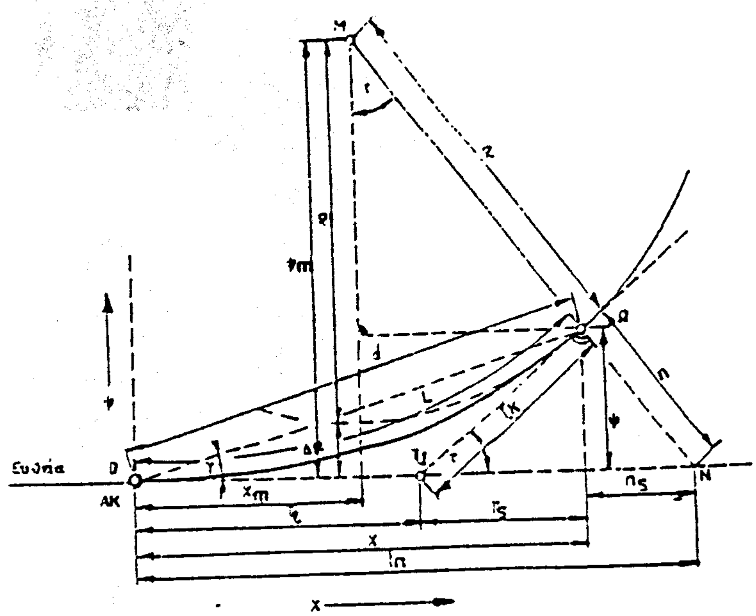
"ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ"

Γενικά

Η κλωθοειδής είναι ένα τόξο συναρμογής, που χρησιμοποιείται κατά την χάραξη του οδικού δικτύου, με στόχο να εξασφαλίσει την ομαλή μετάβαση από ένα κυκλικό τόξο σε μια ευθυγραμμία και αντίστροφα. Επίσης, χρησιμοποιείται συχνά και για την σύνδεση δύο κυκλικών τόξων, διαφορετικής ακτίνας, μεταξύ τους. Η καμπυλότητα Κ της κλωθοειδούς κυμαίνεται από -∞ έως +∞. Στο Σχήμα 14.1 που ακολουθεί φαίνεται η γεωμετρία της κλωθοειδούς καθώς και τα βασικά γεωμετρικά γεωμετρικά της μεγέθη.



Σχήμα 14.1 Γεωμετρικά Χαρακτηριστικά Κλωθοειδούς

Παρακάτω, δίνονται αναλυτικά οι διάφοροι τρόποι χρήσης της κλωθοειδούς για την σύνδεση γεωμετρικών στοιχείων μεταξύ τους.

1) Η κλωθοειδής ως τόξο συναρμογής για την μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο

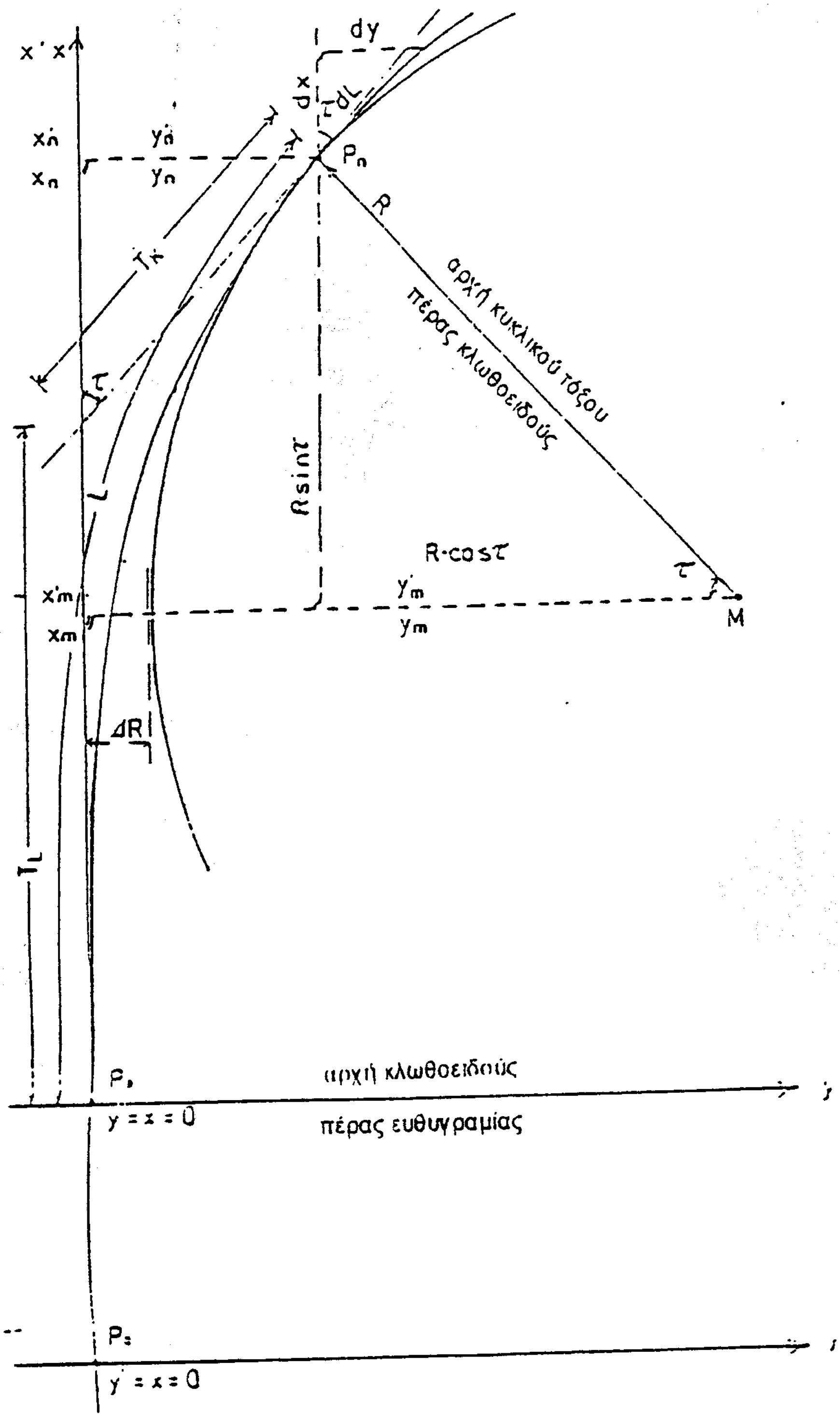
Δίνεται η ευθεία P_1P_2 με P_1 (X1, Y1) και P_2(X2, Y2) καθώς και ο κύκλος ακτίνας R και κέντρου M όπου M(Xm,Ym). Η σύνδεσή τους θα γίνει με την χρήση κλωθοειδούς με ταύτιση των συντεταγμένων Ym και Ym' (Ym=Ym'). Ετσι ισχύει:

$$Ym = Y + R\cos\tau = Ym'$$

Με διαδοχικές προσεγγίσεις και αντικαταστάσεις στον τύπο αυτό και δεδομένου ότι οι συντεταγμένες της αρχής της κλωθοειδούς Po είναι Yo'=0, Xo' = Xm'-Xm=Xm'-(X-R*sinτ) προκύπτει ότι:

$$\tan\tau = \frac{X_m - X}{Y_m - Y}$$

Από την γωνία τ, την R και με την βοήθεια των σχέσεων που δίνουν τα κύρια γεωμετρικά στοιχεία της κλωθοειδούς προκύπτει το ζεύγος των συντεταγμένων (X, Y). Τα παραπάνω μεγέθη εμφανίζονται στο Σχήμα 14.2.



Σχημα 14.2 Η Κλωθοειδής ως Τόξο Συναρμογής για τη Μετάβαση από Ευθεία σε Κυκλικό Τόξο

2) Η κλωθοειδής ως τόξο συναρμογής για την σύνδεση δύο κυκλικών τόξων

α) Απλή ωοειδής καμπύλη: Η καμπύλη που προκύπτει από την σύνδεση δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διαφορετικών ακτίνων, όπου το μικρότερο βρίσκεται στο εσωτερικό του μεγαλύτερου.

Δίδονται αρχικά δύο κύκλοι. Ο πρώτος ακτίνας R_1 και κέντρου M_1 (X_1, Y_1) και ο δεύτερος με ακτίνα R_2 και κέντρο M_2 (X_2, Y_2) όπου ($|\Delta R|$-S)>0.
Η απόσταση S = M_1M_2 προκύπτει από την σχέση:

$$S = \sqrt{(Y_{m2} - Y_{m1})^2 + (X_{m2} - X_{m1})^2}$$

Με παραγώγιση της σχέσης αυτής καθώς και με την χρήση των τύπων των γεωμετρικών μεγεθών της κλωθοειδούς, βρίσκεται το ζεύγος των συντεταγμένων ($X_{\tau s}$, $Y_{\tau s}$) της κλωθοειδούς που συνδέει τα δύο κυκλικά τόξα. Οι τύποι είναι:

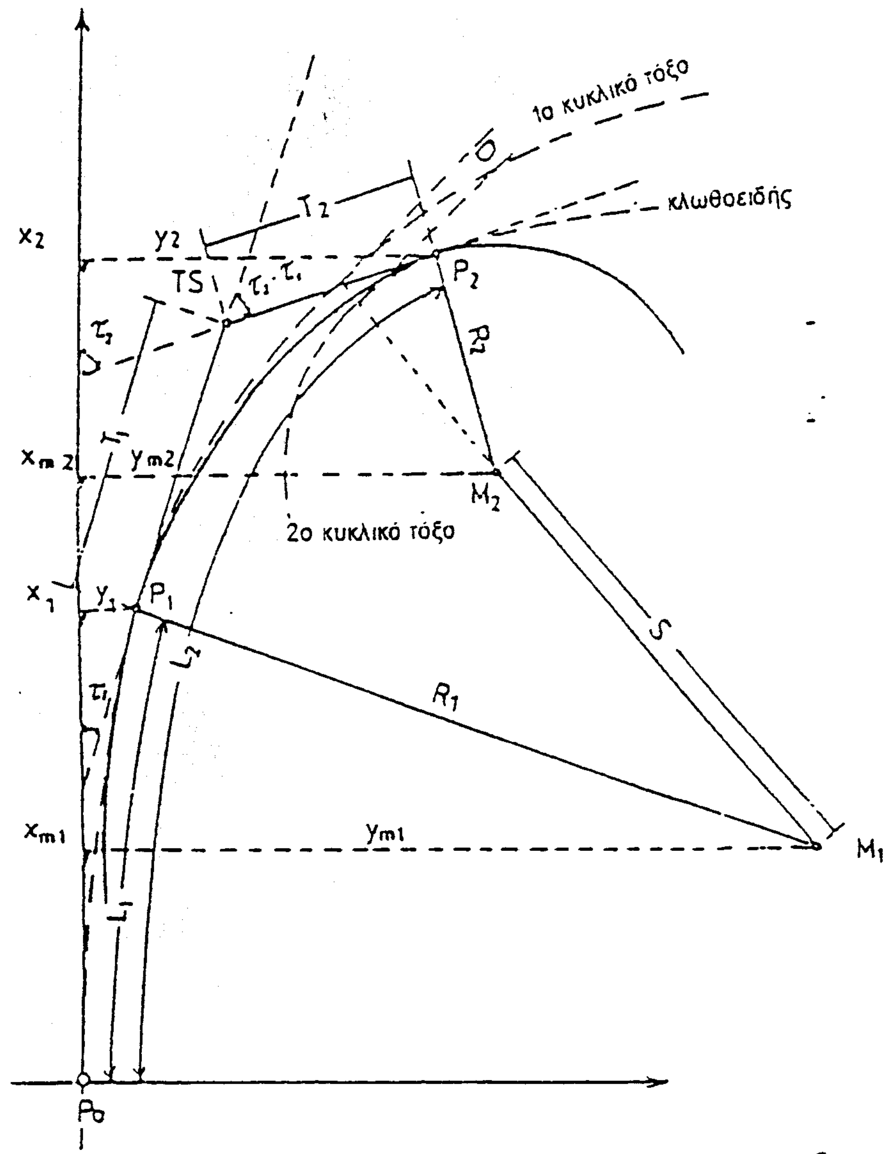
$$X_{\tau s} = X_i \pm \tau_i \cos\tau_i$$

$$Y_{\tau s} = Y_i \pm \tau_i \sin\tau_i$$

Εν συνεχεία γίνεται η μετατροπή τους από το τοπικό στο κρατικό σύστημα συντεταγμένων. Τα παραπάνω εμφανίζονται στο Σχήμα14.3.

β) Διπλή ωοειδής καμπύλη: Η καμπύλη αυτή προκύπτει από τη σύνδεση δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διαφορετικών ή και ίσων ακτίνων όπου τό ένα δεν εμπεριέχεται στο άλλο.

Δίδονται πάλι οι δύο κύκλοι όπως και πριν μόνο που ($|\Delta R|$-S)<0. ($R_1 = R_2$ ή $R_1 \neq R_2$). Η σύνδεση των δύο αυτών κύκλων θα γίνει με την χρησιμοποίηση ενός τρίτου (βοηθητικού) κύκλου, ο οποίος θα εμπεριέχει τους δύο υπάρχοντες και εφάπτεται με αυτούς, ή με την χρήση ενός βοηθητικού κύκλου, ο οποίος θα εμπεριέχεται στον κυκλικό τομέα των δύο διδόμενων κυκλικών τόξων.

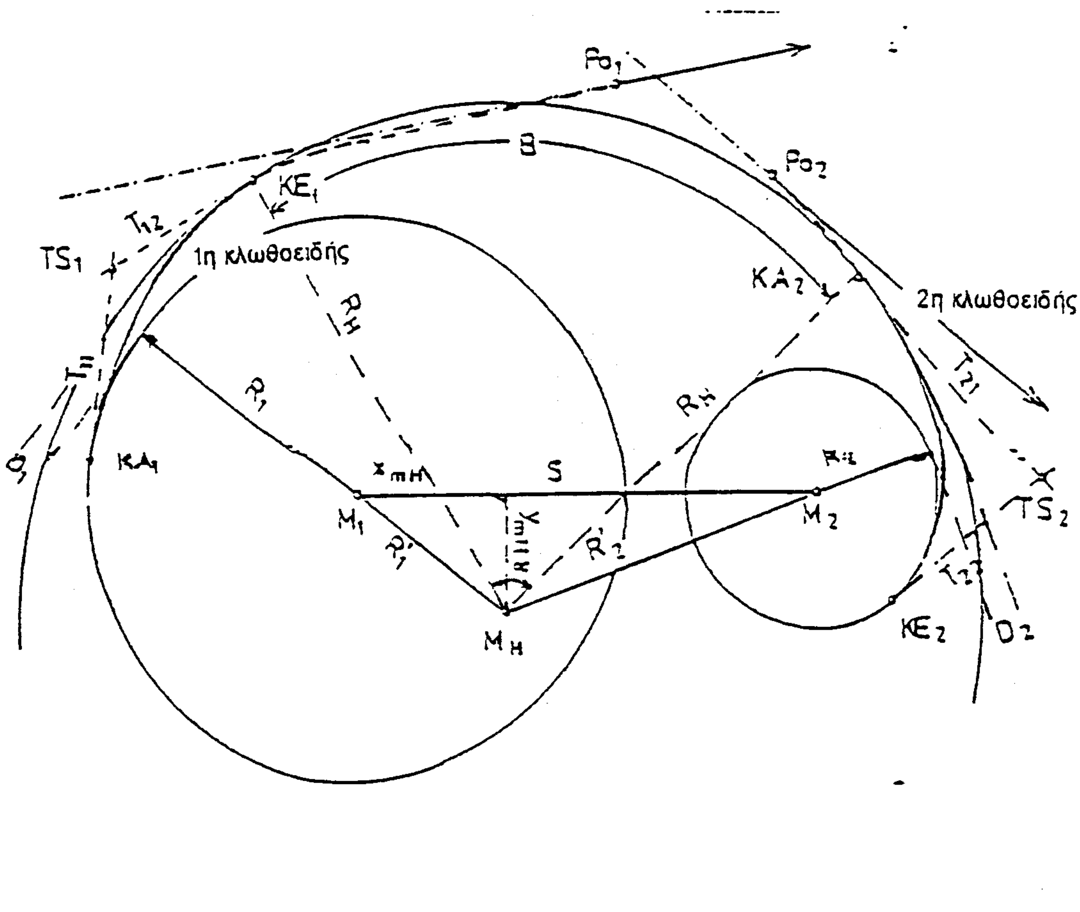


Σχήμα 14.3 Απλή Ωοειδής Καμπύλη

Η σύνδεση ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- Το πρώτο κυκλικό τόξο συνδέεται με το βοηθητικό ακτίνας R_H και κέντρου M_H (X_H, Y_H) μέσω κλωθοειδούς με παράμετρο A_1.
- Μέσω της χορδής μήκους B του βοηθητικού κύκλου γίνεται η σύνδεση με το δεύτερο κυκλικό τόξο με την χρήση κλωθοειδούς με παράμετρο A_2

Στο Σχήμα 14.4 φαίνεται η περίπτωση εκείνη κατά την οποία ο βοηθητικός κύκλος εμπεριέχει τους διδόμενους.



Σχήμα 14.4 Διπλή Ωοειδής Καμπύλη όπου ο Βοηθητικός Κύκλος εμπεριέχει τους Δεδομένους

Ισχύουν τα εξής:

$$R_1 = R_H - (R_1 + D_1)$$

$$R_2 = R_H - (R_2 + D_2)$$

οπότε

$$R_H \geq \frac{1}{2} [S + (R_1 + D_1) + (R_2 + D_2)]$$

Στο Σχήμα 14.5 εμφανίζεται η περίπτωση εκείνη στην οποία ο βοηθητικός κύκλος βρίσκεται στην περιοχή τομής των δεδομένων κύκλων. Στην περίπτωση αυτή ισχύουν τα παρακάτω:

$$R_1 = R_H - (R_1 + D_1)$$

$$R_2 = R_H - (R_2 + D_2)$$

οπότε

$$R_H \leq \frac{1}{2} [S + (R_1 + D_1) + (R_2 + D_2) - S]$$

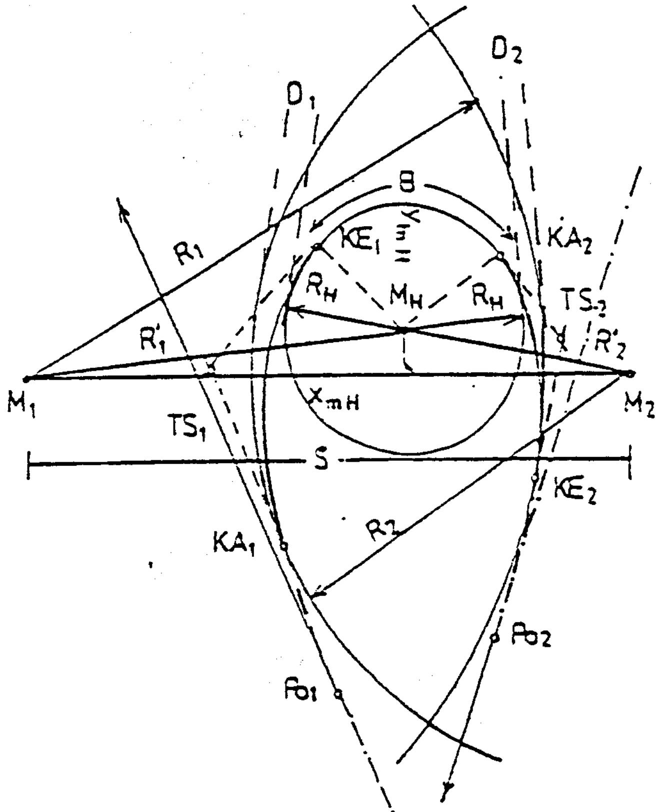
Οι συντεταγμένες του βοηθητικού κυκλικού τόξου είναι:

$$X_{mH} = \frac{S + (R_1)^2 - (R_2)^2}{2S}$$

$$Y_{mH} = \pm \sqrt{(R_1)^2 - (X_{mH})^2}$$

$$R = \frac{a}{\rho} R_H$$

$$T = R_H \tan(\frac{a}{2})$$



Σχήμα 14.5 Διπλή Ωοειδής Καμπύλη στην οποία ο Βοηθητικός Κύκλος βρίσκεται στην Περιοχή Τομής των Δεδομένων

3) Σύνδεση δύο γνωστών κυκλικών τόξων με την βοήθεια μιας ευθυγραμμίας

Δίδονται δύο κύκλοι, ο πρώτος ακτίνας R_1 και κέντρου M_1 (X_{M1}, Y_{M1}) και ο δεύτερος ακτίνας R_2 και κέντρου M_2 (X_{M2}, Y_{M2}). Αντί της χρησιμοποίησης ενός βοηθητικού κύκλου όπως προηγουμένως, η σύνδεση θα γίνει μέσω μιας ευθυγραμμίας.

Η θέση ή αλλιώς η απόσταση της ευθείας από τις περιφέρειες των δύο κύκλων εξαρτάται από το μήκος των ακτίνων R_1 και R_2 και μια σταθερή απόσταση ΔR όπου $\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2$. Το μήκος ΔR εκλέγεται αυθαίρετα, προτιμάται όμως να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Είναι δυνατόν να ισχύει $\Delta R_1 = \Delta R_2$ όπως επίσης και $R_1 = R_2$.

Αν θεωρηθεί αυθαίρετα ένα σύστημα καρτσιανών συντεταγμένων με κέντρο το M_1, τότε οι συντεταγμένες των κέντρων των δύο κυκλικών τόξων θα είναι:

$$y_{m1} = R_1 + \Delta R_1 \qquad , x_1 = 0$$

$$y_{m2} = R_2 + \Delta R_2 \qquad , X_2 = X_{m1} + \sqrt{S^2 - (y_{m2} - y_{m1})^2}$$

Ετσι η σύνδεση των δύο κύκλων ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

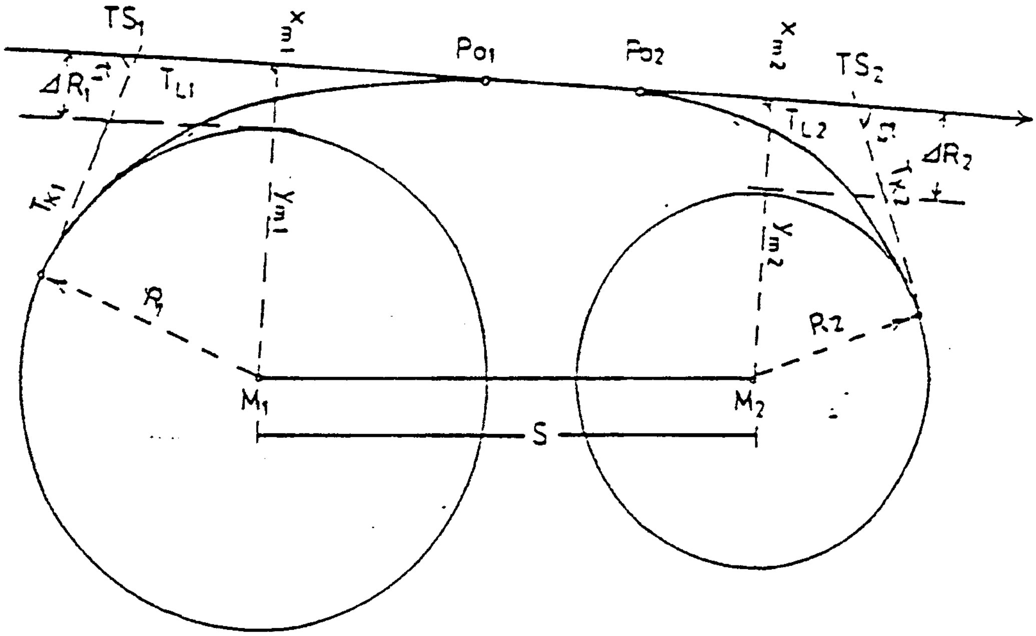
- Το πρώτο κυκλικό τόξο συνδέεται με την ευθυγραμμία μέσω μιας κλωθοειδούς παραμέτου A_1

- Η ευθεία $P_{o1}P_{o2}$, συνδέεται μέσω κλωθοειδούς με παράμετρο A_2, με το δεύτερο κυκλικό τόξο

Τέλος οι συντεταγμένες της αρχής της κλωθοειδούς είναι:

$$Y_{oi} = 0 \qquad X_{oi} = X_{mi} - X_{mi}$$

Τα παραπάνω εμφανίζονται στο Σχήμα 14.6



Σχήμα 14.6 Σύνδεση Δύο Κυκλικών Τόξων με τη βοήθεια Ευθυγραμμίας

4) Σύνδεση δύο αντίρροπων κυκλικών τόξων χωρίς την μεσολάβηση ενδιάμεσου ευθύγραμμου τμήματος: Κλωθοειδής καμπής ή καμπύλη S.

Δίδονται δύο κύκλοι, ο πρώτος ακτίνας R_1 και κέντρου M_1 (X_1, Y_1) και ο δεύτερος ακτίνας R_2 και κέντρου M_2 (X_2, Y_2). Η απόσταση $S = M_1M_2$ υπολογίζεται από την σχέση:

$$S = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2}$$

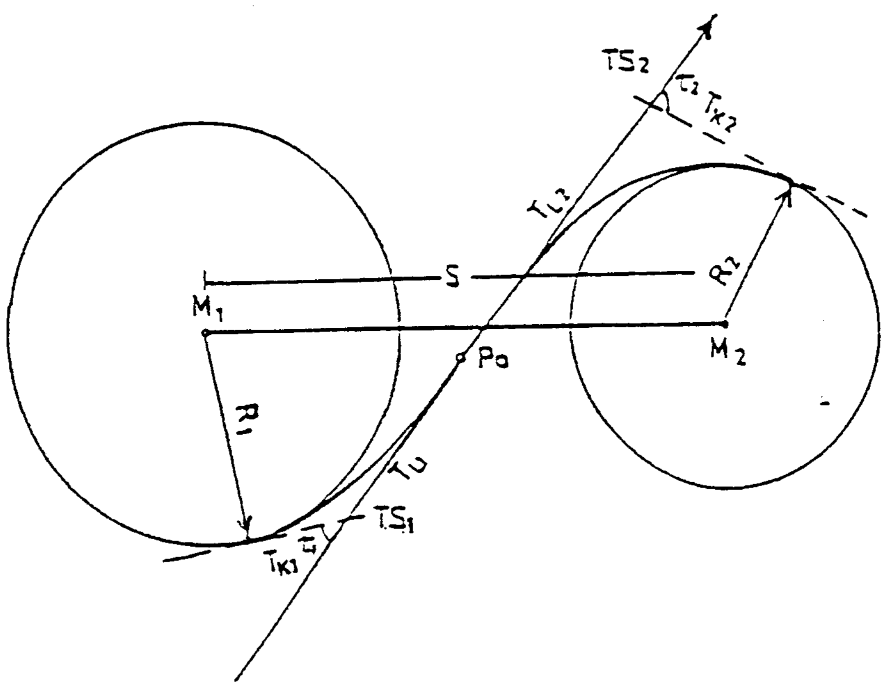
Με διαδοχικές παραγωγίσεις της σχέσης αυτής καθώς και με τις σχέσεις που δίνουν τα κύρια γεωμετρικά μεγέθη μιας κλωθοειδούς, προκύπτουν οι τύποι:

$$L = 5.03 \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^3 D\ R_1}$$

$$A = LR_1 - 2.24 \sqrt{\left(\frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}\right)^3 D}$$

$$D = S - (R_1 + R_2)$$

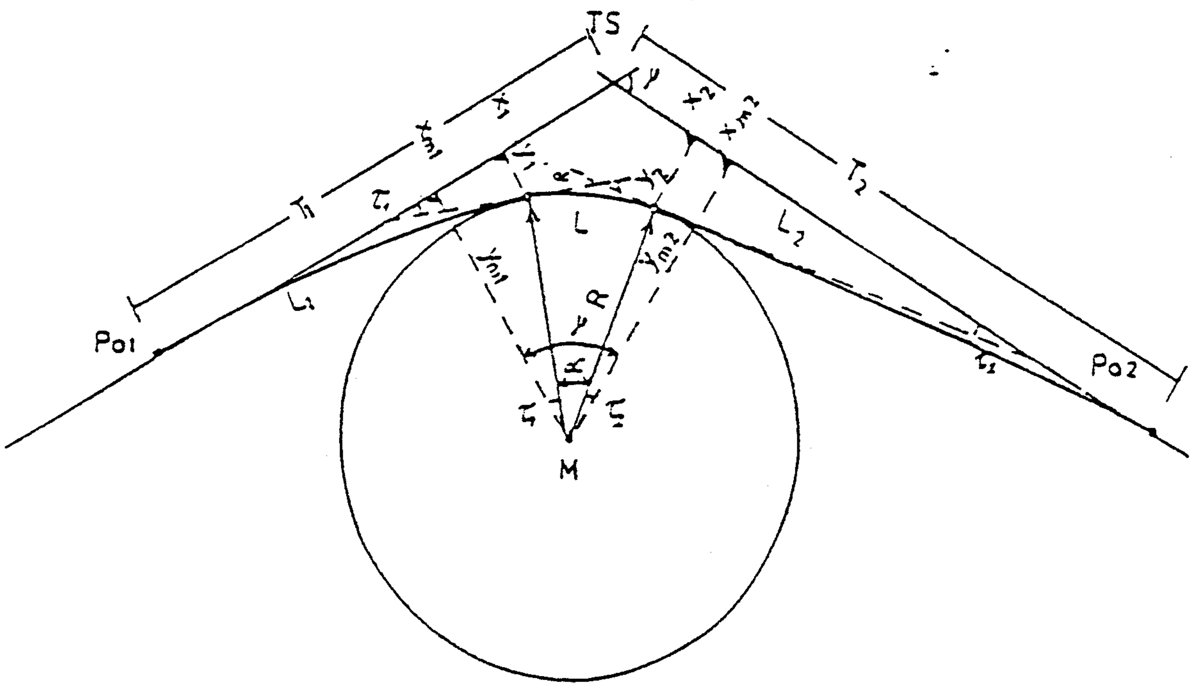
Τα παραπάνω εμφανίζονται στο Σχήμα 14.7 που ακολουθεί.



Σχήμα 14.7 Κλωθοειδής Καμπής

5) Κλασσική καμπύλη οδοποιίας: Ευθυγραμμία - Κλωθοειδής - Κυκλικό τόξο - Κλωθοειδής - Ευθυγραμμία.

Δίδονται δύο ευθυγραμμίες γνωστού μήκους, δύο κλωθοειδείς με μήκη L_1 και L_2 και ένα κυκλικό τόξο μήκους L, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.8.



Σχήμα 14.8 Κλασσική Καμπύλη Οδοποιίας

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$L1:L:L2 = 1/m/n$$

$$L=mL1$$

$$L2=nL1$$

Από τους τύπους:

$$\tau = \frac{L}{2R}$$

$$a = \frac{L}{R}$$

$$\gamma = \tau_1+\tau_2+a$$

καθώς και από τις βασικές σχέσεις γεωμετρίας της κλωθοειδούς, προκύπτουν τα μήκη των εφαπτομένων ως εξής:

$$\tau_1 = X_{m1} + \frac{Y_{m2}}{\sin\gamma} - \frac{Y_{m1}}{\tan\gamma}$$

$$\tau_2 = X_{m2} + \frac{Y_{m1}}{\sin\gamma} - \frac{Y_{m2}}{\tan\gamma}$$

Το μήκος εφαπτομένης του κυκλικού τόξου ισούται με:

$$\tau = R\ \tan(\frac{a}{2})$$

6) Κλωθοειδής Κορυφής: Η κλασσική καμπύλη οδοποιίας όπου όμως το μήκος του κυκλικού τόξου έχει μηδενιστεί

Τα δεδομένα είναι τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση όπου όμως L=0 οπότε και m=0, L_1:L_2=1:n. Για L_1=L_2 και n=1 η κλωθοειδής κορυφής είναι συμμετρική.

Από τις βασικές σχέσεις της κλωθοειδούς καθώς και τους τύπους:

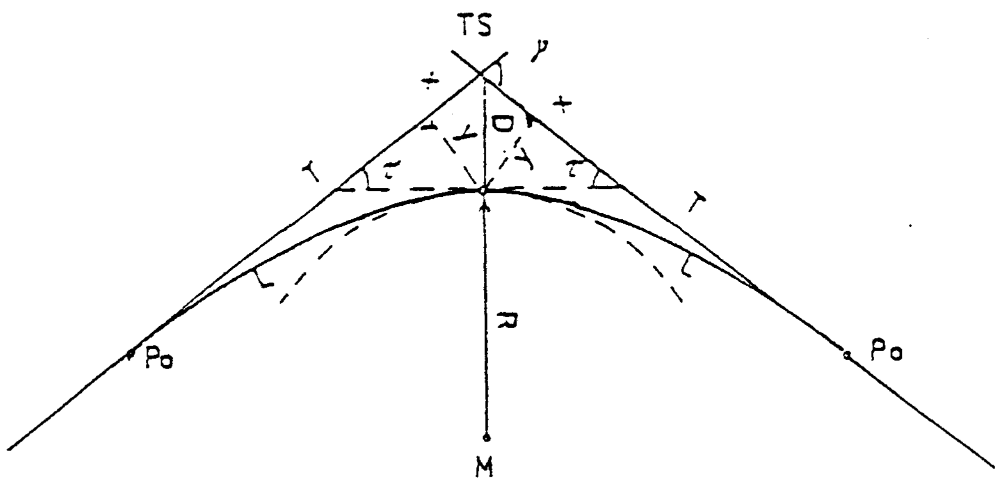
$$Y = D \cos \tau$$

$$T - X = D \sin \tau$$

προκύπτει ότι:

$$T = X + D \sin\tau$$

Τα παραπάνω εμφανίζονται στο Σχήμα 14.9.



Σχήμα 14.9 Κλωθοειδής Κορυφής