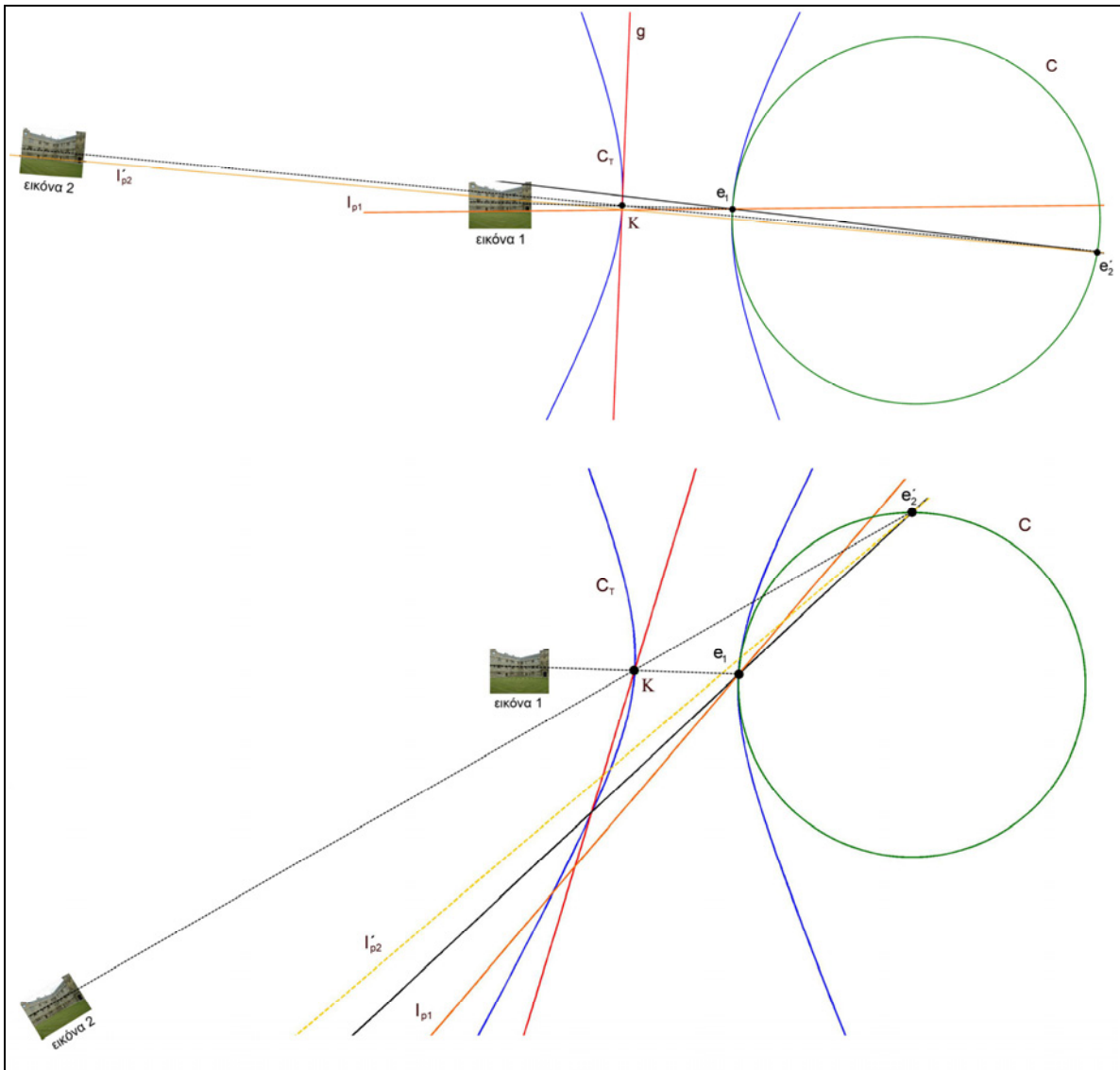
Ο κύκλος  $\mathbf{C}$  μπορεί να προσδιοριστεί από τον επιτολικό πίνακα και το σημείο  $\mathbf{K}$  (βλ. ενότητα 4.4.5). Στον Πίνακα 6.8 φαίνονται για όλα τα στερεοζεύγη των πραγματικών δεδομένων οι συντεταγμένες του κέντρου ( $x_c, y_c$ ) και η ακτίνα ( $R_c$ ) του επιτολικού κύκλου που αντιστοιχεί σε σημείο  $\mathbf{K}$  με συντεταγμένες (2000,0).

| Πίνακας 6.8. Παραδείγματα επιτολικών κύκλων<br>Κέντρο ( $x_c, y_c$ ) και ακτίνα ( $R_c$ ) του επιτολικού κύκλου<br>που αντιστοιχεί σε σημείο $\mathbf{K} = [2000\ 0]$ |               |               |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| στερεοζεύγος                                                                                                                                                          | $x_c$ (pixel) | $y_c$ (pixel) | $R_c$ (pixel) |
| 1                                                                                                                                                                     | 6818.06       | -239.67       | 3015.02       |
| 2                                                                                                                                                                     | 966.27        | -48.14        | 87.52         |
| 3                                                                                                                                                                     | 5211.36       | 163.09        | 5866.09       |
| 4                                                                                                                                                                     | 5337.34       | 84.13         | 110.42        |
| 5                                                                                                                                                                     | -44600.09     | -5630.48      | 35393.25      |
| 6                                                                                                                                                                     | 125039.95     | 8590.56       | 132223.73     |
| 7                                                                                                                                                                     | -882.96       | -180.62       | 76.16         |
| 8                                                                                                                                                                     | 22877.15      | -722.33       | 14059.74      |
| 9                                                                                                                                                                     | 464.37        | 207.11        | 3048.35       |
| 10                                                                                                                                                                    | -25793.69     | -3587.27      | 14635.16      |

Στα Σχ. 6.8 και 6.9<sup>3</sup> φαίνονται οι επιτολικοί κύκλοι  $\mathbf{C}$  του 1<sup>ου</sup> και του 3<sup>ου</sup> στερεοζεύγους, αντίστοιχα, ενώ επιπλέον δείχνονται και οι θέσεις της δεύτερης εικόνας που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ευθείες  $\mathbf{g}$ . Οι ευθείες  $\mathbf{l}_{p1}$ ,  $\mathbf{l}_{p2}'$  είναι οι γεωμετρικοί τόποι του πρωτεύον-

<sup>3</sup> Στο Σχ. 6.9 ο επιτολικός πίνακας αντιστοιχεί σε σημείο  $\mathbf{K} = [6000\ 0]$  για πιο εποπτική παρουσίαση.

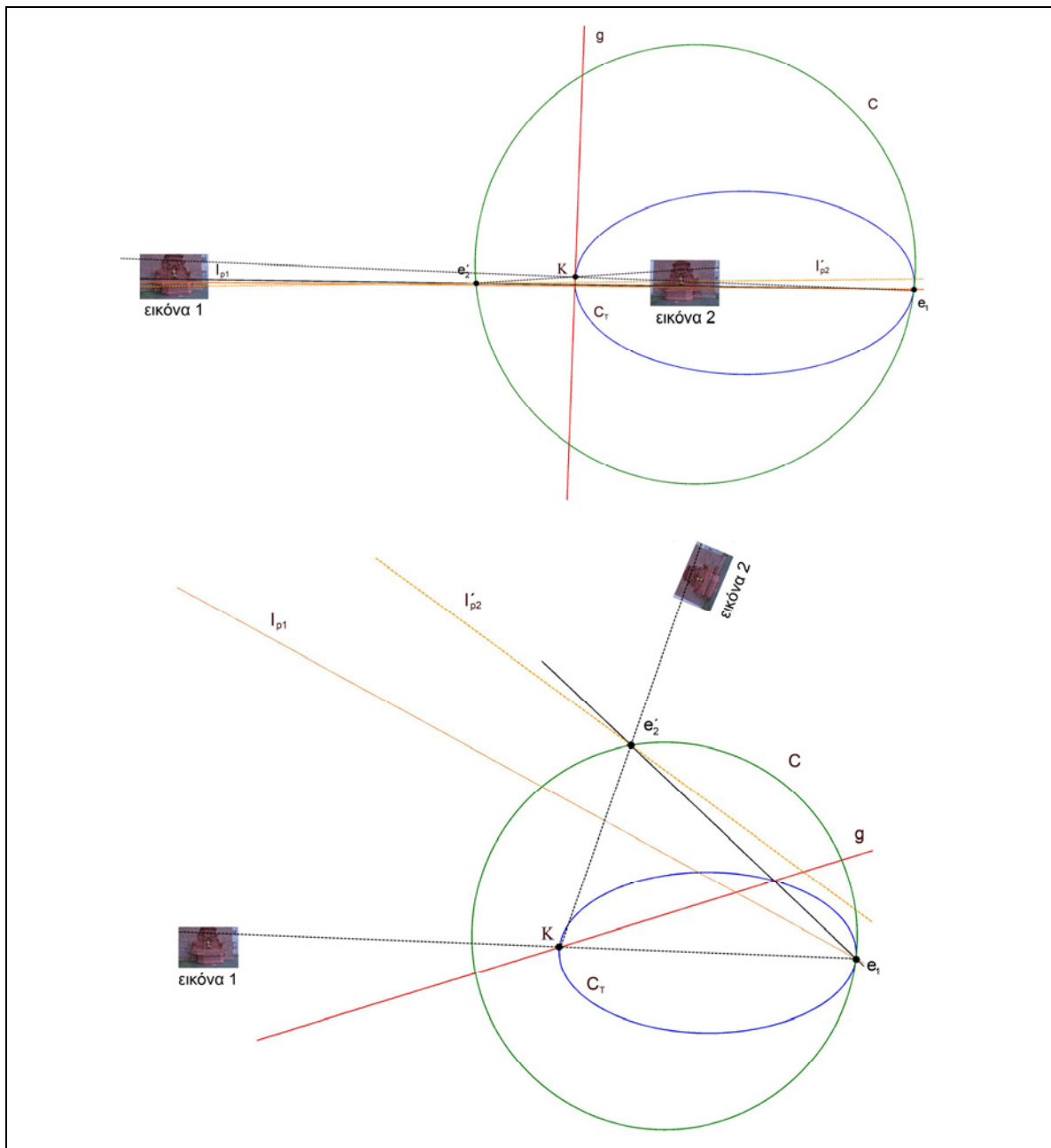
τος σημείου των δύο εικόνων που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένη γωνία  $\vartheta$  των επιπέδων τους ( $160^\circ$  και  $30^\circ$  στις περιπτώσεις του Σχ. 6.8,  $70^\circ$  και στις δύο περιπτώσεις του Σχ. 6.9) και αποτελούν την ορθή προβολή της βάσης στο επίπεδο κάθε μίας (βλ. ενότητα 4.6.2).



Σχήμα 6.8. Επιτολικός κύκλος ( $1^\circ$  στερεοζεύγος).

Η αντιστοίχιση των θέσεων  $e_2'$  του πόλου της δεύτερης εικόνας επί του  $C$  με τις ευθείες  $g$  γίνεται γεωμετρικά μέσω της κωνικής τομής  $C_T$ , η οποία αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο της τομής της  $g$  με την ευθεία  $e_1e_2'$  που συνδέει τους δύο πόλους (βλ. ενότητα 4.5.1). Η τομή της  $g$  με την  $C_T$  ενώνεται με το σημείο  $e_1$ , ορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την ευθεία  $e_1e_2'$ , και το σημείο  $e_2'$  βρίσκεται από την τομή της τελευταίας με τον επιτολικό κύκλο  $C$ . Η αντιστοίχιση μπορεί να γίνει και αντίστροφα, να βρεθεί δηλαδή η  $g$  που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο  $e_2'$ . Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μαθηματικό μοντέλο της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας που συνδέει γραμμικά τα  $e_2'$  και  $g$  (βλ. ενότητα 4.5.2). Τέλος, η απαραίτητη στροφή της δεύτερης εικόνας προκειμένου οι δέσμες των επιτολικών ευθειών να τέμνονται επί της  $g$  είναι ίση με την γωνία της ευθείας  $e_1K$  με την επιτολική της. Η δεύτερη εικόνα πρέπει δηλαδή να στραφεί ώστε η επιτολική της  $e_1K$  να διέρχεται από το  $K$ .



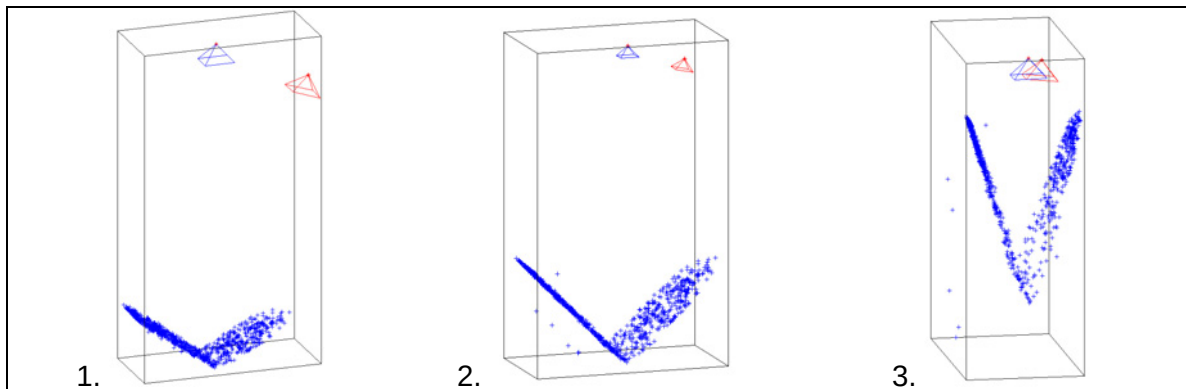
Σχήμα 6.9. Επιπολικός κύκλος (3<sup>ο</sup> στερεοζεύγος).

### 6.5.2 Παραδείγματα εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού

Οι Πίνακες 6.9, 6.10, 6.11 παρουσιάζουν τις τιμές των στοιχείων εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες επιλογές της κλίσης της ευθείας τομής  $g$  και της διέδρης γωνίας  $\vartheta$  (αναφέρονται στο 1<sup>ο</sup> και το 3<sup>ο</sup> στερεοζεύγος των πραγματικών εικόνων και στο ζεύγους 1\_1–1\_2 των προσομοιωμένων δεδομένων). Σε όλες τις περιπτώσεις έχουν επιλεγεί επί της βάσης τα προβολικά κέντρα που αντιστοιχούν σε μηδενική τεταγμένη του πρωτεύοντος σημείου ( $y_{01} = y_{02} = 0$ ). Οι συγκεκριμένες λύσεις συνοδεύονται από τα Σχ. 6.10, 6.11 και 6.12, όπου φαίνονται οι αντίστοιχες 3D ανακατασκευές οι οποίες υπολογίστηκαν εμπροσθοτομικά από τα ομόλογα εικονοσημεία που έλαβαν μέρος στον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα. Σε αυτά τα σχήματα είναι εμφανής η προβολική

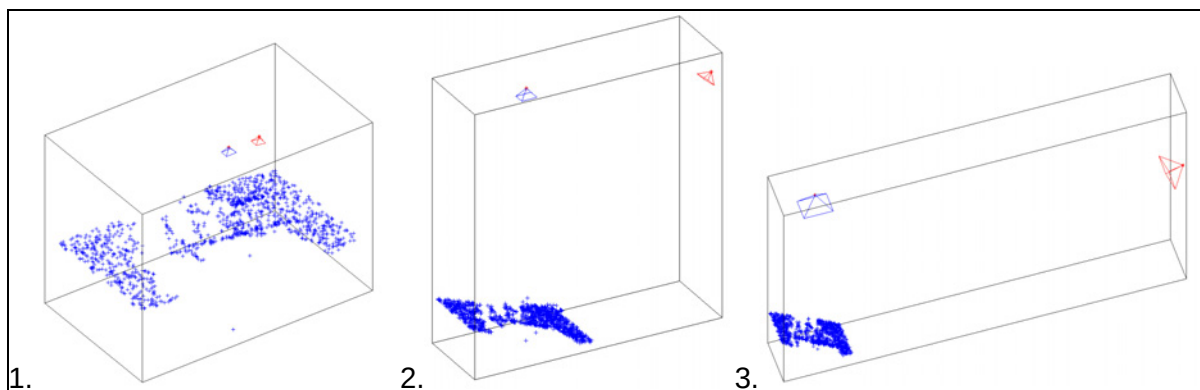
παραμόρφωση των απεικονιζόμενων 3D αντικειμένων.

| Πίνακας 6.9. Παραδείγματα εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού (1 <sup>ο</sup> στερεοζεύγος)<br>κλίση $g = 87.7^\circ$ , γωνίες $\vartheta_1 = 150^\circ$ , $\vartheta_2 = 160^\circ$ και $\vartheta_3 = 170^\circ$ |                  |                  |              |                  |                  |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|--------------|------------------|------------------|---------------|
|                                                                                                                                                                                                                        | $x_{01}$ (pixel) | $y_{01}$ (pixel) | $c_1$ (pix)  | $x_{02}$ (pixel) | $y_{02}$ (pixel) | $c_2$ (pixel) |
| 1                                                                                                                                                                                                                      | -107.9           | 0                | 1732.5       | -84.0            | 0                | 1656.8        |
| 2                                                                                                                                                                                                                      | -95.0            | 0                | 1110.7       | -95.8            | 0                | 1117.5        |
| 3                                                                                                                                                                                                                      | -87.9            | 0                | 543.1        | -102.9           | 0                | 562.6         |
|                                                                                                                                                                                                                        | $b_y$            | $b_z$            | $\omega$ (°) | $\varphi$ (°)    | $\kappa$ (°)     |               |
| 1                                                                                                                                                                                                                      | 0.0132           | -0.4549          | 1.370        | 18.966           | 0.5940           |               |
| 2                                                                                                                                                                                                                      | 0.0098           | -0.2916          | 0.887        | 12.547           | 0.7254           |               |
| 3                                                                                                                                                                                                                      | 0.0080           | -0.1426          | 0.436        | 6.244            | 0.7991           |               |



Σχήμα 6.10. 3D ανακατασκευές που αντιστοιχούν στους προσανατολισμούς του Πίνακα 6.9.

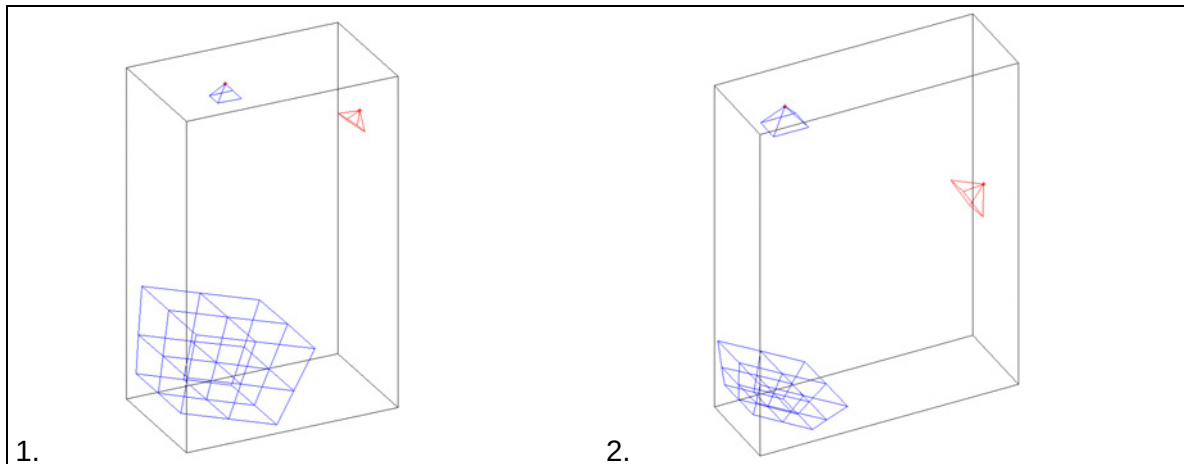
| Πίνακας 6.10. Παραδείγματα εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού (3 <sup>ο</sup> στερεοζεύγος)<br>κλίση $g = 87.9^\circ$ , γωνίες $\vartheta_1 = 10^\circ$ , $\vartheta_2 = 40^\circ$ και $\vartheta_3 = 70^\circ$ |                  |                  |               |                  |                  |               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|---------------|------------------|------------------|---------------|
|                                                                                                                                                                                                                      | $x_{01}$ (pixel) | $y_{01}$ (pixel) | $c_1$ (pixel) | $x_{02}$ (pixel) | $y_{02}$ (pixel) | $c_2$ (pixel) |
| 1                                                                                                                                                                                                                    | -34.8            | 0                | 435.9         | -42.2            | 0                | 425.2         |
| 2                                                                                                                                                                                                                    | -47.9            | 0                | 1697.8        | -27.4            | 0                | 1898.9        |
| 3                                                                                                                                                                                                                    | -77.7            | 0                | 2761.3        | 30.4             | 0                | 4628.6        |
|                                                                                                                                                                                                                      | $b_y$            | $b_z$            | $\omega$ (°)  | $\varphi$ (°)    | $\kappa$ (°)     |               |
| 1                                                                                                                                                                                                                    | -0.0137          | -0.0394          | 0.3681        | 9.993            | 0.269            |               |
| 2                                                                                                                                                                                                                    | -0.0125          | -0.1534          | 1.7510        | 39.968           | -0.335           |               |
| 3                                                                                                                                                                                                                    | -0.0098          | -0.2495          | 5.7162        | 69.896           | -3.695           |               |



Σχήμα 6.11. 3D ανακατασκευές που αντιστοιχούν στους προσανατολισμούς του Πίνακα 6.10.



| Πίνακας 6.11. Παραδείγματα εσωτερικού και σχετικού προσανατολισμού (λήψεις 1_1 και 1_2)<br>κλίση $g = 96.5^\circ$ , γωνίες $\vartheta_1 = 40^\circ$ και $\vartheta_2 = 60^\circ$ |                  |                  |               |                  |                  |               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|---------------|------------------|------------------|---------------|
|                                                                                                                                                                                  | $x_{01}$ (pixel) | $y_{01}$ (pixel) | $c_1$ (pixel) | $x_{02}$ (pixel) | $y_{02}$ (pixel) | $c_2$ (pixel) |
| 1                                                                                                                                                                                | -11.1            | 0                | 1150.85       | 13.6             | 0                | 1125.3        |
| 2                                                                                                                                                                                | -65.7            | 0                | 1918.40       | 60.2             | 0                | 1711.9        |
|                                                                                                                                                                                  | $b_y$            | $b_z$            | $\omega$ (°)  | $\varphi$ (°)    | $\kappa$ (°)     |               |
| 1                                                                                                                                                                                | 0.1506           | -0.4641          | -2.779        | 39.919           | -4.206           |               |
| 2                                                                                                                                                                                | 0.1726           | -0.7736          | -5.723        | 59.834           | -1.921           |               |



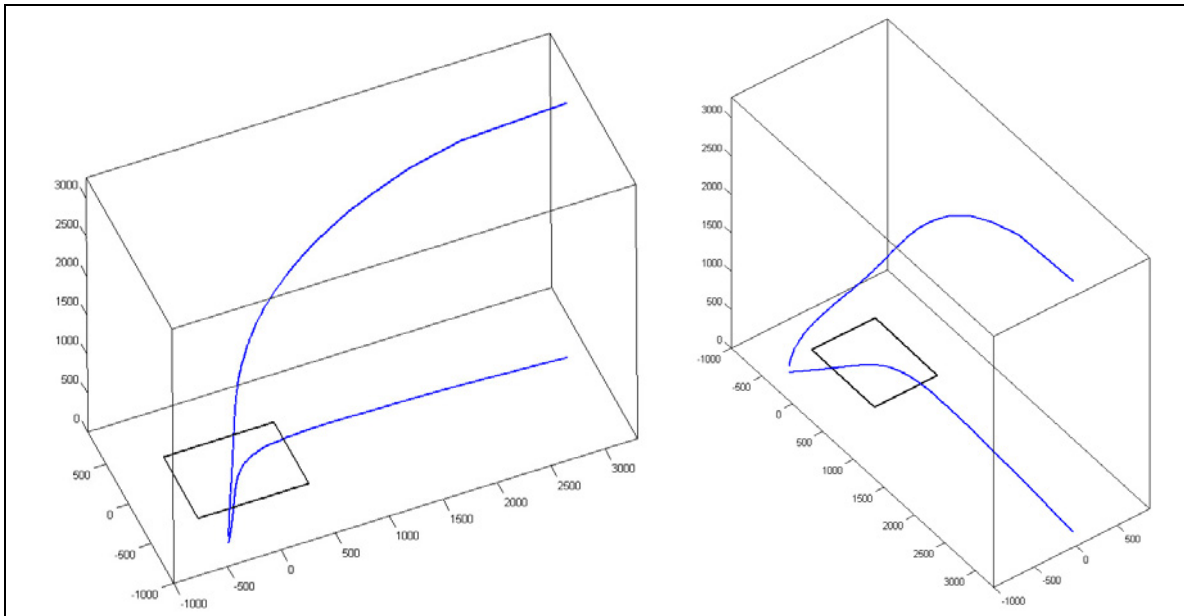
Σχήμα 6.12. 3D ανακατασκευές που αντιστοιχούν στους προσανατολισμούς του Πίνακα 6.11.

### 6.5.3 Δέσμευση κοινού εσωτερικού προσανατολισμού

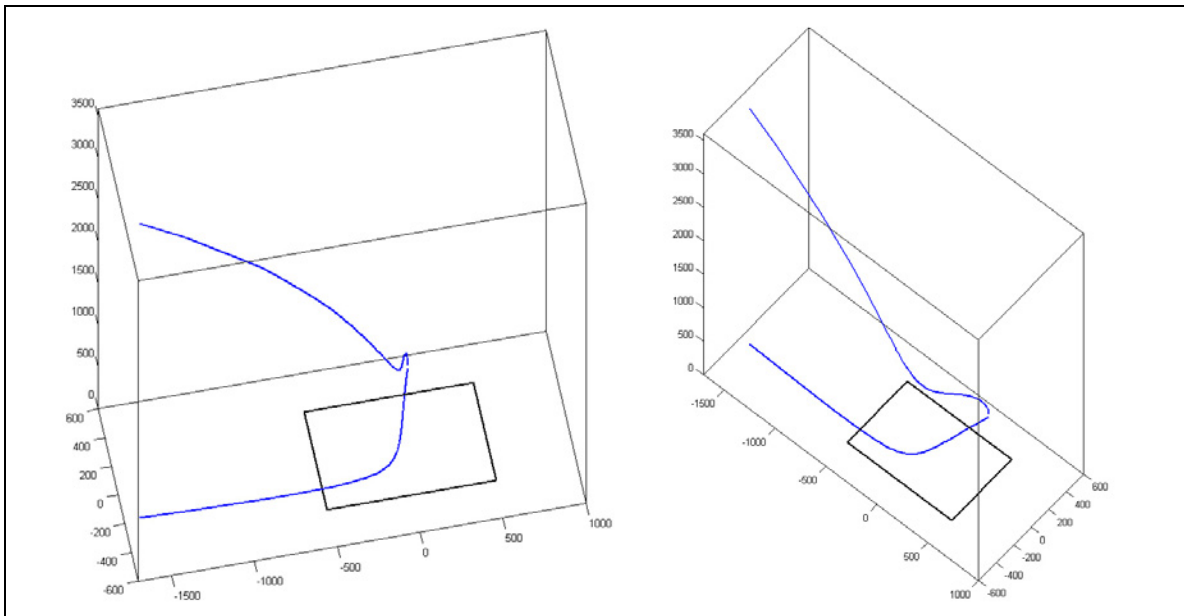
Στα προηγούμενα θεωρήθηκε πως δεν υπάρχει καμία a priori πληροφορία για τον εσωτερικό προσανατολισμό των εικόνων. Είναι όμως γνωστό ότι, με εξαίρεση το 10° στερεοζεύγος, οι δύο εικόνες κάθε ζεύγους της πειραματικής εφαρμογής προέρχονται από την ίδια μηχανή λήψης. Στην ενότητα 4.8.3 δείχθηκε πώς η γνώση αυτή, καίτοι δεν επαρκεί για την βαθμονόμηση της μηχανής, περιορίζει τις (συμβατές με τον επιτολικό πίνακα) λύσεις του εσωτερικού τους προσανατολισμού.

Στα Σχ. 6.13 και 6.14 παρουσιάζονται αντίστοιχα για το 1° και το 3° στερεομοντέλο οι γεωμετρικοί τόποι των δυνατών θέσεων του προβολικού κέντρου (σημείου λήψης) ως προς το επίπεδο της εικόνας, επομένως και οι γεωμετρικοί τόποι του πρωτεύοντος σημείου καθώς και τα αντίστοιχα μεγέθη της σταθεράς της μηχανής. Όπως φαίνεται σε αυτά τα σχήματα, η θέση του προβολικού κέντρου ανήκει σε μία 3D καμπύλη, η ορθή προβολή της οποίας στην φωτοευαίσθητη επιφάνεια της μηχανής συνιστά τον γεωμετρικό τόπο του πρωτεύοντος σημείου.

Υπενθυμίζεται ότι για την πλήρη βαθμονόμηση της μηχανής είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός δεύτερου στερεοζεύγους (δηλαδή είτε μίας τρίτης εικόνας είτε όμως και ενός ανεξάρτητου στερεοζεύγους από την ίδια μηχανή), μέσω του οποίου μπορεί να προσδιοριστεί μία δεύτερη αντίστοιχη 3D καμπύλη. Ο κοινός εσωτερικός προσανατολισμός προσδιορίζεται στην τομή των δύο γεωμετρικών τόπων.



Σχήμα 6.13. Γεωμετρικός τύπος κοινού εσωτερικού προσανατολισμού (1<sup>ο</sup> στερεοζεύγος).



Σχήμα 6.14. Γεωμετρικός τύπος κοινού εσωτερικού προσανατολισμού (3<sup>ο</sup> στερεοζεύγος).

## 6.6 Μερική βαθμονόμηση μηχανής

Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η δυνατότητα για μερική βαθμονόμηση των μηχανών λήψης, υπό την παραδοχή πως το πρωτεύον σημείο είναι γνωστό (εδώ θεωρείται ότι βρίσκεται στο κέντρο των εικόνων). Βασικός στόχος εν προκειμένω είναι να συγκριθούν τα αποτελέσματα των αλγορίθμων που διατυπώνονται στην διατριβή (5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο) με εκείνα από αντίστοιχους αλγορίθμους της πρόσφατης βιβλιογραφίας της Όρασης Υπολογιστών. Εξετάζονται περιπτώσεις εικονοζευγών με διαφορετική όσο και με κοινή σταθερά μηχανής. Βασική ιδιότητα όλων των αλγορίθμων που ελέγχθηκαν είναι ότι δεν απαιτούν αρχικές τιμές, γεγονός που τους καθιστά κατάλληλους για εφαρμογές αυτοματοποίησης.

### 6.6.1 Εικόνες με διαφορετική σταθερά μηχανής

Για τον υπολογισμό δύο διακριτών τιμών σταθεράς της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα υλοποιήθηκαν και δοκιμάστηκαν τρεις αλγόριθμοι κλειστής μορφής (closed form):

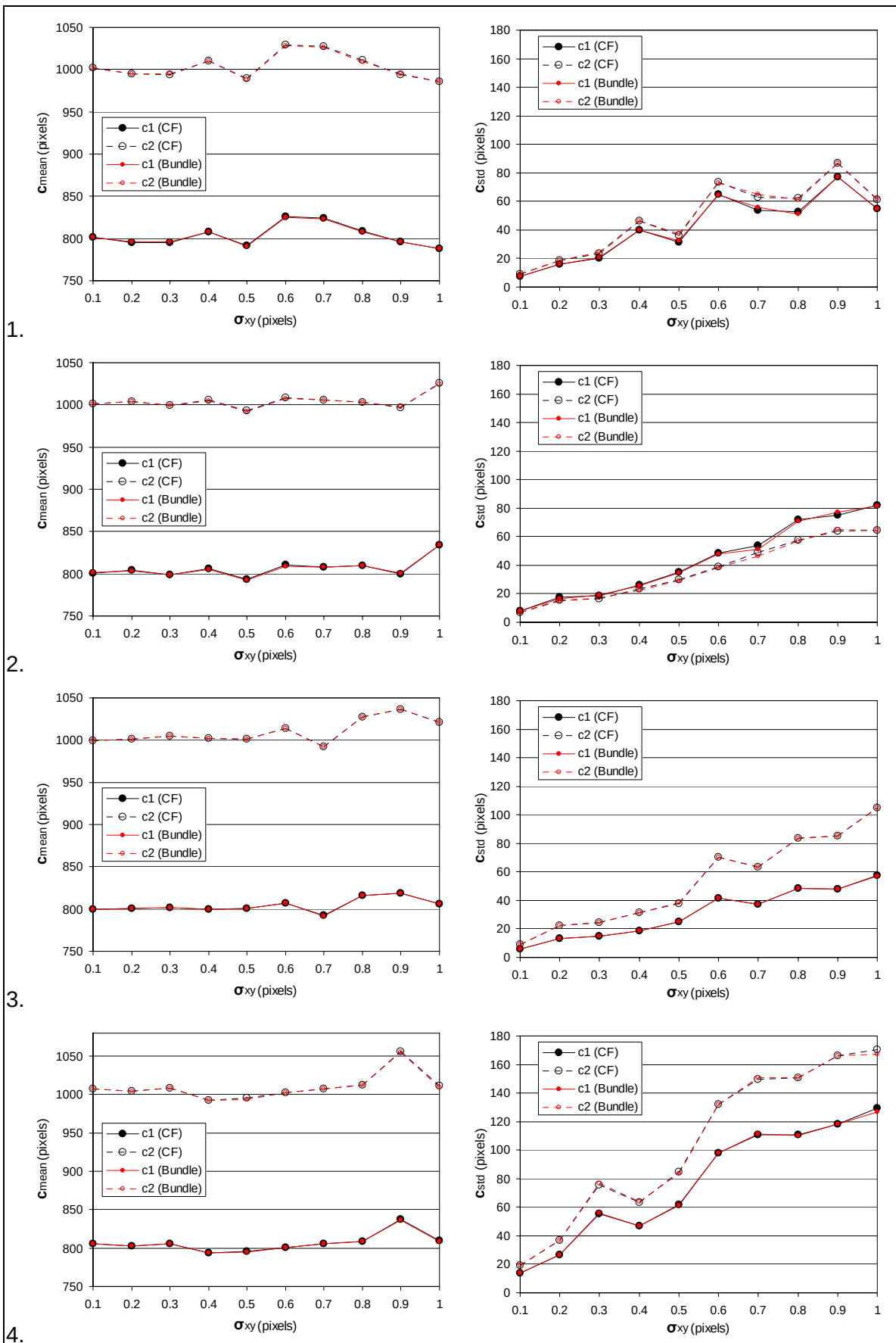
- ο αλγόριθμος ο οποίος διατυπώθηκε στην ενότητα 5.3.1 βάσει της ισότητας μεταξύ δίδρων γωνιών επιπολικών επιπέδων που υπολογίζονται ανεξάρτητα στις δύο εικόνες
- ο αλγόριθμος των Newsam et al. (1996), που βασίζεται στις αλγεβρικές ιδιότητες που οφείλει να ικανοποιεί ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας (βλ. ενότητα 3.3.1)
- ο αλγόριθμος του Bougnoux (1998), που στηρίζεται στην επίλυση των εξισώσεων Kyrpa (βλ. ενότητα 3.4.2).

Επίσης σε κάθε περίπτωση πραγματοποιήθηκε και μια τέταρτη επίλυση με την μέθοδο της δέσμης χωρίς χρήση φωτοσταθερών σημείων. Η μέθοδος αυτή είναι, βέβαια, μη γραμμική και απαιτεί αρχικές τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους. Εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι εκτιμήσεις για την σταθερά της μηχανής από τους τρεις προαναφερθέντες αλγορίθμους, ενώ για τις παραμέτρους στροφής και μετάθεσης της δεύτερης εικόνας οι αρχικές τιμές υπολογίστηκαν μέσω του αλγορίθμου που περιγράφηκε στην ενότητα 5.4.

Όλοι οι αλγόριθμοι δοκιμάστηκαν σε προσομοιωμένα δεδομένα, τα οποία καλύπτουν τέσσερις γεωμετρικές λήψεις διαφορετικών λόγων Β/Η και γωνιών σύγκλισης των οπτικών αξόνων (βλ. ενότητα 6.2.2). Οι αληθείς τιμές της σταθεράς των μηχανών είναι  $c_1 = 800$  pixel και  $c_2 = 1000$  pixel. Ακόμα, για να μελετηθεί η συμπεριφορά των αλγορίθμων σε συνθήκες που προσεγγίζουν την κρίσιμη γεωμετρία για τον υπολογισμό δύο τιμών σταθεράς μηχανής (συνεπίπεδοι οπτικοί άξονες), στις εικόνες του 4<sup>ου</sup> παραδείγματος (4\_1–4\_2) οι εξωτερικοί προσανατολισμοί επιλέχθηκαν με τρόπο ώστε τα επιπολικά επίπεδα των οπτικών αξόνων να σχηματίζουν διέδρη γωνία  $1.5^\circ$ .

Προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία των αλγορίθμων στον θόρυβο των μετρήσεων των ομόλογων σημείων έγινε το εξής πείραμα. Στις προσομοιωμένες συντεταγμένες των ομόλογων εικονοσημείων των τεσσάρων παραδειγμάτων προστέθηκαν τυχαία σφάλματα κανονικής κατανομής. Η διαδικασία αυτή επαναλήφθηκε για διαφορετικές τιμές τυπικής απόκλισης  $\sigma_{xy}$  των τυχαίων σφαλμάτων (από 0.1 έως 1 pixel). Για να ελεγχθεί ταυτόχρονα και η επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων, για κάθε τιμή της τυπικής απόκλισης πραγματοποιήθηκαν 20 διαφορετικές επιλύσεις. Από αυτές υπολογίστηκαν κατόπιν, για κάθε επίπεδο σφάλματος, η μέση τιμή των εκτιμήσεων της σταθεράς της μηχανής ( $c_{mean}$ ) και η τυπική της απόκλιση ( $c_{std}$ ). Τα αποτελέσματα για τις τιμές αυτές παρουσιάζονται για τα 4 στερεοζεύγη των προσομοιωμένων δεδομένων στα διαγράμματα του Σχ. 6.15<sup>4</sup>, όπου αριστερά εμφανίζονται οι μέσες τιμές ( $c_{mean}$ ) και δεξιά οι τυπικές αποκλίσεις ( $c_{std}$ ). Δεδομένου ότι τα αποτελέσματα από τους τρεις πρώτους αλγορίθμους συμπίπτουν, στα διαγράμματα αναφέρονται μόνο οι κατηγορίες  $c1$  (CF) και  $c2$  (CF), όπου η ένδειξη CF υποδηλώνει ότι πρόκειται για αλγορίθμους κλειστής μορφής (closed form), και  $c1$  (Bundle) και  $c2$  (Bundle) που αναφέρονται στην επίλυση με την μέθοδο της δέσμης χωρίς φωτοσταθερά.

<sup>4</sup> Η αρίθμηση των διαγραμμάτων αναφέρεται στον αριθμό του στερεοζεύγους των προσομοιωμένων δεδομένων (πχ. 1: εικόνες 1\_1, 1\_2 κοκ.).



Σχήμα 6.15. Υπολογισμός δύο τιμών σταθεράς της μηχανής από προσομοιωμένα δεδομένα για διαφορετικά επίπεδα θορύβου (μέσες τιμές από 20 επαναλήψεις σε κάθε επίπεδο θορύβου).

Οι εκτιμήσεις της σταθεράς της μηχανής από τους τρεις πρώτους αλγόριθμους ήταν, σε όλα τα παραδείγματα, μεταξύ τους ίσες και ταυτόχρονα πολύ κοντά σε εκείνες από την μέθοδο της δέσμης. Επιβεβαιώνεται, έτσι, ότι ο αλγόριθμος που προτείνεται εδώ είναι ισοδύναμος με εκείνους από την βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών. Από τα διαγράμματα του  $c_{\text{mean}}$  φαίνεται πως, γενικά, οι μέσες τιμές των εκτιμήσεων της σταθεράς της μηχανής τείνουν σε τιμές που δεν διαφέρουν από τις αληθείς τιμές πέραν του 5%. Ωστόσο στα διαγράμματα της τυπικής απόκλισης  $c_{\text{std}}$ , που είναι πιο ενδεικτικά για την σταθερότητα και την επαναληψιμότητα των αποτελεσμάτων, φαίνεται ότι η διασπορά των λύσεων περί την μέση τιμή πράγματι αυξάνει ανάλογα με το επίπεδο των σφαλμάτων των εικονοσυντεταγμένων και άρα αυξάνει και η αβεβαιότητα υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής. Η λύση γίνεται σαφώς πιο ασταθής όταν η λήψη προσεγγίζει την κρίσιμη γεωμετρία, όπως φαίνεται από τις διπλάσιες τιμές των τυπικών αποκλίσεων στην περίπτωση του 4<sup>ου</sup> στερεοζεύγους. Όσον αφορά την επίδραση του λόγου B/H των ζευγών, δεν φαίνεται σαφής υπεροχή κάποιας λύσης, ίσως γιατί παρά τις μεταξύ τους διαφορές οι λόγοι σε όλα τα στερεοζεύγη γενικά δεν είναι δυσμενείς (σημειώνεται πάντως πως το 2<sup>ο</sup> στερεοζεύγος, που έχει τον πιο ευνοϊκό λόγο B/H, εμφανίζει την μικρότερη διασπορά τιμών).

Ακόμα, ο Πίνακας 6.11 παρουσιάζει τις εκτιμήσεις για τις τιμές της σταθεράς μηχανής των εικόνων του Ερεχθείου (10<sup>ο</sup> στερεοζεύγος), οι οποίες προέρχονται από διαφορετικές ψηφιακές μηχανές λήψης. Και εδώ τα αποτελέσματα από τους κλειστούς αλγόριθμους μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμης ακρίβειας με εκείνα από την μέθοδο της δέσμης καθώς οι διαφορές των δύο επιλύσεων είναι πολύ μικρότερες από την αβεβαιότητα προσδιορισμού των σταθερών της μηχανής. Στο Σχ. 6.23 της επόμενης ενότητας φαίνεται η 3D ανακατασκευή που αντιστοιχεί στην επίλυση με την μέθοδο της δέσμης.

| Πίνακας 6.11. Υπολογισμός διαφορετικών τιμών σταθεράς της μηχανής (pixel) |            |            |                    |                      |
|---------------------------------------------------------------------------|------------|------------|--------------------|----------------------|
| στερεοζεύγος                                                              | $c_1$ (CF) | $c_2$ (CF) | $c_1$ (Bundle)     | $c_2$ (Bundle)       |
| 10                                                                        | 1597.5     | 2298.3     | $1600.9 \pm 134.7$ | $2303.23 \pm 194.25$ |

### 6.6.2 Εικόνες με κοινή σταθερά της μηχανής

Για την περίπτωση εικόνων με κοινή σταθερά της μηχανής επαναλήφθηκε το πείραμα της προηγούμενης ενότητας, με την διαφορά πως οι εικονοσυντεταγμένες των προσομοιωμένων λήψεων υπολογίστηκαν με σταθερά της μηχανής  $c_1 = c_2 = 900$  pixel.

Εδώ δοκιμάστηκαν και συγκρίθηκαν 6 διαφορετικές μέθοδοι:

- ο αλγόριθμος των Newsam et al. (1996) για κοινή σταθερά μηχανής, ο οποίος βασίζεται (όπως και ο αλγόριθμός τους που εξετάστηκε στην προηγούμενη ενότητα) στις αλγεβρικές ιδιότητες που οφείλει να ικανοποιεί ο δεσμευμένος επιπολικός πίνακας (βλ. ενότητα 3.3.1).
- ο αλγόριθμος του Sturm (2001) που στηρίζεται στην επίλυση των εξισώσεων Kruppa μέσω της ανάλυσης ιδιοζουσών τιμών (SVD) (βλ. ενότητα 3.4.2).
- ο αλγόριθμος του Bougnoux (1998). Στην περίπτωση αυτή ως κοινή σταθερά μηχανής θεωρήθηκε η μέση τιμή των δύο διακριτών τιμών  $c_1$  και  $c_2$ .

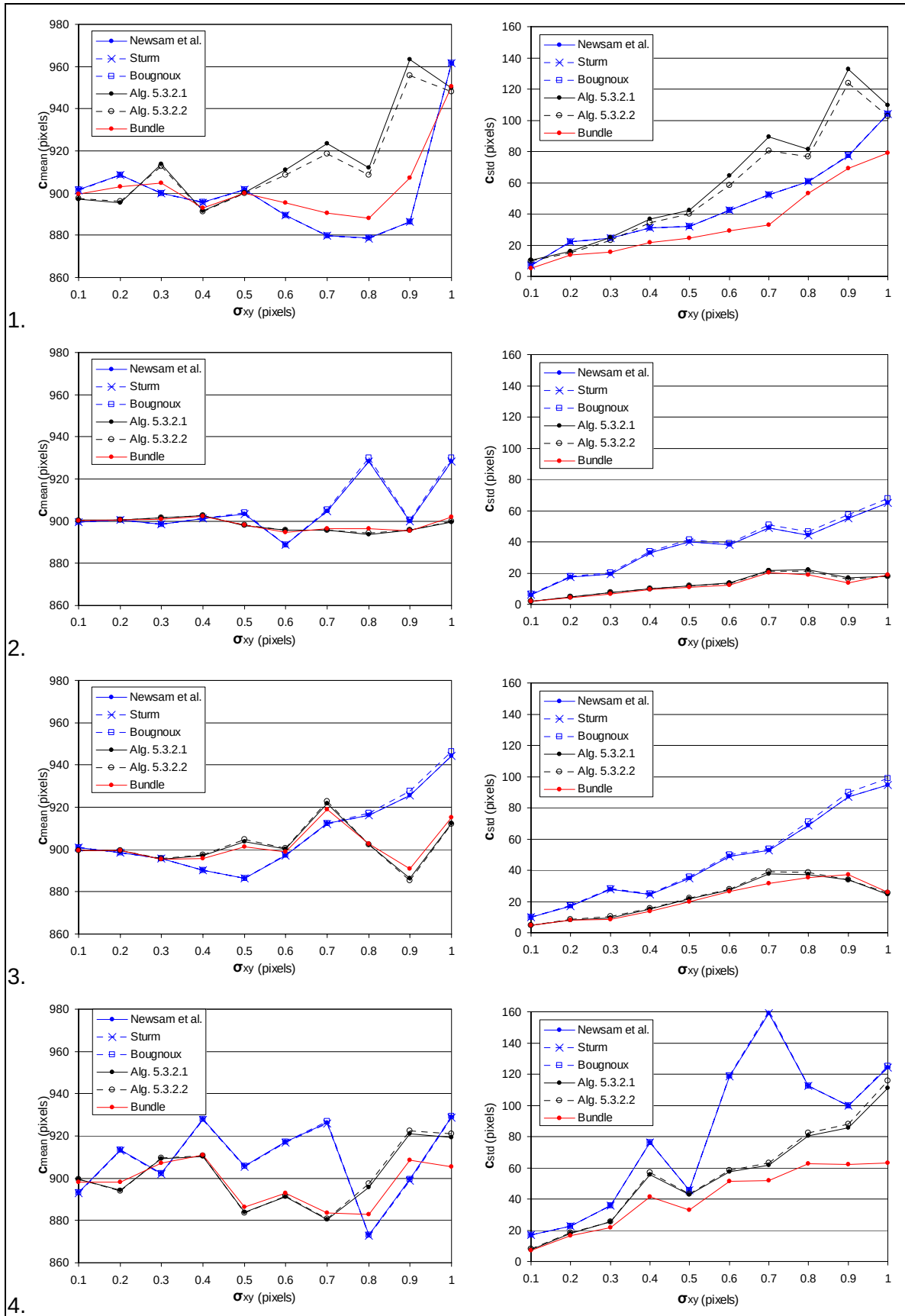
- Ο αλγόριθμος ο οποίος διατυπώθηκε στην ενότητα 5.3.2.1 της διατριβής και στηρίζεται στην ισότητα των τιμών της διέδρης γωνίας δύο επιπολικών επιπέδων που υπολογίζονται ανεξάρτητα στις δύο εικόνες.
- Ο γραμμικός αλγόριθμος που διατυπώθηκε στην ενότητα 5.3.2.2 της διατριβής και εκφράζει την ισότητα των τιμών της διέδρης γωνίας των επιπολικών επιπέδων των οπτικών αξόνων.
- Μη γραμμική επίλυση με την μέθοδο της δέσμης χωρίς φωτοσταθερά σημεία.

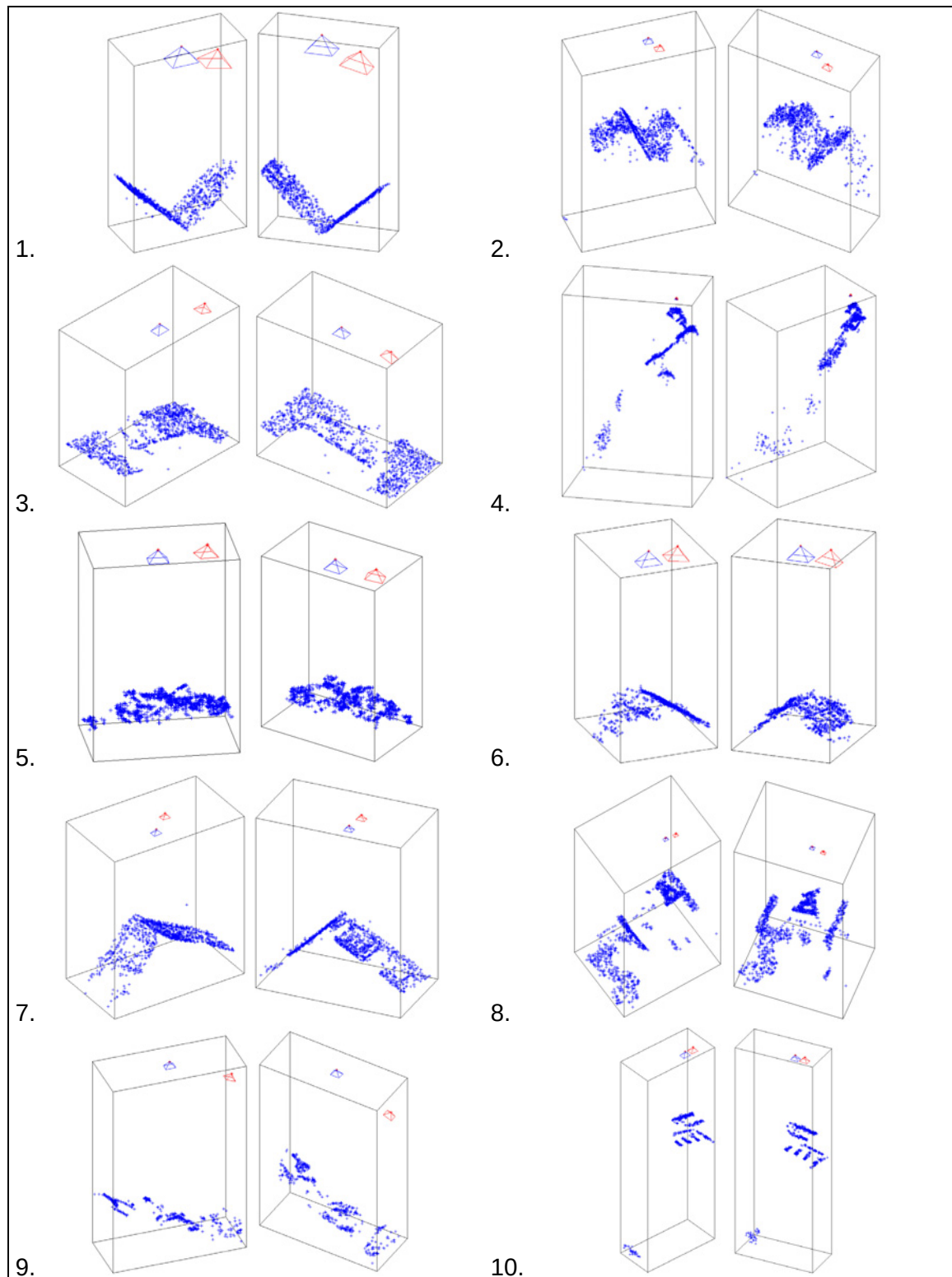
Τα διαγράμματα του Σχ. 6.16 εμφανίζουν, για την εφαρμογή όλων των μεθόδων στα προσομοιωμένα δεδομένα, τις μέσες τιμές των εκτιμήσεων της σταθεράς της μηχανής ( $c_{\text{mean}}$ ) και την τυπική τους απόκλιση ( $c_{\text{std}}$ ) συναρτήσει, όπως προηγουμένως, του μέσου σφάλματος των εικονοσυντεταγμένων.

Ακόμα, με τις ίδιες μεθόδους υπολογίστηκαν οι τιμές της σταθεράς της μηχανής για τα 9 ζεύγη των πραγματικών εικόνων που προέρχονται από κοινή μηχανή λήψης (το 10<sup>ο</sup> ζεύγος αναφέρεται σε διαφορετικές σταθερές μηχανής και χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα). Τα αποτελέσματά τους εμφανίζονται στον Πίνακα 6.12 μαζί με τις τιμές  $c_{\text{data}}$  για τα 5 πρώτα μοντέλα, οι οποίες είναι εκτιμήσεις της σταθεράς της μηχανής από επιλύσεις των ερευνητών που διέθεσαν τις εικόνες. Στην επίλυση με την μέθοδο της δέσμης υπολογίστηκαν επίσης οι θέσεις στον χώρο των ομόλογων σημείων που είχαν μετρηθεί αυτόματα, σχηματίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο ένα αδρό 3D μοντέλο των απεικονιζόμενων αντικειμένων (Σχ. 6.17).

| Πίνακας 6.12. Υπολογισμός κοινής σταθεράς της μηχανής (pixel) |                     |                    |                       |               |               |                     |                   |
|---------------------------------------------------------------|---------------------|--------------------|-----------------------|---------------|---------------|---------------------|-------------------|
| στερεοζεύγος                                                  | $C_{\text{Newsam}}$ | $C_{\text{Sturm}}$ | $C_{\text{Bougnoux}}$ | $C_{5.3.2.1}$ | $C_{5.3.2.2}$ | $C_{\text{Bundle}}$ | $C_{\text{data}}$ |
| 1                                                             | 1296.5              | 1295.2             | 1296.8                | 1164.9        | 1165.3        | $1175.8 \pm 20.1$   | 1165              |
| 2                                                             | 1207.4              | 1206.9             | 1210.1                | 1097.1        | 1097.7        | $1091.3 \pm 7.7$    | 1165              |
| 3                                                             | 908.9               | 906.8              | 908.9                 | 872.2         | 872.0         | $868.5 \pm 17.6$    | 920               |
| 4                                                             | 989.4               | 983.9              | 989.4                 | 851.1         | 854.8         | $935.0 \pm 11.8$    | 920               |
| 5                                                             | 1816.2              | 1815.1             | 1816.2                | 1758.0        | 1757.4        | $1817.1 \pm 73.2$   | 1830              |
| 6                                                             | 1372.3              | 1367.9             | 1372.2                | 1352.0        | 1351.9        | $1371.8 \pm 49.1$   | —                 |
| 7                                                             | —                   | —                  | —                     | 1058.4        | 1058.0        | $1064.8 \pm 5.5$    | —                 |
| 8                                                             | 2345.4              | 2341.9             | 2346.0                | 1512.8        | 1513.8        | $1596.9 \pm 6.5$    | —                 |
| 9                                                             | 196.3               | 180.3              | 194.6                 | 1628.4        | 1614.8        | $1086.5 \pm 30.0$   | —                 |

Η συμπεριφορά των αλγορίθμων για υπολογισμό κοινής σταθεράς της μηχανής είναι διαφορετική από εκείνων της προηγούμενης ενότητας. Οι εκτιμήσεις γενικά εμφανίζουν μεγαλύτερη αστάθεια και σε ορισμένες περιπτώσεις η μέση τιμή τους δεν προσεγγίζει την αληθή τιμή (900 pixel για τις προσομοιωμένες εικόνες), ιδιαίτερα όταν το μέσο σφάλμα των εικονοσυντεταγμένων ξεπερνά το 0.5 pixel. Ακόμα, σε όλα τα παραδείγματα οι εκτιμήσεις από την μέθοδο της δέσμης είναι πιο κοντά στην αληθή τιμή σε σχέση με εκείνες από τους κλειστούς αλγορίθμους, και ταυτόχρονα εμφανίζουν μικρότερη διασπορά και συνεπώς μικρότερη αβεβαιότητα. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί ίσως να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η δέσμευση κοινής σταθεράς μηχανής δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιείται για την συγκεκριμένη θέση του πρωτεύοντος σημείου.





Σχήμα 6.17. 3D ανακατασκευές που αντιστοιχούν στην λύση της μεθόδου της δέσμης.

Όντως, ακόμα και αν οι εικόνες πράγματι προέρχονται από λήψεις με ίδιο εσωτερικό προσανατολισμό, τυχαία σφάλματα στις εικονοσυντεταγμένες των ομόλογων σημείων ενδέχεται να οδηγήσουν σε εκτίμηση του επιπολικού πίνακα στον οποίο αντιστοιχεί γεωμετρικός τύπος κοινού εσωτερικού προσανατολισμού (βλ. ενότητα 6.5.3) που δεν διέρχεται από το θεωρούμενο ως πρωτεύον σημείο (εν προκειμένω το κέντρο των εικόνων). Η υπεροχή της



μεθόδου της δέσμης οφείλεται στην δυνατότητα για ταυτόχρονο υπολογισμό της βέλτιστης θέσης των πόλων και των παραμέτρων εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων, κάτι που δεν συμβαίνει στην περίπτωση των κλειστών αλγορίθμων όπου οι θέσεις των πόλων έχουν ήδη δεσμευτεί από τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα.

Σε ό,τι αφορά την σύγκριση των πέντε κλειστών αλγορίθμων, εκείνοι των Newsam et al. (1996) και Sturm (2001) δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα, τα οποία προσεγγίζουν την μέση τιμή των εκτιμήσεων διαφορετικής σταθεράς της μηχανής από τον αλγόριθμο του Bougnoux (1998). Ταυτόχρονα, στην πλειονότητα των περιπτώσεων οι εκτιμήσεις από τους δύο νέους αλγορίθμους που προτάθηκαν εδώ πλησιάζουν περισσότερο τις τιμές αλλά και την διασπορά που δίνει η μέθοδος της δέσμης, ακόμα και στην περίπτωση του 4<sup>ου</sup> προσομοιωμένου ζεύγους όπου οι λήψεις προσεγγίζουν την κρίσιμη γεωμετρία (συνεπίπεδοι οπτικοί άξονες και προβολικά κέντρα που ισαπέχουν από το σημείο τομής των οπτικών αξόνων). Εξαίρεση αποτελούν οι περιπτώσεις του 1<sup>ου</sup> στερεοζεύγους των προσομοιωμένων δεδομένων και του 4<sup>ου</sup> και 5<sup>ου</sup> ζεύγους των πραγματικών εικόνων, όπου υπερέχουν οι αλγόριθμοι από την βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών. Ακόμα, οι νέοι αλγόριθμοι της διατριβής έδωσαν σε όλες τις περιπτώσεις αποτελέσματα που επαρκούσαν ως αρχικές τιμές για να επιτευχθεί σύγκλιση της μεθόδου της δέσμης. Αντιθέτως, σε κάποιες επιλύσεις στο πείραμα των προσομοιωμένων δεδομένων που αντιστοιχούσαν σε μέσο σφάλμα εικονοσυντεταγμένων μεγαλύτερο από 0.7 pixel τα αποτελέσματα των αλγορίθμων από την Όραση Υπολογιστών δεν οδήγησαν σε σύγκλιση της μεθόδου της δέσμης. Το ίδιο συνέβη και στις περιπτώσεις του 7<sup>ου</sup> και 9<sup>ου</sup> στερεοζεύγους των πραγματικών εικόνων όπου προέκυψαν, αντίστοιχα, αδυναμία λύσης και άστοχες αρχικές τιμές (βλ. Πίνακα 6.12).

### 6.6.3 Γενικές παρατηρήσεις

Τα προηγηθέντα παραδείγματα έδειξαν πως η παραδοχή ότι το πρωτεύον σημείο βρίσκεται στο κέντρο των εικόνων επιτρέπει υπολογισμό της σταθεράς της μηχανής ακόμα και όταν αυτή διαφέρει στις δύο εικόνες. Ωστόσο η αβεβαιότητα προσδιορισμού της, που συναρτάται με τα σφάλματα των εικονοσυντεταγμένων, είναι συχνά ιδιαίτερα αυξημένη. Κατά συνέπεια, η προσέγγιση αυτή δεν προτείνεται ως γενική μέθοδος βαθμονόμησης για τον προσδιορισμό παραμέτρων εσωτερικού προσανατολισμού οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν σε μελλοντικές φωτογραμμετρικές εφαρμογές. Μολαταύτα, οι αλγόριθμοι που εξετάστηκαν αντιπροσωπεύουν ισχυρά εργαλεία σε περιπτώσεις πχ. όπως αυτή του 10<sup>ου</sup> στερεομοντέλου (για το οποίο δεν υπάρχει καμία a priori εκτίμηση για τον εσωτερικό προσανατολισμό των μηχανών), στον υπολογισμό αρχικών τιμών για την επίλυση πολυεικονικών συνορθώσεων με την μέθοδο της δέσμης και, κυρίως, σε εφαρμογές αυτοματισμού όπου απαιτούνται, άμεσα και χωρίς αρχικές τιμές, εκτιμήσεις της σταθεράς της μηχανής.

## Επίλογος και Συμπεράσματα

### 7.1 Σύνοψη και πρωτοτυπία της διατριβής

Αντικείμενο της διατριβής αποτέλεσε η μελέτη της γεωμετρίας δύο επικαλυπτόμενων εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές. Αφετηρία στάθηκε η αντιμετώπιση του ζητήματος στον προβολικό χώρο από ερευνητές του επιστημονικού πεδίου της Όρασης Υπολογιστών, οι οποίοι έδειξαν ότι όταν είναι άγνωστος ο εσωτερικός προσανατολισμός των εικόνων μπορεί, αντί του σχετικού τους προσανατολισμού, να προσδιοριστεί από απλές ομολογίες εικονοσημείων, και μάλιστα γραμμικά, ο επιπολικός τους πίνακας. Ο πίνακας αυτός έχει 7 βαθμούς ελευθερίας, αντιστοιχεί στο μαθηματικό μοντέλο της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας και περιγράφει την μη αμφιμονοσήμαντη προβολική αντιστοιχία μεταξύ εικονοσημείων και επιπολικών ευθειών. Η αντιστοίχιση αυτή πραγματοποιείται απευθείας στα επίπεδα των εικόνων, χωρίς δηλαδή να μεσολαβούν άμεσα οι οπτικές ακτίνες και τα επιπολικά επίπεδα (ο προσδιορισμός των οποίων προϋποθέτει τόσο τον εσωτερικό όσο και τον σχετικό προσανατολισμό των εικόνων). Ο επιπολικός πίνακας περιγράφει στην ουσία την 2D επιπολική γεωμετρία του στερεοζεύγους, δηλαδή ισοδυναμεί με προσδιορισμό των πόλων και των 2D δεσμών των επιπολικών ευθειών. Στην γεωμετρία αυτή, βέβαια, αντιστοιχεί απειρία διαφορετικών 3D κεντρικών προβολών και ανακατασκευασμένων αντικειμένων που συνδέονται μεταξύ τους προβολικά.

Στο πλαίσιο της εξέτασης των γεωμετρικών ιδιοτήτων του επιπολικού πίνακα, η συνεισφορά της παρούσας διατριβής, πέραν της συστηματικής παρουσίασης των αποτελεσμάτων από την σύγχρονη βιβλιογραφία, ακολουθεί τρεις βασικές κατευθύνσεις. Επιγραμματικά, λοιπόν, στην διατριβή:

- διατυπώθηκε μια νέα παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα,

- μελετήθηκε στον 3D Ευκλείδειο χώρο η απειρία των γεωμετριών που αντιστοιχούν σε δεδομένη 2D επιπολική γεωμετρία
- και, παράλληλα, αναπτύχθηκαν νέοι “κλειστοί” αλγόριθμοι υπολογισμού της σταθεράς της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα υπό την παραδοχή ότι είναι γνωστή η θέση του πρωτεύοντος σημείου.

Ειδικότερα, η νέα παραμετροποίηση του επιπολικού πίνακα που προτείνεται στην διατριβή στηρίζεται στην διαπίστωση πως με κατάλληλη μετάθεση και στροφή στο επίπεδο (έννοιες που ανήκουν στην Ευκλείδεια γεωμετρία), δύο 2D προβολικές δέσμες ευθειών – που στην γενική περίπτωση τέμνονται επί κωνικής τομής – μπορούν να έρθουν σε δεδομένη προοπτική θέση, να τέμνονται δηλαδή επί δεδομένης ευθείας. Τα στοιχεία του επιπολικού πίνακα ορίστηκαν μαθηματικά εκ νέου, συναρτήσκει της θέσης των δύο πόλων (4 παράμετροι) και των 3 παραμέτρων μετάθεσης και στροφής στο επίπεδο. Οι διατυπωθείσες σχέσεις επιτρέπουν την εξαγωγή των νέων παραμέτρων από τον επιπολικό πίνακα όσο όμως και τον απευθείας υπολογισμό τους από ομόλογα εικονοσημεία. Στην πρακτική εφαρμογή του προηγούμενου κεφαλαίου δείχθηκε μάλιστα ότι η χρήση αυτής της νέας “προοπτικής” παραμετροποίησης για τον μη γραμμικό υπολογισμό του επιπολικού πίνακα δίνει ισοδύναμα αποτελέσματα με μη γραμμικές επιλύσεις που βασίζονται στην παραμετροποίηση κατά Luong et al. (1993) και Luong & Faugeras (1996) και χρησιμοποιούνται συχνά στην βιβλιογραφία.

Παράλληλα, η αναζήτηση στον 3D Ευκλείδειο χώρο του συνόλου των διαφορετικών κεντρικών προβολών που αντιστοιχούν στον ίδιο επιπολικό πίνακα βασίστηκε στο γεγονός ότι για να ανήκουν οι ομόλογες επιπολικές ευθείες σε κοινό επίπεδο θα πρέπει να τέμνονται επί της ευθείας τομής των επιπέδων των εικόνων. Δείχθηκε πως η διεύθυνση της ευθείας αυτής όσο και η δίδεξη γωνία των επιπέδων των εικόνων είναι ανεξάρτητες του επιπολικού πίνακα και μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα. Για κάθε συνδυασμό τους η ευθεία της βάσης του στερεοζεύγους ορίζεται από τους πόλους των εικόνων, και δύο τυχαία σημεία της μπορούν να επιλεγούν ως προβολικά κέντρα. Προκύπτουν έτσι 4 βαθμοί ελευθερίας (διεύθυνση ευθείας τομής των επιπέδων των εικόνων, δίδεξη γωνία τους, θέση προβολικών κέντρων επί της βάσης), οι οποίοι δεν δεσμεύονται από τον επιπολικό πίνακα και περιγράφουν την απειρία των συνδυασμών σχετικού και εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων που είναι συμβατοί με την 2D επιπολική τους γεωμετρία. Ο αριθμός τους, αθροζόμενος με τους 7 βαθμούς ελευθερίας του επιπολικού πίνακα, ισούται με τον συνολικό αριθμό βαθμών ελευθερίας του σχετικού (5 παράμετροι) και των εσωτερικών προσανατολισμών δύο εικόνων σημειακής οπής ( $3 + 3 = 6$  παράμετροι). Ακόμα, διατυπώθηκαν συγκεκριμένοι γεωμετρικοί τόποι που αντιστοιχούν σε μεταβολές των τεσσάρων ανεξάρτητων γεωμετρικών παραμέτρων του στερεοζεύγους, αλλά και σε δεσμεύσεις των παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων. Η ευκλείδεια αντιμετώπιση που υιοθετήθηκε εδώ, συγκρινόμενη με τις αμιγώς προβολικές και αλγεβρικές προσεγγίσεις της σύγχρονης βιβλιογραφίας, θεωρείται ότι διευκόλυνε την κατανόηση των πολλαπλών γεωμετριών που αντιστοιχούν στον επιπολικό πίνακα αλλά και της ουσιαστικής διάκρισης μεταξύ εννοιών της 2D επιπολικής γεωμετρίας και του σχετικού προσανατολισμού των εικόνων.

Τέλος, στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της διατριβής διατυπώθηκαν με διαφορετική, αλλά ευκλείδεια και πάλι, προσέγγιση μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν την 2D επιπολική γεωμετρία με τις

παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού των εικόνων. Οι σχέσεις αυτές εκφράζουν την ισότητα των διέδρων γωνιών που σχηματίζονται από τις πλευρές τετραέδρων οριζόμενων από επιπολικά επίπεδα των εικόνων και επέτρεψαν να διατυπωθούν νέοι αλγόριθμοι μερικής βαθμονόμησης των μηχανών λήψης από τον επιπολικό πίνακα. Μπορούν να θεωρηθούν, έτσι, ως μια μορφή ευκλείδειου ισοδύναμου των προβολικών εξισώσεων Kruppa των Faugeras & Maybank (1992) που ερμηνεύουν τις δεσμεύσεις στον εσωτερικό προσανατολισμό ως δεσμεύσεις στην απεικόνιση μιας μιγαδικής κωνικής τομής του επιπέδου του απείρου (βλ. ενότητα 3.4.1.2).

Οι νέοι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν εδώ για τον υπολογισμό της σταθεράς της μηχανής από τον επιπολικό πίνακα συγκρίθηκαν με αντίστοιχους αλγορίθμους από την βιβλιογραφία της Όρασης Υπολογιστών και δείχθηκε ότι δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα στην περίπτωση εικόνων με διαφορετικές σταθερές μηχανής. Σε εικόνες, μάλιστα, με κοινή σταθερά μηχανής τα αποτελέσματα των αλγορίθμων της διατριβής βρίσκονται συχνά πιο κοντά (τουλάχιστον στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν) στις αληθείς τιμές και στις εκτιμήσεις από επιλύσεις με την μέθοδο της δέσμης, οι οποίες κατά κανόνα εμφανίζουν την βέλτιστη συμπεριφορά απέναντι στα τυχαία σφάλματα των εικονοσυντεταγμένων των ομόλογων εικονοσημείων.

## 7.2 Γενικότερα σχόλια και παρατηρήσεις

Πέραν αυτών, αξίζει να παρουσιαστούν ορισμένα περαιτέρω συμπεράσματα, ή και σκέψεις, που προέκυψαν από την διατριβή. Μία πρώτη γενική παρατήρηση αφορά την σημασία της προβολικής γεωμετρίας στην γεωμετρική μελέτη του στερεοζεύγους. Από την παρουσίαση των προϊόντων της έρευνας στον χώρο της Όρασης Υπολογιστών κατέστη σαφές πως η έννοια της 2D επιπολικής γεωμετρίας είναι στην βάση της προβολικής, αλλά και πως η γεωμετρία του ζεύγους εικόνων μπορεί συνολικά να περιγραφεί, με συνέπεια και πληρότητα, εξ ολοκλήρου στον προβολικό χώρο. Ακόμα και στην προσέγγιση που υιοθετήθηκε στην παρούσα διατριβή, η οποία αφορά την μελέτη της γεωμετρίας των εικόνων στον ευκλείδειο χώρο, έγινε συχνά χρήση, τόσο στις αποδείξεις όσο και στην διατύπωση των μαθηματικών σχέσεων, προβολικών ιδιοτήτων. Αλλού, βέβαια, η ευκλείδεια προσέγγιση επέτρεψε καλύτερη κατανόηση ορισμένων γεωμετρικών ιδιοτήτων των εικόνων, καθώς είναι κοντινότερη στην συνήθη ανθρώπινη αντίληψη του χώρου.

Συμπληρωματικά στα προαναφερθέντα, είναι αξιοσημείωτο πως η χρήση ομογενών συντεταγμένων διευκόλυνε σε αρκετές περιπτώσεις την διατύπωση σύνθετων μαθηματικών σχέσεων της διατριβής. Σημαντικό πλεονέκτημά τους αποτελεί η δυνατότητά τους να εκφράζουν αναλυτικά, μέσω γραμμικής άλγεβρας, τόσο προβολικές όσο και ευκλείδειες γεωμετρικές σχέσεις. Έτσι, ολόκληρες σειρές διαδοχικών γεωμετρικών κατασκευών μπόρεσαν να αποδοθούν ως αλληλουχίες από γινόμενα πινάκων.

Ακόμα, καθοριστικός για την μελέτη της γεωμετρίας του στερεοζεύγους στάθηκε ο ρόλος των πόλων των εικόνων. Στην τυπική αντιμετώπιση του σχετικού προσανατολισμού των εικόνων, όπου δηλαδή ο εσωτερικός τους προσανατολισμός είναι γνωστός, τόσο η βάση του ζεύγους όσο και οι επιπολικές ευθείες ορίζονται μέσω των προβολικών κέντρων των

εικόνων. Οι πόλοι – καίτοι σχεδόν πάντοτε μνημονεύονται στα φωτογραμμετρικά εγχειρίδια – σπάνια χρησιμοποιούνται περαιτέρω. Αλλά στην περίπτωση εικόνων από μη βαθμονομημένες μηχανές ο ορισμός των προβολικών κέντρων δεν είναι δυνατός. Αντιθέτως, οι πόλοι προσδιορίζονται μέσω του επιπολικού πίνακα και βάσει αυτών ορίζονται στην συνέχεια οι επιπολικές ευθείες. Ακόμα, οι πόλοι επέτρεψαν την διερεύνηση της γεωμετρίας των εικόνων στον 3D χώρο, αφού μέσω αυτών κατασκευάζονται γεωμετρικά οι πιθανές θέσεις της βάσης και των προβολικών κέντρων των εικόνων. Ενδεικτικά της σημασίας των πόλων, αλλά και του κατά κάποιον τρόπο “υποτιμημένου” ρόλου τους στην φωτογραμμετρική βιβλιογραφία, είναι και τα λόγια του Thompson (1968) σε δημοσίευσή του όπου χρησιμοποιεί το μαθηματικό μοντέλο της μη αντιστρέψιμης ετερογραφίας για να ορίσει τον δεσμευμένο επιπολικό πίνακα. Μεταξύ άλλων αναφέρει: *“Συγκεκριμένα τονίζεται η προβολική σημασία των πόλων, και αν αυτό εγείρει την κριτική ότι δεν έχουν πρακτική σημασία η κριτική αυτή θα έπρεπε να είχε απευθυνθεί, εδώ και χρόνια, σε συγγραφείς φωτογραμμετρικών εγχειριδίων που δεν αντιστέκονται στο να τους αναφέρουν, χωρίς ωστόσο να τους χρησιμοποιούν στο ελάχιστο. Τουλάχιστον εδώ γίνεται μια κάποια χρήση τους”*.

Επισημαίνεται ακόμα πως, πέραν του αναμφισβήτητου θεωρητικού ενδιαφέροντος, η νέα αντιμετώπιση του (τυπικού για την φωτογραμμετρία) προβλήματος της διεικονικής 3D ανακατασκευής μέσω του επιπολικού πίνακα ανοίγει προοπτικές και για νέες πρακτικές εφαρμογές. Οι γραμμικοί αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν επιτρέπουν να υπολογίζονται αρχικές τιμές για τον σχετικό προσανατολισμό των εικόνων ή για ορισμένες παραμέτρους του εσωτερικού προσανατολισμού των μηχανών λήψης, αλλά και αρχικές τιμές για πολυεικονικές συννορθώσεις χωρίς φωτοσταθερά. Αυτό τις καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμες σε εφαρμογές όπου απαιτείται πλήρης αυτοματισμός είτε ο εσωτερικός προσανατολισμός των εικόνων μεταβάλλεται συνεχώς (πχ. αυτόματη πλοήγηση ρομπότ, εντοπισμός εμποδίων, υποβοήθηση οδήγησης αυτοκινήτων, παρακολούθηση μηχανής στον κινηματογράφο κ.λπ). Ακόμα, η δυνατότητα αξιοποίησης μη βαθμονομημένων μηχανών καθιστά την νέα προσέγγιση ισχυρό εργαλείο σε εφαρμογές αρχιτεκτονικής φωτογραμμετρίας, επιτρέποντας πχ. την ανακατασκευή μνημείων ακόμα και από τυχαίες εικόνες του Διαδικτύου. Ενδεικτική για την κατεύθυνση αυτή είναι πρόσφατη εργασία των Agarwal et al. (2009), στην οποία παρουσιάζεται η αυτόματη δημιουργία λεπτομερών 3D μοντέλων για περίφημα μνημεία, αλλά και για τμήματα του ιστορικού κέντρου πόλεων, από χιλιάδες εικόνες του Διαδικτύου με προσεγγίσεις που βασίζονται στον επιπολικό πίνακα. Αντίστοιχες τεχνικές μπορούν να εφαρμοστούν ακόμα και για την ανακατασκευή κτιρίων και μνημείων που δεν διατηρούνται και για τα οποία υπάρχει ιστορικό φωτογραφικό αρχείο από μη μετρητικές μηχανές, ή ακόμα και κομμένες εικόνες (πχ. καρτ ποστάλ), ενώ μπορούν παράλληλα να αξιοποιηθούν πληροφορίες για το σχήμα τους (καθετότητες ή παραλληλίες ευθειών και επιπέδων κ.λπ).

### 7.3 Σκέψεις για περαιτέρω έρευνα στο αντικείμενο της διατριβής

Στην επίλογο της διατριβής και σχετικά με το συγκεκριμένο αντικείμενό της σημειώνονται, τέλος, ορισμένα ανοιχτά ζητήματα που χρήζουν περαιτέρω μελέτης καθώς και κάποια θέματα προς τα οποία θα μπορούσε να επεκταθεί η ερευνητική προσπάθεια που παρουσιάστηκε. Έτσι, ένα ζητούμενο θα ήταν να διατυπωθεί μια αυστηρή μαθηματική έκφραση για την 3D καμπύλη του γεωμετρικού τόπου του κοινού εσωτερικού προσανατολισμού που

παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.8.3. Εδώ η καμπύλη αυτή έχει οριστεί ως ο χώρος των λύσεων διαφορετικών πολυωνύμων  $4^{\text{ου}}$  βαθμού (ως προς το συνημίτονο της διέδρης γωνίας των επιπέδων των εικόνων) που αντιστοιχούν στις διαφορετικές θέσεις του πόλου της δεύτερης εικόνας επί του επιπολικού κύκλου. Παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης θα επέτρεπε την μελέτη των ιδιοτήτων της και επιπλέον, στην περίπτωση περισσότερων εικόνων από την ίδια μηχανή, τον μαθηματικό προσδιορισμό του σημείου τομής των διαφορετικών καμπυλών και άρα του κοινού εσωτερικού προσανατολισμού. Η γενικότερη μελέτη της γεωμετρίας εικόνων πλέον των δύο από μη βαθμονομημένες μηχανές αποτελεί επίσης αντικείμενο έρευνας προς το οποίο μπορεί να επεκταθεί η προσέγγιση που ακολουθήθηκε εδώ.

Σε όλα τα σημεία της διατριβής η μελέτη επικεντρώθηκε στην περίπτωση εικόνων κεντρικής προβολής, δηλαδή εικόνων που ακολουθούν το μοντέλο της μηχανής σημειακής οπής (pinhole camera). Έτσι, μια ακόμα δυνατή και χρήσιμη επέκταση της έρευνας θα αποτελούσε η ενσωμάτωση επιπλέον παραμέτρων του εσωτερικού προσανατολισμού – όπως η μη ορθογωνικότητα των αξόνων (skewness) και η διαφορική κλίμακα (aspect ratio), αλλά και οι συντελεστές των διαστrophών του φακού – στα γεωμετρικά μοντέλα που παρουσιάστηκαν.

Τέλος, ένα θέμα που υπάγεται στην ευρύτερη ερευνητική περιοχή της παρούσας διατριβής είναι η εξέταση της δυνατότητας να αξιοποιηθούν, υπό την μορφή δεσμεύσεων κατά τον υπολογισμό του επιπολικού πίνακα, *a priori* γνωστές προβολικές γεωμετρικές ιδιότητες των απεικονιζόμενων αντικειμένων (πχ. η συνευθειακότητα σημείων, η συνεπιπεδότητα σημείων ή ευθειών, η σύγκλιση σε σημείο ή ευθεία, αντίστοιχα, παράλληλων ευθειών ή επιπέδων κ.λπ.).

# 8

## Βιβλιογραφία

### Συντομογραφίες

|              |                                                                                |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| <i>3DPVT</i> | International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission   |
| <i>ACCV</i>  | Proc. Asian Conference on Computer Vision                                      |
| <i>AIJ</i>   | Artificial Intelligence Journal                                                |
| <i>BMVC</i>  | British Machine Vision Conference                                              |
| <i>CA</i>    | Communications in Algebra                                                      |
| <i>CACM</i>  | Communications of the Association for Computing Machinery                      |
| <i>CGA</i>   | IEEE Transactions on Computer Graphics and Applications                        |
| <i>CVGIU</i> | Computer Vision, Graphics, and Image Understanding                             |
| <i>CVIU</i>  | Computer Vision and Image Understanding                                        |
| <i>CVPR</i>  | Proc. IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition |
| <i>ECCV</i>  | Proc. European Conference on Computer Vision                                   |
| <i>IAPRS</i> | International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing                    |
| <i>ICCV</i>  | Proc. IEEE International Conference on Computer Vision                         |
| <i>ICIP</i>  | Proc. IEEE International Conference on Image Processing                        |
| <i>ICPR</i>  | Proc. IEEE International Conference on Pattern Recognition                     |
| <i>IJCV</i>  | The International Journal of Computer Vision                                   |
| <i>IJIST</i> | International Journal of Imaging Systems and Technology                        |
| <i>ISPRS</i> | ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing                             |
| <i>IVC</i>   | Image and Vision Computing                                                     |
| <i>JASP</i>  | EURASIP Journal on Applied Signal Processing                                   |
| <i>JGG</i>   | Journal for Geometry and Graphics                                              |
| <i>JMIV</i>  | Journal of Mathematical Imaging and Vision                                     |
| <i>JOSA</i>  | Journal of the Optical Society of America                                      |
| <i>Ph</i>    | Photogrammetria                                                                |
| <i>PAMI</i>  | IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence                 |
| <i>PE</i>    | Photogrammetric Engineering                                                    |
| <i>PERS</i>  | Photogrammetric Engineering and Remote Sensing                                 |
| <i>PR</i>    | Pattern Recognition                                                            |
| <i>PhR</i>   | The Photogrammetric Record                                                     |
| <i>VMV</i>   | Proc. International Workshop on Vision, Modeling and Visualization             |

- Abdel-Aziz, Y., Karara, H., 1971. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry. *Symposium on Close-Range Photogrammetry*, American Society of Photogrammetry, Urbana, pp. 1-18.
- Ackermann, F., 1984. Digital image correlation: performance and potential application in photogrammetry. *PhR*, 11(64), pp. 429-439.
- Agarwal, S., Snavely, N., Simon, I., Seitz S., Szeliski, R., 2009. Building Rome in a day. *ICCV*, pp. 72-79.
- Atkinson, K.B., 1996. *Close Range Photogrammetry and Machine Vision*. Whittles Publishing, Scotland.
- Anandan, P., Hanna, K., Kumar, R., 1994. Shape recovery from multiple views: a parallax based approach. *ICPR*, pp. 685-688.
- Avidan, S., Shashua, A., 1997. Novel view synthesis in tensor space. *CVPR*, pp. 1034-1040.
- Barreto, J.P., Daniilidis, K., 2005. Fundamental matrix for cameras with radial distortion. *ICCV*, pp. 625-632.
- Bartoli, A., 2002. On the non-linear optimization of projective motion using minimal parameters. *ECCV*, vol. 2, pp. 340-354.
- Bartoli, A., Sturm, P., 2004. Non-linear estimation of the fundamental matrix with minimal parameters. *PAMI*, 26(4), pp. 426-432.
- Bartoli, A., Sturm P., Horaud R., 2001. Structure and motion from two uncalibrated views using points on planes. *ICCV*, pp. 593-598.
- Batra, D., Nabbe, B., Hebert, M., 2007. An alternative formulation for five point relative pose problem. *Proc. IEEE Workshop on Motion and Video Computing*, Feb. 23-24, Austin, Texas.
- Bay, H., Tuytelaars, T., van Gool, L., 2006. SURF: Speeded up robust features. *ECCV*, pp. 404-417.
- Beardsley, P., 1992. *Applications of Projective Geometry to Robot Vision*. PhD Thesis, Robotics Research Group, Dept. of Engineering Science, Oxford University, pp. 184.
- Bender, L.U., 1971. *Analytical Photogrammetry: A Collinear Theory*. Final Technical Report RADC-TR-71-147, Rome Air Development Center, New York.
- Birchfield, S., 1998. *An Introduction to Projective Geometry (for Computer Vision)*. URL: <http://vision.stanford.edu/~birch/projective/>
- Bondyfalat, D., Bougnoux, S., 1998. Imposing Euclidean constraints during self-calibration processes. *SMILE '98*, Lecture Notes on Computer Science, vol. 1506, Springer, pp. 224-235.
- Bopp, H., Kraus, H., 1978. An orientation and calibration method for non-topographic applications. *PERS*, 44(9), pp. 1191-1196.
- Boufama, B., Mohr, R., 1995. Epipole and fundamental matrix estimation using the virtual



- parallax property. *ICCV*, pp. 1030-1036.
- Boufama, B., Mohr, R., Veillon, F., 1993. Euclidean constraints for uncalibrated reconstruction. *ICCV*, pp. 466-470.
- Bougnoux, S., 1998. From projective to Euclidean space under any practical situation, a criticism of self-calibration. *ICCV*, pp. 790–796.
- Brandstätter, G., 1996. Fundamentals of algebro-projective photogrammetry. *Sitzungsberichte, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II, Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften*, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Vol. II, 205, pp. 57–109.
- Briechele, K., Hanebeck, U.D., 2001. Template matching using fast normalized cross correlation. *Proc. SPIE, Optical Pattern Recognition XII*, vol. 4387, pp. 95-102.
- Brooks, M.J., de Agapito, L., Huynh, D.Q., Baumela, L., 1996. Direct methods for self-calibration of a moving stereo head. *ECCV*, pp. 415-426.
- Brown, D.C. 1958. *A Solution to the General Problem of Multiple Station Analytical Stereotriangulation*. Technical Report RCA-MTP Data Reduction Technical Report No. 43 (or AFMTC TR 58-8), Patrick Airforce Base, Florida.
- Brown, D.C., 1971. Close-range camera calibration. *PE*, 37(8), pp. 855-866.
- Buchanan, T., 1993. Photogrammetry and projective geometry – a historical survey. *Integrating Photogrammetric Techniques with Scene Analysis and Machine Vision*, *Proc. SPIE*, vol. 1944, pp. 82-91.
- Carlsson, S., 1993. The double algebra: an effective tool for computing invariants in computer vision. *Applications of Invariance in Computer Vision*, Joint European-US Workshop, Azores, Portugal, pp. 145-164.
- Chai, J., Ma, S., 1998. Robust epipolar geometry estimation using genetic algorithm. *ACCV, Lecture Notes in Computer Science*, Springer, vol. 1351, pp. 272-279.
- Chandraker, M.K., Agarwal, S., Kriegman, D.J., Belongie, S., 2007. Globally optimal affine and metric upgrades in stratified autocalibration. *ICCV*, pp. 1-8.
- Chang, B., 1986. The formulae of the relative orientation for non-metric camera. *IAPRS*, 26(5), pp. 14-22.
- Chesi, G., Garulli, A., Vicino, A., Cipolla, R., 2002. Estimating the fundamental matrix via constrained least-squares: a convex approach. *PAMI*, 24(3), pp. 397–401.
- Coxeter, H.S.M., 1969. *Introduction to Geometry*. 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York, London.
- Criminisi A., 1999. *Accurate Visual Metrology from Single and Multiple Images*. Ph.D. Thesis. Robotics Research Group, Dept. of Engineering Science, Oxford University, pp. 184.
- Csurka, G., Faugeras, O., 1995. Computing three-dimensional projective invariants from a pair of images using the Grassmann-Cayley algebra. *Proc. Europe-China Workshop*

- on Geometrical Modeling & Invariants for Computer Vision*, pp. 150–157.
- Csurka, G., Zeller, C., Zhang, Z., Faugeras, O.D., 1997. Characterizing the uncertainty of the fundamental matrix. *CVGIU*, 68(1), pp. 18-36.
- Γραμματικόπουλος Λ., 2007. *Γεωμετρική Πληροφορία από Μεμονωμένες Εικόνες στην Φωτογραμμετρία και την Όραση Υπολογιστών*. Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, σσ.140.
- Das, G.B., 1949. A mathematical approach to problems in photogrammetry. *Empire Survey Review*, 10(73), pp. 131-137.
- de Agapito, L., Hartley, R., Hayman, E., 1999. Linear calibration of a rotating and zooming camera. *CVPR*, pp. 15-21.
- de Agapito, L., Hayman, E., Reid, I., 1998. Self-calibration of a rotating camera with varying intrinsic parameters. *BMVC*, pp. 883-893.
- Dellaert, C.T.F., Seitz, S., Thrun, S., 2000. Structure from motion without correspondence. *CVPR*, pp. 557-564.
- Demazure, M., 1988. *Sur Deux Problèmes de Reconstruction*. INRIA Technical Report 882.
- Δερμάνης, Α., 1991. *Αναλυτική Φωτογραμμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη
- Δερμάνης, Α., 1998. *Γραμμική Άλγεβρα και Θεωρία Πινάκων*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Dermanis, A., 1994. Free network solutions with the DLT method. *ISPRS*, 49(2), pp. 2-12.
- Domke, J., Aloimonos, Y., 2006. A probabilistic notion of correspondence and the epipolar constraint. *3DPVT* (πρακτικά σε CD).
- Domke, J., Aloimonos, Y., 2006. A probabilistic notion of camera geometry: calibrated vs. uncalibrated. *IAPRS*, 36(Part 3), pp. 260-265.
- Faugeras, O.D., 1992. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo-rig? *ECCV*, pp. 563-578.
- Faugeras, O.D., 1993. *Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint*. The MIT Press, Cambridge, Mass.
- Faugeras, O.D., 1995. Stratification of 3D vision: projective, affine, and metric representations. *JOSA*, A12, pp. 465-484.
- Faugeras, O.D., Laveau, S., 1994. Representing three-dimensional data as a collection of images and fundamental matrices for image synthesis. *ICPR*, pp. 689-691.
- Faugeras, O.D., Luong Q.T., Maybank S.J., 1992. Camera self-calibration: theory and experiments. *ECCV*, pp. 321–334.
- Faugeras, O.D., Luong, Q.-T., 2001. *The Geometry of Multiple Images*. The MIT Press, Cambridge, Mass.
- Faugeras, O.D., Maybank, S., 1990. Motion from point matches: multiplicity of solutions. *IJCV*, 4(3), pp. 225-246.

- Faugeras, O.D., Robert, L., Laveau, S., Csurka, G., Zeller, C., Gaucelin, C., Zoghiani, I., 1998. 3-D reconstruction of urban scenes from image sequences. *CVIU*, 69(3), pp. 292-309.
- Feng, C.L., Hung, Y.S., 2003. A robust method for estimating the fundamental matrix. *Proc. 7<sup>th</sup> Digital Image Computing Techniques and Applications*, pp. 633-642.
- Finsterwalder, S., 1899. Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung (Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie*, Sebastian Finsterwalder zum 75. Geburtstage, Verlag Herbert Wichmann, Berlin, 1937, pp. 17-45).
- Finsterwalder, S., 1905. Photogrammetrie. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band VI: Geodäsie, Geophysik und Astronomie, Teil 1, B.G. Teubner, Leipzig, pp. 98-116.
- Fischler, M., Bolles, R., 1981. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *CACM*, 24(6), pp. 381-395.
- Fitzgibbon, A.W., 2001. Simultaneous linear estimation of multiple view geometry and lens distortion. *CVPR*, vol. I, pp. 125-132.
- Fitzgibbon, A., Zisserman, A., 2003. Automatic camera tracking. *Video Registration*, Chapter 2, Kluwer, pp. 18-35.
- Förstner, W., 1986. A feature based correspondence algorithm for image matching. *IAPRS*, 26(3/3), pp. 150-166.
- Förstner, W., 2000. New orientation procedures. *IAPRS*, 33(B3/1), pp. 297-304.
- Förstner, W., 2001. Algebraic projective geometry and direct optimal estimation of geometric entities. *Computer Vision, Computer Graphics and Photogrammetry – a Common Viewpoint*, ÖAGM/AAPR, Österreichische Computer Gesellschaft, pp. 67–86.
- Förstner W., 2002. Computer vision and photogrammetry – mutual questions: geometry, statistics and cognition. *Bildtechnik / Image Science*, Swedish Society for Photogrammetry & Remote Sensing, no. 1/2002, pp. 151-164.
- Förstner, W., 2004. Uncertainty and projective geometry. *Handbook of Computational Geometry for Pattern Recognition, Computer Vision, Neurocomputing and Robotics*, Springer, pp. 493-535.
- Förstner, W., Gülch, W., 1987. A fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and centres of circular features. *ISPRS Intercommission Workshop on Fast Processing of Photogrammetric Data*, Interlaken, pp.281-305.
- Fusiello, A., 2000. Uncalibrated Euclidean reconstruction: a review. *IVC*, 18(6), pp. 555-563.
- Gluckman, J., Nayar, S., 2001. Rectifying transformations that minimize resampling effects. *CVPR*, pp.111-117.
- Gesele, M., Snavely, N., Curless, B., Hoppe, H., Seitz, S.M., 2007. Multi-view stereo for

- community photo collections. *ICCV*, pp.1-8.
- Golub, G., van Loan, C., 1989. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press.
- Grammatikopoulos, L., Karras, G., Petsa, E., 2002. Geometric information from single uncalibrated images of roads. *IAPRS*, 34(B5), pp. 21-26.
- Grammatikopoulos, L., Karras, G., Petsa, E., 2005. Automatic estimation of vehicle speed from uncalibrated video sequences. *Proc. International Symposium on Modern Technologies, Education and Professional Practice in Geodesy and Related Fields*, Sofia, 03 - 04 November, pp. 332-338.
- Grün, A., 1985. Adaptive least squares correlation: a powerful image matching technique. *South African Journal of Photogrammetry, Remote Sensing & Cartography*, 14(3), pp. 175-187.
- Ha, J.E., Kang, D.J., 2005. Initialization method for self-calibration using 2 views. *PR*, 38(1), pp. 143-150.
- Hallert, B., 1960. *Photogrammetry: Basic Theory and General Survey*. McGraw-Hill, New York.
- Harris, C., Stephens, M., 1988. A combined corner and edge detector. *Alvey Vision Conference*, pp. 147-151.
- Hartley, R., 1992. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. *ECCV*, Springer, pp. 579-587.
- Hartley, R., 1993a. Euclidean reconstruction from uncalibrated views. *Applications of Invariance in Computer Vision*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 825, Springer, pp. 237-256.
- Hartley, R., 1993b. Cheirality invariants. *Image Understanding Workshop DARPA '93*, pp. 745-753.
- Hartley, R., 1994. Projective reconstruction and invariants from multiple images. *PAMI*, 16(10), pp. 1036-1041.
- Hartley, R., 1997a. In defence of the eight-point algorithm. *PAMI*, 19(6), pp. 580-593.
- Hartley, R., 1997b. Kruppa's equations derived from the fundamental matrix. *PAMI*, 19(2), pp. 133-135.
- Hartley, R., 1997c. Self-calibration of stationary cameras. *IJCV*, 22(1), pp. 5-23.
- Hartley, R., 1999. Theory and practice of projective rectification. *IJCV*, 35 (2), pp. 115-127.
- Hartley, R., de Agapito, L., Reid, I., Hayman, E., 1999. Camera calibration and the search for infinity. *ICCV*, pp. 510-515.
- Hartley R., Gupta R., 1993. Computing matched-epipolar projections. *CVPR*, pp. 549-555.
- Hartley, R., Gupta, R., Chang, T., 1992. Stereo from uncalibrated cameras. *CVPR*, pp. 761-764.
- Hartley, R., Kaucic, R., 2002. Sensitivity of calibration to principal point position. *ECCV*,

vol. 2, pp. 433-446.

Hartley, R.I., Mundy, J.L., 1993. The relationship between photogrammetry and computer vision. *Integrating Photogrammetric Techniques with Scene Analysis & Machine Vision*, Proc. SPIE, vol.1944, pp. 92-105.

Hartley, R., Silpa-Anan, C., 2002. Reconstruction from two views using approximate calibration. *ACCV*, vol. 1, pp. 338-343.

Hartley, R., Sturm, P., 1997. Triangulation. *CVIU*, 68(2), pp. 146-157.

Hartley R., Zisserman A., 2000. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press.

Heuel, S., 2001. Points, lines and planes and their optimal estimation. *Proc. 23<sup>rd</sup> DAGM Symposium. Lecture Notes on Computer Science 2191*, Springer, pp. 92-99.

Heyden, A., Åström K., 1996. Euclidean reconstruction from constant intrinsic parameters. *ICPR*, pp. 339-343.

Heyden, A. Åström, K., 1997. Euclidean reconstruction from image sequences with varying and unknown focal length and principal point. *CVPR*, pp. 438-443.

Heyden, A., Astrom, K., 1999. Flexible calibration: minimal cases for autocalibration. *ICCV*, vol. 1, pp. 350-355.

Heyden, A., Sparr, G., 1999. Reconstruction from calibrated cameras – a new proof of the Kruppa-Demazure theorem. *JMIV*, 10, pp. 123–142.

Horn, B.K.P., 1990a. Relative orientation. *IJCV*, 4, pp. 59-78.

Horn, B.K.P., 1990b. *Recovering Baseline and Orientation from the Essential Matrix* (αδημοσίευτη εργασία). URL: <http://people.csail.mit.edu/bkph/papers/Essential.pdf>.

Horn, B.K.P., 1991. Relative orientation revisited. *JOSA*, 8(10), pp. 1630-1638.

Horn, B.K.P., 1999. *Projective Geometry Considered Harmful* (αδημοσίευτη εργασία). URL: <http://people.csail.mit.edu/bkph/papers/Harmful.pdf>.

Huang, C., Chen, C., Chung, P., 2004. An improved algorithm for two-image camera self-calibration and Euclidean structure recovery using absolute quadric. *PR*, 37, pp. 1713-1722.

Huang, T.S., Faugeras, O.D., 1989. Some properties of the E-matrix in two-view motion estimation. *PAMI*, 11(12), pp. 1310-1312.

Irani, M., Anandan, P., Weinshall, D., 1998. From reference frames to reference planes: multi-view parallax geometry and applications. *ECCV*, vol. II, pp. 829-845.

Isgrò, F., Trucco, E., 1999. Projective rectification without epipolar geometry. *CVPR*, pp. 94-99.

Isgrò, F., Trucco, E., 2000. A general rank-2 parameterization of the fundamental matrix. *ICPR*, vol. I, pp. 868-871.

Kahl, F., 1999. Critical motions and ambiguous Euclidean reconstructions in autocalibra-

- tion. *ICCV*, pp. 469-475.
- Kahl, F., Triggs, B., Åström, K., 2000. Critical motions for auto-calibration when some intrinsic parameters can vary. *JMIV*, 13(2), pp. 131-146.
- Kalisperakis, I., Karras, G., Petsa, E., 2005. Estimation of camera parameters from stereo pairs with no external control information. *XX CIPA International Symposium*, Torino, 27 September - 1 October, pp. 390-394.
- Καλούση Γ., 2006. *Σχετικός Προσανατολισμός Ζεύγους και Μερική Βαθμονόμηση Μηχανής με Δεσμεύσεις επί του Αντικειμένου*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Kanatani, K., 1991. Computational projective geometry. *CVGIU*, 54(3), pp. 333-348.
- Kanatani, K., 1993. Unbiased estimation and statistical analysis of 3-D rigid motion from two views. *PAMI*, 15(1), pp. 37-50.
- Kanatani, K., Matsunaga, C., 2000. Closed-form expression for focal lengths from the fundamental matrix. *ACCV*, vol. 1, pp. 128-133.
- Kanatani, K., Nakatsuji, A., Sugaya, Y., 2006. Stabilizing the focal length computation for 3D reconstruction from two uncalibrated views. *IJCV*, 66(2), pp. 109-122.
- Karara, H.M., Abdel-Aziz, Y.I., 1974. Accuracy aspects of non-metric imageries. *PE*, 40(9), pp. 1107-1117.
- Καρράς, Γ., 1998. *Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στην Φωτογραμμετρία*. Σπουδαστικές Σημειώσεις, Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών ΕΜΠ.
- Ke, Q., Xu, G., Ma, S., 1998. Recovering epipolar geometry by reactive tabu search. *ICCV*, pp. 767-771.
- Klein, F., 1872. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Mathematische Annalen*, 43, pp. 63-100 (translated by Haskell, M. W., 1893. A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. New York Math. Soc.*, 2. pp. 215-249).
- Khlebnikova, T.A., 1983. Determining relative orientation angles of oblique aerial photographs. *Mapping Science and Remote Sensing*, 21(1), pp. 95-100.
- Krames, J., 1940. Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven (ein Beitrag zur Theorie der Gefährlichen Örter). *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 49, pp. 327-354.
- Krames, J., 1942. Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden "gefährlichen" Flächen. *Bildmessung und Luftbildwesen*, 17, Heft 1/2, pp. 1-18.
- Kruppa, E., 1913. Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung. *Sitzung der Berliner Akademie der Wissenschaften, Math. Naturw. Kl., Abt. IIa.*, 122, pp. 1939-1948.
- Λαδόπουλος, Π., 1966. *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*. Ελληνική Μαθηματική Βιβλιοθήκη. Εκδόσεις Α. Καραβία. Αθήνα. Τόμος Α'.
- Λαδόπουλος, Π., 1972. *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*. Ελληνική Μαθηματική Βιβλιοθήκη.

κη. Αθήνα. Τόμος Β΄, Τεύχος Α.

- Lawn, J., Cipolla, R., 1994. Robust egomotion estimation from affine motion parallax. *ECCV*, pp. 205-210.
- Lehmann, S., Bradley, A.P., Clarkson, I.L.V., 2006. Estimation of epipolar geometry via the Radon transform. *Proc. International Conference on Acoustic Speech Signal Processing*, vol. 2, pp. 497-500.
- Li, H., 2006. A simple solution to the six-point two-view focal-length problem. *ECCV*, pp. 200-213.
- Li, H., Hartley, R., 2006. Five-point motion estimation made easy. *ICPR*, vol. 1, pp. 630-633.
- Liebowitz D., 2001. *Camera Calibration and Reconstruction of Geometry from Images*. PhD Thesis, Robotics Research Group, Dept. of Engineering Science, Oxford University.
- Liebowitz, D., Criminisi, A., Zisserman, A., 1999. Creating architectural models from images. *Proc. EuroGraphics, Graphics Forum*, vol. 18, pp. 39-50.
- Liebowitz, D., Zisserman, D., 1999. Combining scene and auto-calibration constraints. *ICCV*, pp. 293-300.
- Liu, J. S., Chuang, J.-H., 2002. Self-calibration with varying focal length from two images obtained by a stereo head. *PR*, 35, pp. 2937-2948.
- Longuet-Higgins, H.C., 1981. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 293, pp. 133-135.
- Loop, C., Zhang, Z., 1999. Computing rectifying homographies for stereo vision. *CVPR*, pp. 125-131.
- Lucas, B.D., Kanade, T., 1981. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Proc. DARPA Image Understanding Workshop*, pp. 121-130.
- Luhmann, T., Robson, S., Kyle, S., Harley, I., 2006. *Close Range Photogrammetry. Principles, Methods and Applications*. Whittles Publishing, Caithness, Scotland.
- Luong, Q.T., 1992. *Matrice Fondamentale et Calibration Visuelle sur l' Environnement – Vers une plus Grande Autonomie des Systèmes Robotiques*. PhD Thesis, Université de Paris-Sud, Centre d' Orsay.
- Luong, Q.T., Deriche, R., Faugeras, O., Papadopoulos, T., 1993. *On Determining the Fundamental Matrix: Analysis of Different Methods and Experimental Results*. INRIA Technical Report RR-1894.
- Luong, Q.T., Faugeras, O.D., 1993. Determining the fundamental matrix with planes: instability and new algorithms. *CVPR*, pp. 489-494.
- Luong, Q.T., Faugeras, O.D., 1994. A stability analysis of the fundamental matrix. *ECCV*, pp. 577-588.
- Luong, Q.T., Faugeras, O.D., 1996. The fundamental matrix: theory algorithms and stabili-

- ty analysis. *IJCV*, 17(1), pp. 43-75.
- Luong, Q.T., Faugeras, O.D., 1997. Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices. *IJCV*, 22(3), pp. 261-289.
- Luong, Q.T., Faugeras, O.D., 1998. On the determination of epipoles using cross-ratios. *CVGIU*, 71(1), pp. 1-18.
- Luong, Q., Vieville, T., 1996. Canonical representations for the geometries of multiple projective views. *CVIU*, 64(2), pp. 193-229.
- Lourakis, M.I., Deriche, R., 2000. Camera self-calibration using the singular value decomposition of the fundamental matrix. *ACCV*, vol. I, pp. 403-408.
- Lowe, D., 2004. Distinctive image features from scale invariant keypoints. *IJCV*, 2(60), pp. 91-110.
- Ma, Y., Soatto, S., Kosecka, J., Sastry, S., 1999. Euclidean reconstruction and reprojection up to subgroups. *ICCV*, pp. 773-780.
- Makadia, A., Geyer, C., Sastry, S., Daniilidis, K., 2005. Radon-based structure from motion without correspondences. *CVPR*, vol. 1, pp. 796-803.
- Mallon, J., Whelan, P.F., 2005. Projective rectification from the fundamental matrix. *IVC*, 23(7), pp. 643-650.
- Mann, S., Picard, R.W., 1994. Virtual bellows: constructing high quality stills from video. *ICIP*, pp. 363-367.
- Maybank, S., 1990. Properties of essential matrices. *IJIST*, 2, pp. 380-384.
- Maybank, S., 1993. *Theory of Reconstruction from Image Motion*. Springer-Verlag, Berlin.
- Maybank, S.J., Faugeras, O.D., 1992. A theory of self-calibration of a moving camera. *IJCV*, 8(2), pp. 123-151.
- McGlone, J.C. (ed.), 2004. *Manual of Photogrammetry*. American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 5<sup>th</sup> edition, Bethesda, Maryland.
- Mendonça, P., Cipolla, R., 1999. A simple technique for self-calibration. *CVPR*, pp. 500-505.
- Mikhail, E.M., Bethel, J.S., McGlone, J.C., 2001. *Introduction to Modern Photogrammetry*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Mikolajczyk, K., Schmid, C., 2002. An affine invariant interest point detector. *ECCV*, vol. 1, pp. 128-142.
- Mikolajczyk, K., Schmid, C., 2004. Scale and affine invariant interest point detectors. *IJCV*, 60 (1), pp. 63-86.
- Mikolajczyk, K., Schmid, C. 2005. A performance evaluation of local descriptors. *PAMI*, 27(10), pp. 1615-1630.
- Mohr, R., Boufama, B., Brand, P., 1995. Understanding positioning from multiple images. *AIJ*, 78, pp. 213-238.



- Mohr, R., Triggs, B., 1996. *Projective Geometry for Image Analysis*. Tutorial, WG III/2, ISPRS Congress, Vienna.
- Mohr, R., Veillon, F., Quan L., 1993. Relative 3D reconstruction using multiple uncalibrated images. *CVPR*, pp. 543-548.
- Moravec, H.P., 1979. Visual mapping by robot rover. *Proc. 6<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 598-600.
- Μπουτσικάκης, Δ., 2003. *Προγραμματισμός & Έλεγχος Γραμμικού Αλγορίθμου Σχετικού Προσανατολισμού με Εφαρμογή του στην Αυτόματη Εύρεση Προσεγγιστικών Τιμών σε Πολυεικονικές Συνορθώσεις*. Διπλωματική Εργασία, ΣΑΤΜ ΕΜΠ.
- Μπρίκας, Μ., 1964. *Μαθήματα Προβολικής Γεωμετρίας*. Αθήνα.
- Mundy, J.L., Zissermann, A., 1994. Repeated structures: image correspondence constraints and 3D structure recovery. *Applications of Invariance in Computer Vision*, Springer-Verlag, pp. 89-106.
- Newsam, G.N., Huynh, D.Q., Brooks M.J., Pan H.P., 1996. Recovering unknown focal lengths in self-calibration: an essentially linear algorithm and degenerate configurations. *IAPRS*, 31(B3), pp. 575-580.
- Niini, I., 1992. Object reconstruction using 2-D projective transformations. *IAPRS*, 29(B3), pp. 677-681.
- Niini, I., 1993. Solution of the interior orientation without control points. *The Photogrammetric Journal of Finland*, 13(2), pp. 78-84.
- Niini, I., 1994. Relative orientation of multiple images using projective singular correlation. *Spatial Information from Digital Photogrammetry & Computer Vision*, Proc. SPIE, vol. 2357, pp. 615-621.
- Niini, I., 2000. *Photogrammetric Block Adjustment Based on Singular Correlation*. Dissertation, Finnish Academies of Technology, Espoo (*Acta Polytechnica Scandinavica*, Civil Engineering and Building Construction Series, no. 120, pp. 111).
- Nister, D., 2003. An efficient solution to the five-point relative pose problem, *CVPR*, pp. 195-202.
- Nister, D., Schaffalitzky, F., 2004. What do four points in two calibrated images tell us about the epipoles? *ECCV*, vol. II, pp. 41-57.
- Oram, D.T., 2001. Rectification for any epipolar geometry. *BMVC*, pp. 653-662.
- Pan, H.P., Brooks, M.J., Newsam, G.N., 1995. Image resituation: initial theory. *Videometrics IV*, Proc. SPIE, vol. 2598, pp. 162-173.
- Πέτσα, Ε., 1996. *Φωτογραμμετρία με Ευθείες: Ανάπτυξη, Διερεύνηση και Έλεγχος Φωτογραμμετρικών Αλγορίθμων με Ευθείες για τις Σύγχρονες Ψηφιακές Εφαρμογές*. Διδακτορική Διατριβή, ΤΑΤΜ/ΕΜΠ.
- Πέτσα, Ε., 2000. *Θεμελιώδεις Έννοιες και Θεμελιώδη Προβλήματα της Φωτογραμμετρίας*. Σπουδαστικές Σημειώσεις, Τμήμα Τοπογραφίας ΤΕΙ Αθήνας.

- Petsa, E., Karras G., 2000. Constrained line-photogrammetric 3D reconstruction from stereopairs. *IAPRS*, 33(B5/2), pp. 604-610.
- Petsa, E., Kouroupis, S., Karras, G., 2001. Inserting the past in video sequences. *XVIII CIPA International Symposium*, Potsdam, 18-22 September, pp. 707-712.
- Petsa, E., Patias P., 1994. Relative orientation of image triples using straight linear features. *IAPRS*, 30(3/2), pp. 663-669.
- Philip, J., 1991. Estimation of three-dimensional motion of rigid objects from noisy observations. *PAMI*, 13(1), pp. 61-66.
- Philip, J., 1996. A non-iterative algorithm for determining all essential matrices corresponding to five point pairs. *PhR*, 15(88), pp. 589-599.
- Photosynth*. Microsoft Corporation. URL: <http://photosynth.net/>
- Pollefeys, M., Koch, R., van Gool, L., 1999. Self-calibration and metric reconstruction in spite of varying and unknown internal camera parameters. *IJCV*, 32(1), pp.7-25.
- Pollefeys, M., van Gool, L., 1999. Stratified self-calibration with the modulus constraint. *PAMI*, 21(8), pp. 707-724.
- Pollefeys, M., van Gool, L., 2002. From images to 3D models. *CACM*, 45(7), pp. 50-55.
- Pollefeys, M., van Gool, L., Oosterlinck, A., 1996. The modulus constraint: a new constraint for self-calibration. *ICPR*, pp. 31-42.
- Pollefeys, M., van Gool, L., Vergauwen, M., Verbiest, F., Cornelis, K., Tops, J., Koch, R., 2004. Visual modeling with a hand-held camera. *IJCV*, 59(3), pp. 207-232.
- Pollefeys, M., Koch, R., van Gool, L.J., 1999. A simple and efficient rectification method for general motion. *ICCV*, vol. 1, pp. 496-501.
- Ponce, J., Genc, Y., 1998. Epipolar geometry and linear subspace methods: a new approach to weak calibration. *IJCV*, 28(3), pp. 223-243.
- Poncelet, J.V., 1822. *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. Bachelier, Paris.
- Rinner, K., Burkhardt, R., 1972. *Photogrammetrie*. Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III a/3, J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
- Rodehorst, V., Heinrichs, M., Hellwich, O., 2008. Evaluation of relative pose estimation methods for multi-camera setups. *IAPRS*, 37(Part 3) (σε CD).
- Ronda, J., Valdés, A., 2007. Conic geometry and autocalibration from two images. *JMIV*, 28(2), pp. 135-149.
- Rothwell, C., Faugeras, O., Csurka, G., 1997. A comparison of projective reconstruction methods for pairs of views. *CVIU*, 68(1), pp. 37-58.
- Roy, S., Meunier, J., Cox I., 1997. Cylindrical rectification to minimize epipolar distortion. *CVPR*, pp. 393-399.
- Semple, J.G, Kneebone, G.T., 1952. *Algebraic Projective Geometry*. Oxford University Press, London.

- Seo, U., Hong, K., 1999. About the self-calibration of a rotating and zooming camera: theory and practice. *ICCV*, pp. 183-188.
- Shapiro, L., Brady, M., 1995. Rejecting outliers and estimating errors in an orthogonal-regression framework. *Philosophical Transactions of the Royal Society: Physical and Engineering Sciences*, 350(1694), pp. 407-439.
- Shashua, A., Navab, N., 1996. Relative affine structure – canonical model for 3D from 2D geometry and applications. *PAMI*, 18, pp. 873-883.
- Shih, T.Y., 1994. RLT: A closed form solution for relative orientation. *IAPRS*, 30(5), pp. 357-363.
- Shum, H.Y., Szeliski, R., 1998. Construction and refinement of panoramic mosaics with global and local alignment. *ICCV*, pp. 953-956.
- Sinclair, D., Christensen, H. I., Rothwell, R. 1995. Using the relation between a projectivity and the fundamental matrix. *Proc. 9<sup>th</sup> Scandinavian Conference on Image Analysis*, vol. 1, pp. 181-188.
- Smith, S.M., Brady, J.M., 1997. SUSAN – a new approach to low level image processing. *IJCV*, 23(1), pp. 45-78.
- Sparr, A., Sparr, G., 1994. *On a Theorem of M. Chasles*. Technical Report LUTFD2/TFMA-94/7001-SE, Department of Mathematics, University of Lund, Sweden.
- Stachel H., 2006. Descriptive geometry meets computer vision: the geometry of two images. *JGG*, 10(2), pp. 137-153.
- Stefanovic, P., 1973. Relative orientation – a new approach. *ITC Journal*, 3/1973, pp. 417-448.
- Stewénius, H., Nister, D., Kahl, F., Schaffalitzky, F., 2005. A minimal solution for relative pose with unknown focal length. *CVPR*, pp. 789-794.
- Strecha, C., Fransens, R., van Gool, L., 2006. Combined depth and outlier estimation in multi-view stereo. *CVPR*, pp. 2394-2401.
- Strecha, C., von Hansen, W., van Gool, L., Fua, P., Thoennessen, U., 2008. On benchmarking camera calibration and multi-view stereo for high resolution imagery. *CVPR*, pp. 1-8.
- Sturm, P., 1997a. Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated Euclidean reconstruction. *CVPR*, pp. 1100-1105.
- Sturm, P., 1997b. *Vision 3D Non Calibrée: Contributions à la Reconstruction Projective et Étude des Mouvements Critiques pour l' Auto-calibrage*. PhD Thesis, INPG, Grenoble, France.
- Sturm, P., 1999. Critical motion sequences for the self-calibration of cameras and stereo systems with variable focal length. *BMVC*, pp. 63-72.
- Sturm, P., 2000. A case against Kruppa's equations for camera self-calibration. *PAMI*, 22(10), pp. 1199-1204.

- Sturm, P., 2001. On focal length calibration from two views. *CVPR*, pp. 145-150.
- Sturm, P., Cheng, Z.L., Chen, P.C.Y., Poo A.N., 2005. Focal length calibration from two views: method and analysis of singular cases. *CVIU*, 99(1), pp. 58-95.
- Szeliski, R., 1996. Video mosaics for virtual environments. *CGA*, 16(2), pp. 22-30.
- Tang, C., Medioni, G., Lee, M., 1999. Epipolar geometry estimation by tensor voting in 8D. *ICCV*, pp. 502-509.
- Thompson, E.H., 1959. A rational algebraic formulation of the problem of relative orientation. *PhR*, 3(14), pp. 152-159.
- Thompson, E.H., 1968. The projective theory of relative orientation. *Ph*, 23(1), pp. 67-75.
- Thompson, E. H., 1971. Space resection without interior orientation. *PhR*, 7(37). pp. 39-45.
- Thorup, A., 2003. How did the camera move? *CA*, 31(8), pp. 4097-4106.
- Torr, P.H.S., 2002. Bayesian model estimation and selection for epipolar geometry and generic manifold fitting. *IJCV*, 50(1), pp. 35-61.
- Torr, P.H.S., Murray, D., 1993. Outlier detection and motion segmentation. *Sensor Fusion VI*, Proc. SPIE, vol. 2059, pp. 432-443.
- Torr, P.H.S., Murray, D., 1997. The development and comparison of robust methods for estimating the fundamental matrix. *IJCV*, 24(3), pp. 271-300.
- Torr, P. H. S., Zisserman, A., 2000. Mlesac: a new robust estimator with application to estimating image geometry. *CVIU*, 78 (1), pp. 138-156.
- Triggs, B., 1997. Autocalibration and the absolute quadric. *CVPR*, pp. 609-614.
- Trivedi, H.P., 1988. Can multiple views make up for lack of camera registration? *IVC*, 6(1), pp. 29-32.
- Tsai, R., Huang, T., 1984. Uniqueness and estimation of three-dimensional motion parameters of rigid objects with curved surfaces. *PAMI*, 6(1), pp.13-26.
- Tuytelaars, T., van Gool, L., 2000. Wide baseline stereo matching based on local, affinely invariant regions. *BMVC*, pp. 412-422.
- Tuytelaars, T., van Gool, L., 2004. Matching widely separated views based on affine invariant regions. *IJCV*, 59 (1), pp. 61-85.
- van Gool, L., Tuytelaars, T., Ferrari, V., Strecha, C., Vanden Wyngaerd, J., Vergauwen, M., 2002. 3D modeling and registration under wide baseline conditions. *Proc. ISPRS Commission III Symposium on Photogrammetric Computer Vision*, Vienna, pp.3-14.
- Vieville, T., Lingrand, D., 1999. Using specific displacements to analyze motion without calibration. *IJCV*, 31(1), pp. 5-29.
- Vieville, T., Zeller, C., Robert, L., 1996. Using collineations to compute motion and structure in an uncalibrated image sequence. *IJCV*, 20(3). pp. 213-242.

- von Sanden, H., 1908. *Die Bestimmung der Kernpunkte in der Photogrammetrie*. Dissertation, Universität Göttingen.
- Ueshiba, T., Tomita, F., 2003. Self-calibration from two perspective views under various conditions: closed-form solutions and degenerate configurations. *Proc. Australia-Japan Advanced Workshop on Computer Vision*, Adelaide, pp. 118-125.
- Weng, J., Huang, T., Ahuja, N., 1989. Motion and structure from two perspective views: algorithms, error analysis and error estimation. *PAMI*, 11(5), pp. 451-476.
- Weng, J., Ahuja, N., Huang, T., 1993a. Optimal motion and structure estimation. *PAMI*, 15(9), pp. 864-884.
- Weng, J., Huang, T., Ahuja, N., 1993b. *Motion and Structure from Image Sequences*. Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag.
- Wolf, P., R., DeWitt B., A., 2000. *Elements of Photogrammetry with Applications in GIS*. McGraw-Hill, New York.
- Wenzel, F., Grigat, R.R., 2005. A minimal parametrization of the essential and fundamental matrix based on Householder transformations. *VMV*, pp. 163-170.
- Werner, T., Pajdla, T., 2001. Cheirality in epipolar geometry. *ICCV*, pp. 548-553.
- Werner, T., Zisserman, A., 2002. New techniques for automated architecture reconstruction from photographs. *ECCV*, pp. 541-555.
- Whitehead, A., Roth, G., 2002. Evolutionary based autocalibration from the fundamental matrix. *Proc. Applications of Evolutionary Computing on Evoworkshops*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2279, Springer-Verlag, pp. 292-303.
- Whitehead, A., Roth, G., 2004. Estimating intrinsic camera parameters from the fundamental matrix using an evolutionary approach. *JASP*, 8/2004, pp. 1113-1124.
- Wunderlich, W., 1941. Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Photogrammetrie. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 50, pp. 151-164.
- Χατζησταύρου, Α., 2006. *Σχετικός Προσανατολισμός Στερεοζεύγους με Δεσμεύσεις Συνεπιπεδότητας στον Χώρο – Ανάπτυξη Λογισμικού και Έλεγχοι*. Πτυχιακή Εργασία. Τμήμα Τοπογραφίας ΤΕΙ Αθήνας.
- Xiao, J., Shah, M., 2003. Two-frame wide baseline matching. *ICCV*, vol. 1, pp. 603-609.
- Xu, G., Zhang, Z., 1996. *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition*. Kluwer Academic Publishers.
- Zeller, C., Faugeras, O., 1996. *Camera Self-calibration from Video Sequences: the Kruppa Equations Revisited*. INRIA Research Report no. 2793.
- Zhang Z., Deriche R., Faugeras, O.D., Luong Q.T., 1995. A robust technique for matching two uncalibrated images through the recovery of the unknown epipolar geometry. *AIJ*, 78. pp. 87-119.
- Zhang, Z., 1996. On the epipolar geometry between two images with lens distortion. *ICPR*, vol. I, pp. 407-411.

- Zhang, Z., 1998a. Determining the epipolar geometry and its uncertainty: a review. *IJCV*, 27(2), pp. 161-195.
- Zhang, Z., 1998b. Understanding the relationship between the optimization criteria in two-view motion analysis. *ICCV*, pp. 772-777.
- Zhang, Z., Loop, C., 2001. Estimating the fundamental matrix by transforming image points in projective space. *CVIU*, 82(2), pp. 174-180.
- Zhong, H.X., Pang, Y.J., Feng, Y.P., 2006. A new approach to estimating fundamental matrix. *IVC*, 24(1), pp. 56-60.

# Παράρτημα Α

## Αποτελέσματα αυτόματης μέτρησης ομόλογων σημείων



Σχήμα Α.1. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων ( $1^\circ$  στερεοζεύγος). Εξαγωγή σημείων SIFT (πάνω), εύρεση ομολογιών μεταξύ των σημείων SIFT μέσω σύγκρισης των διανυσμάτων τους (μέσον), τελικές ομολογίες σημείων SIFT μετά από την εφαρμογή του αλγορίθμου RANSAC (κάτω).





Σχήμα Α.2. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (2<sup>ο</sup> στερεοζεύγος).





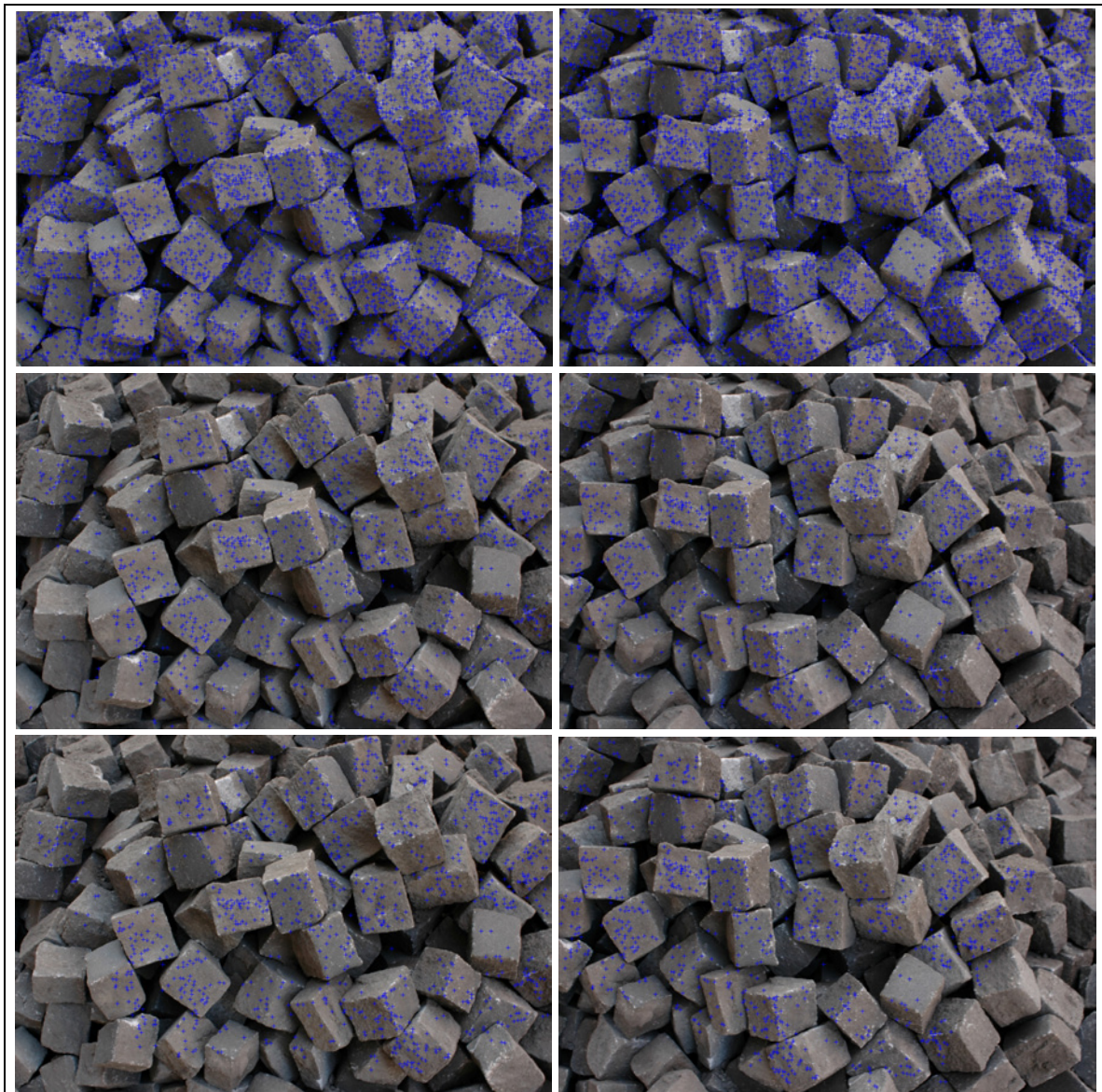
Σχήμα Α.3. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (3<sup>ο</sup> στερεοζεύγος).





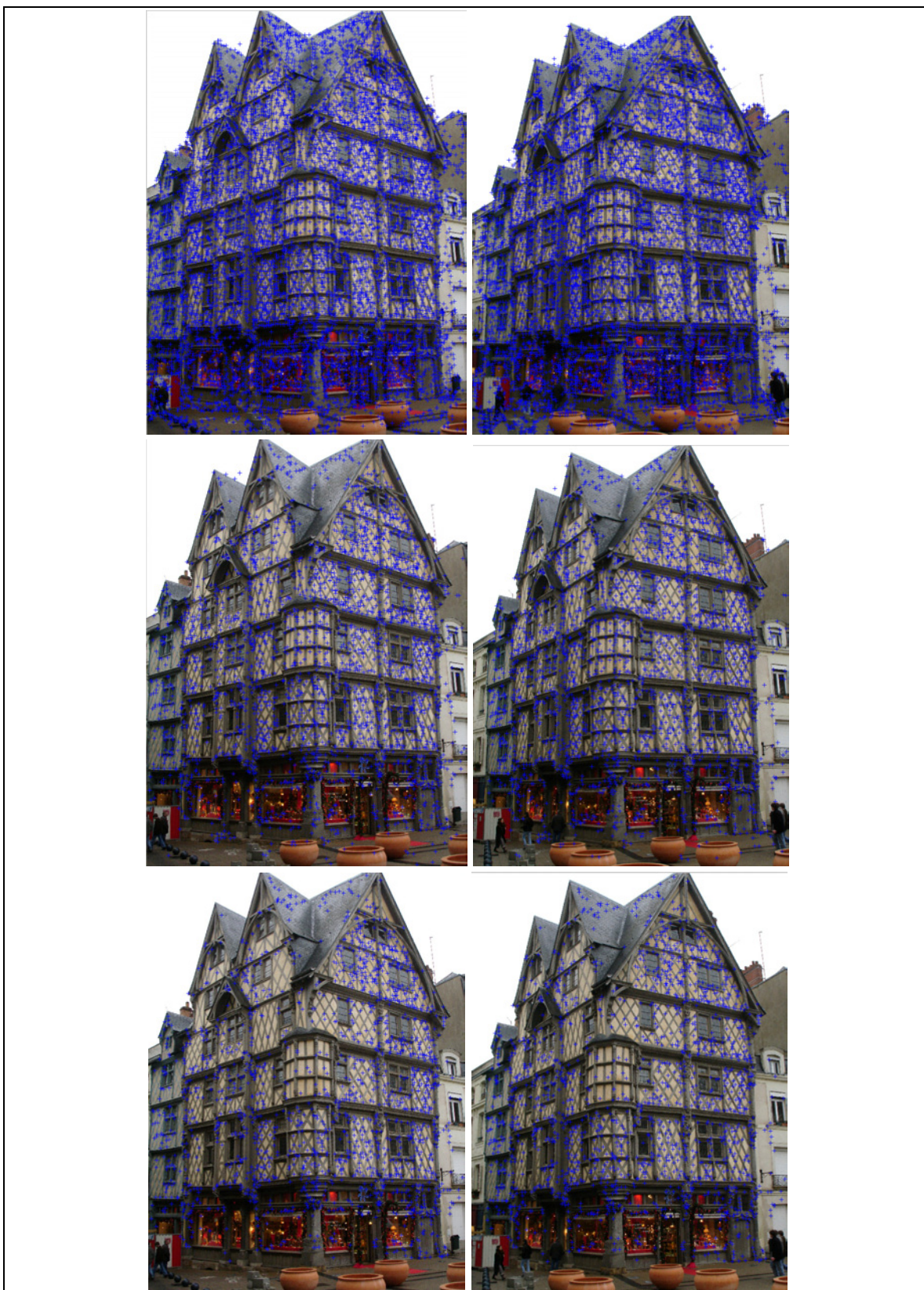
Σχήμα Α.4. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων ( $4^\circ$  στερεοζεύγος).





Σχήμα Α.5. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων ( $5^\circ$  στερεοζεύγος).





Σχήμα Α.6. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (6° στερεοζεύγος).





Σχήμα Α.7. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (7° στερεοζεύγος).



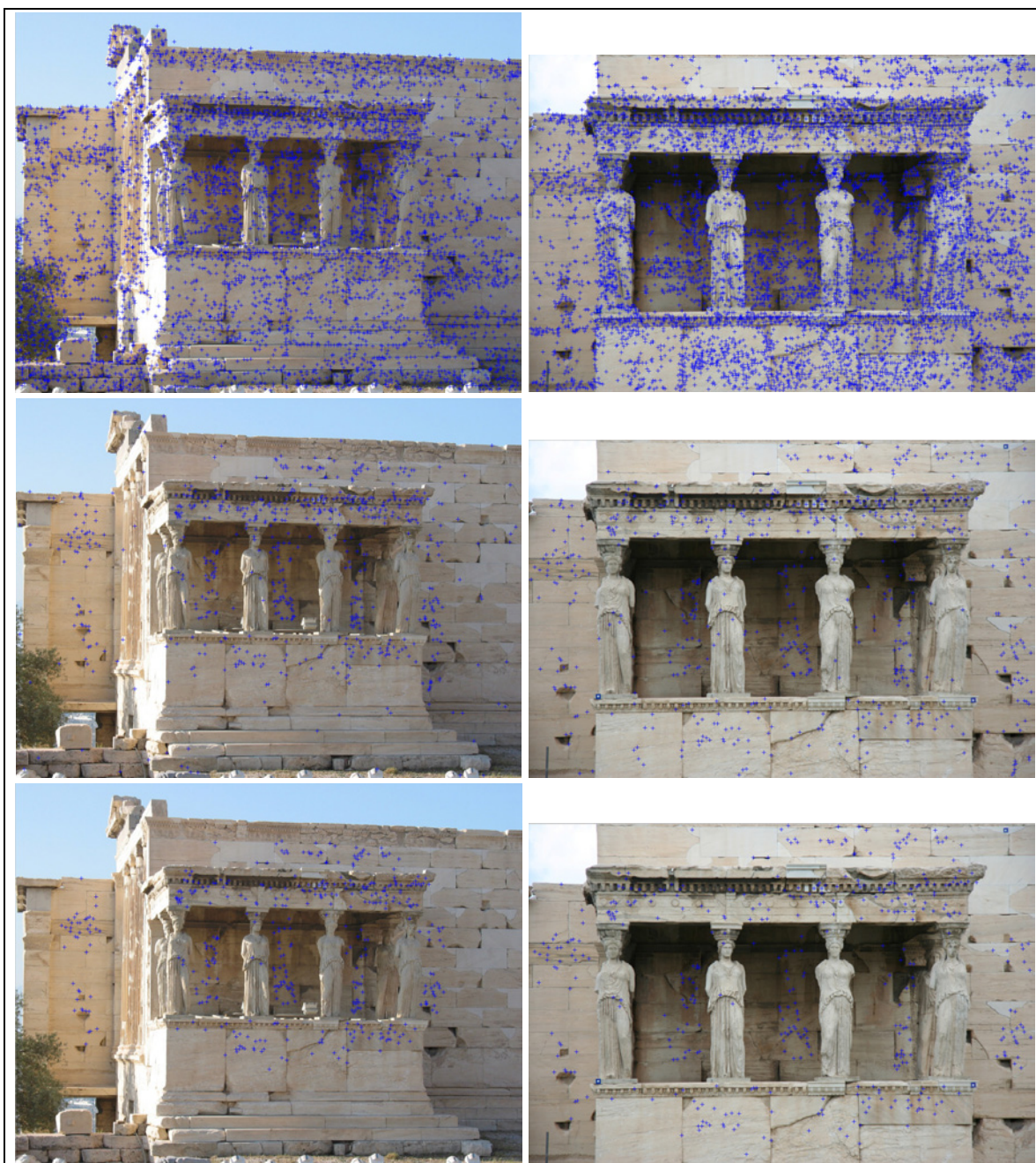


Σχήμα Α.8. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων ( $8^\circ$  στερεοζεύγος).





Σχήμα Α.9. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων (9<sup>ο</sup> στερεοζεύγος).



Σχήμα Α.10. Αυτόματη μέτρηση ομόλογων σημείων ( $10^\circ$  στερεοζεύγος).